Problemas con enunciado

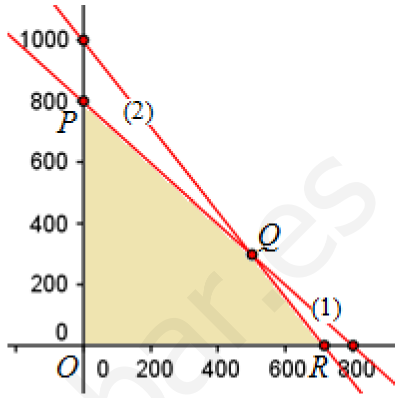
18. Un tendero dispone de una furgoneta en la que puede cargar hasta 800 kg y de 500 € para gastar. Va al mercado central a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,70 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg.
a) Venderá las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,60 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?
b) ¿Cambiaría la solución si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg?
Solución:
a) El beneficio por cada kg de manzanas es de 0,20 €; y por cada kg de naranjas, de 0,10 €. Por tanto, si compra *x* kg de manzanas e *y* de naranjas, el beneficio viene dado por la función $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$

Las restricciones son:

$x + y \leq 800$ $\rightarrow$ la furgoneta puede cargar hasta 800 kg

$0,70x + 0,50y \leq 500$ $\rightarrow$ dispone de 500 euros.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.



Los vértices son:

O = (0, 0); P = (0, 800);

$$Q: \begin{cases} x + y = 800 \\ 0,70x + 0,50y = 500 \end{cases} \Rightarrow Q(500, 300);$$

R = (714,3, 0)

El máximo de la función objetivo, $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$, se da en alguno de los vértices de la región factible.
El beneficio que se obtiene en cada caso es:
En O, $f(0,0) = 0$. En P, $f(0, 800) = 80$ €.
En Q, $f(500, 300) = 130$ €. En R, $f(714,3, 0) = 142,86$ €.
El máximo beneficio se obtiene comprando solo manzanas: 714,3 kg. Ese beneficio será de 142,86 euros.

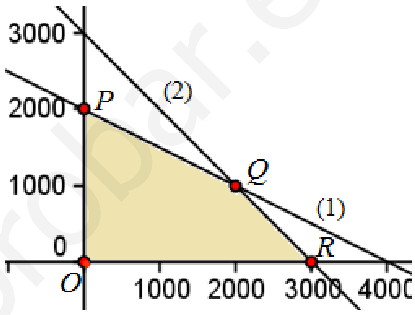
b) Si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg, la función de beneficios es $g(x, y) = 0,20x + 0,15y$. En este caso, el beneficio que se obtiene en cada vértice es:
En O, $g(0,0) = 0$. En P, $f(0, 800) = 120$ €.
En Q, $f(500, 300) = 145$ €. En R, $f(714,3, 0) = 142,86$ €.
El máximo beneficio, que es de 145 €, se obtiene comprando 500 kg de manzanas y 300 de naranjas.

19. Una empresa textil tiene en su almacén 4000 toallas de baño (grandes) y 3000 toallas de mano (pequeñas). Para favorecer su venta las distribuye en lotes de dos tipos, *A* y *B*. Cada lote del tipo *A* contiene 1 toalla de baño y 1 de manos. Cada lote del tipo *B* contiene 2 toallas de baño y 1 de manos. La empresa obtiene un beneficio de 2 euros por cada lote del tipo *A* y 3 euros por cada lote del tipo *B*.
Halla el número de lotes de cada tipo para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?
<u>Solución</u>:
Los datos del enunciado se resumen en la siguiente tabla:

Lote	Cantidad	T. baño	T. manos	Beneficio
A	x	x	x	$2x$
B	y	$2y$	y	$3y$
Disponible		4000	3000	

El objetivo es maximizar los beneficios. Esto es:
Maximizar $B(x, y) = 2x + 3y$
restringido por:

$$x + 2y \le 4000 \quad (1)$$
$$x + y \le 3000 \quad (2)$$
$$x \ge 0; \; y \ge 0$$



Estas restricciones generan la región factible sombreada en la figura.
Los vértices son:

$$O = (0, 0);\ P = (0, 2000);\ Q: \begin{cases} x + 2y = 4000 \\ x + y = 3000 \end{cases} \Rightarrow Q = (2000, 1000);\ R = (3000, 0)$$

El beneficio máximo se obtiene en alguno de los vértices de la región factible. Ese beneficio es:
En *O*, *B*(0, 0) = 0 €.
En *P*, *B*(0, 2000) = 6000 €.
En *Q*, *B*(2000, 1000) = 4000 + 3000 = 7000 €.
En *R*, *B*(3000, 0) = 6000 €.

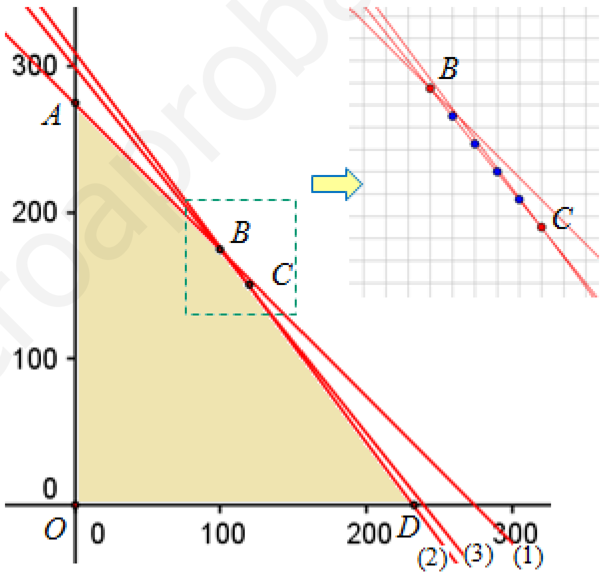
Para maximizar el beneficio deben venderse 2000 lotes del tipo *A* y 1000 del tipo *B*. El beneficio máximo será de 7000 euros.

20. Una empresa constructora dispone de 93000 m² de terreno urbanizable. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: una en parcelas de 400 m², que albergarán a familias de una media de cinco miembros, y cuyo precio de venta será de 200000 euros; otra, en parcelas de 300 m², en donde vivirán familias de una media de cuatro miembros, y costarán 160000 euros. Las autoridades del municipio le imponen dos condiciones:
1.ª El número de casas no puede superar las 275;
2.ª El número de habitantes esperado no puede ser superior a 1200 personas.
¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos por venta?
Solución:
Construyendo *x* viviendas grandes (400 m^2) e *y* pequeñas, se tendrá:

Viviendas	Número	Superficie	Personas	Ingresos (miles)
Grandes	x	$400x$	$5x$	$200x$
Pequeñas	y	$300y$	$4y$	$160y$
Condiciones	275	93000	1200	

El problema consiste en:
Maximizar $I(x, y) = 200x + 160y$ (en miles de €)
Restringido por:

$$x + y \le 275 \quad (1)$$
$$400x + 300y \le 93000 \quad (2)$$
$$5x + 4y \le 1200 \quad (3)$$
$$x \ge 0;\ y \ge 0$$



La región factible es el pentágono de vértices: *O*(0, 0), *A*(0, 275), *B*(100, 175), *C*(120, 150) y *D*(232,5, 0)

Los ingresos en cada vértice son:

$$I(0, 275) = 4320000\ €;$$
$$I(100, 175) = 4800000\ €;$$
$$I(120, 150) = 4800000\ €;$$
$$I(232,5,\ 0) = 4650000\ €$$

El máximo se da en *B* y *C*, indistintamente. Por tanto, valen todos los pares de coordenadas enteras pertenecientes al segmento *BC*, que son: *B*(100, 175), (104, 170), (108, 165), (112, 160), (116, 155), *C*(120, 150). En cada caso, los ingresos ascenderán a 4800000 euros.

21. Una empresa conservera puede enlatar diariamente un máximo de 1000 kg de atún. Tiene dos tipos de envases (latas pequeñas y grandes), cuyo contenido neto es de 90 g y 400 g, respectivamente. Por razones de producción, el número de latas pequeñas no puede superar el doble de las grandes. Si la ganancia empresarial es de 0,30 € por lata pequeña y de 0,80 € por grande, ¿cómo debe planificarse la producción para que esa ganancia sea máxima?

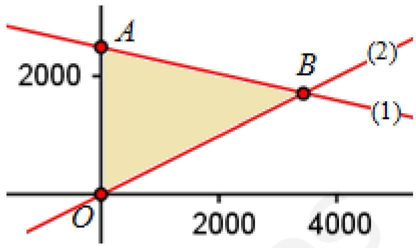
Solución:

Sean x e y, respectivamente, el número de latas pequeñas y grandes que se envasan.

Objetivo: maximizar $f(x, y) = 0,30x + 0,80y$

Restricciones:

$0,09x + 0,4y \leq 1000$; $x \leq 2y$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



La región factible es el triángulo de vértices:

O(0, 0), A(0, 2500) y

B(200000/58, 100000/58) ≈ (3448, 1724).

El máximo se da en B, y vale 2413,60 €.

22. Una fábrica de caramelos los produce de dos tipos, masticable y normal. La empresa debe fabricar, para cada tipo de caramelo, entre 300 kg y 3000 kg a la semana. El caramelo masticable se vende a 3 €/kg; el normal 2,5 €/kg. Sabiendo que la producción total no puede ser superior a 5100 kilos de caramelo a la semana, ¿cuántos debe producir de cada tipo para maximizar los ingresos?

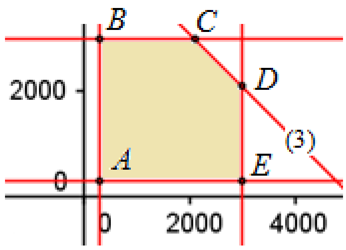
Solución:

Si se producen x kg de masticable e y kg de normal, el problema consiste en:

Maximizar $f(x, y) = 3x + 2,5y$

Restringida por:

$300 \leq x \leq 3000$; $300 \leq y \leq 3000$; $x + y \leq 5100$



La región factible es el polígono de vértices:

A(300, 300); B(300, 3000); C(2100, 3000);

D(3000, 2100); E(2100, 300)

El máximo, que vale 14250 €, se da en D: cuando se fabrican 3000 kg de caramelo masticable y 2100 kg de caramelo normal.

23. Para abonar una finca se necesitan 400 kg de nitrógeno y 600 kg de fósforo. En el mercado hay dos marcas de abonos, P y Q. Cada paquete de abono P contiene 2 kg de nitrógeno y 6 de fósforo, mientras que cada paquete de Q contiene 4 kg de nitrógeno y otros 4 de fósforo. Si el abono Q es un 25% más caro que el P, ¿cuántos paquetes hay que comprar de cada marca para abonar la finca con el menor coste posible?

Solución:

Si se compran x paquetes de la marca P (un precio 1 u.m.) e y paquetes de la marca Q (cuyo pecio será 1,25 u.m.) la información se resume en la tabla:

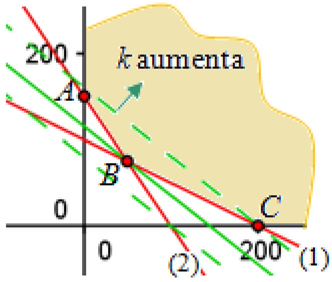
Marca	Cantidad	Nitrógeno	Fósforo	Precio
P	x	$2x$	$6x$	$1 \cdot x$
Q	y	$4y$	$4y$	$1,25 \cdot y$
Necesidades		400	600	

Con esto, el problema es:

Minimizar $f(x, y) = x + 1,25y$

Restringida por:

$2x + 4y \geq 400$; $6x + 4y \geq 600$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



La región factible, no acotada, tiene vértices en $A(0, 150)$, $B(50, 75)$ y $C(200, 0)$.
La ecuación de las rectas de nivel es $x + 1,25y = k$; su nivel aumenta cuando se desplazan hacia la derecha.
Por tanto, el mínimo se da en B. Hay que comprar 50 paquetes de la marca P y 75 de la Q. El precio a pagar es $f(50, 75) = 50 + 1,25 \cdot 75 = 143,75$ €.

24. Para estar convenientemente alimentado, un caballo necesita 12 unidades de un alimento $A1$, otras 12 de $A2$ y 10 de $A3$. En el mercado hay dos tipos de piensos, $P1$ y $P2$, cuyos precios respectivos son 3 y 2 €/kg. El pienso $P1$ proporciona 1, 2 y 5 unidades de $A1$, $A2$ y $A3$; mientras que $P2$ suministra 4, 2 y 1 unidad de $A1$, $A2$ y $A3$, respectivamente en ambos casos.
¿Cuántos kg de cada pienso hay que comprar para alimentar a un caballo a un coste mínimo?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

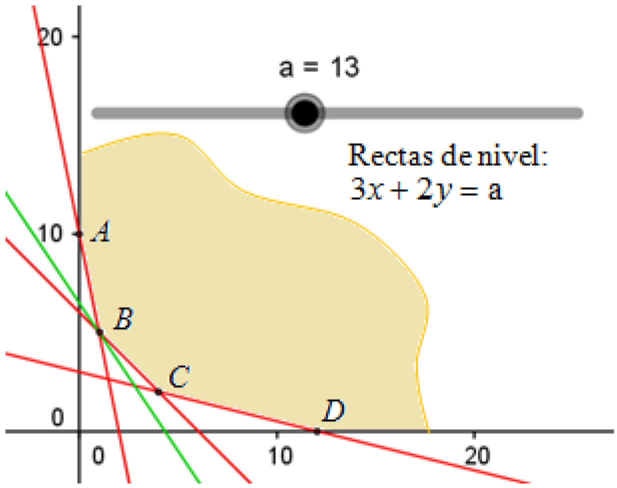
Pienso	Cantidad	$A1$	$A2$	$A3$	Coste
$P1$	x	x	$2x$	$5x$	$3x$
$P2$	y	$4y$	$2y$	y	2y
Necesidad		12	12	10	

Con esto, el problema es:

Minimizar $f(x, y) = 3x + 2y$

Restringida por:

$x + 4y \geq 12$; $2x + 2y \geq 12$;
$5x + y \geq 10$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



La región factible, no acotada, tiene vértices en $A(0, 10)$, $B(1, 5)$, $C(4, 2)$ y $D(12, 0)$.

La ecuación de las rectas de nivel es $3x + 2y = \mathrm{a}$; su nivel disminuye cuando se desplazan hacia la izquierda.
Por tanto, el mínimo se da en B. Hay que comprar 1 kg del tipo $P1$ y 5 kg del tipo $P2$.
El precio a pagar es $f(1, 5) = 3 + 2 \cdot 5 = 13$ €.

Observación: En este problema he creado con GeoGebra el "deslizador" $3x + 2y = \mathrm{a}$. Moviendo el punto se desplaza la recta: la recta más a la izquierda en contacto con la región factible es la que pasa por el punto B, siendo a = 13.
(Puedes crearlo tecleando 2x+y=a intro Crea deslizadores …)

25. Una empresa tiene dos centros de producción (*C*1 y *C*2) en los que fabrica tres tipos de artículos *A*1, *A*2 y *A*3. Dicha empresa debe fabricar diariamente un mínimo de 360 unidades del artículo *A*1, 320 del *A*2 y 180 del *A*3. La producción por hora en cada centro viene dada en la siguiente tabla:

Producción	*A*1	*A*2	*A*3
En *C*1	25	30	10
En *C*2	30	20	18

Si cada hora de funcionamiento cuesta 800 euros en *C*1 y 1000 en *C*2, ¿cuántas horas debe funcionar cada centro para que, produciendo, al menos, lo necesario, se reduzcan al mínimo los costes de producción?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Producción	Horas	*A*1	*A*2	*A*3
En *C*1	x	25x	30x	10x
En *C*2	y	30y	20y	18y
Necesidades		360	320	180

Si *C*1 y *C*2 funcionan x e y horas, respectivamente, el coste será de $f(x, y) = 800x + 1000y$.

El objetivo es minimizar esa suma.

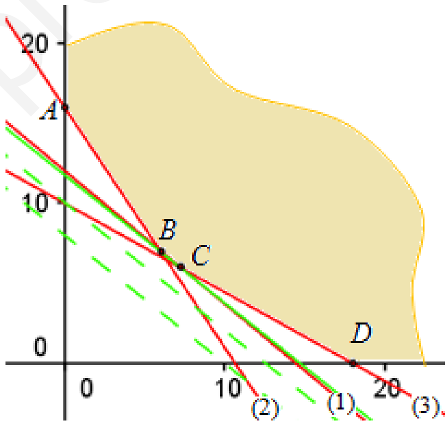
Restricciones:

$25x + 30y \geq 360$; $30x + 20y \geq 320$;

$10x + 18y \geq 180$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible dada en la figura adjunta, cuyos vértices son:

A(0, 16), *B*(6, 7), *C*(7,2, 6) y *D*(18,0).



La función objetivo toma los valores:

$f(0,16) = 16000$; $f(6,7) = 11800$,

$f(7,2,\ 6) = 11760$; $f(18,0) = 14400$

La solución más económica es que el centro *C*1 funcione durante 7,2 horas y el centro *C*2, durante 6.

En la figura se trazan las rectas de nivel $800x + 1000y = k$.

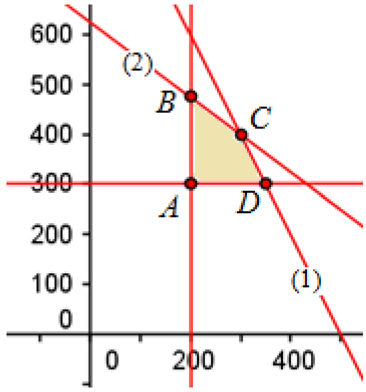
26. (Propuesto en Selectividad). Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante. El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

Solución:

La información se resume en la siguiente tabla:

Pintura	kilos	A	B	Beneficio
Mate	x	0,4x	0,6x	4x
Brillante	y	0,2y	0,8y	5y
Disponible		200	500	

Con esto, el problema es:
Maximizar $B(x, y) = 4x + 5y$
Restringida por:
$0,4x + 0,2y \leq 200$; $0,6x + 0,8y \leq 500$;
$x \geq 200$; $y \geq 300$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



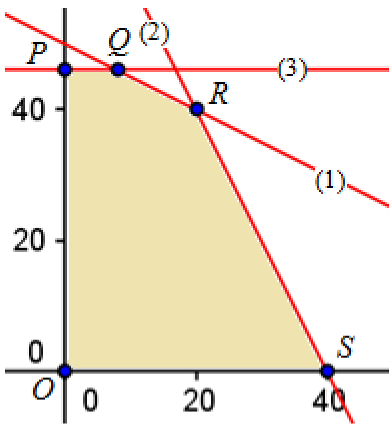
La región factible, acotada, tiene vértices en:
A(200, 300), B(200, 475), C(300, 400) y D(350, 300).

El beneficio en cada vértices es: 2300, 3175, 3200 y 2900 euros, respectivamente.
El máximo es de 3200 €, y se da cuando se fabrican 300 kg de pintura mate y 400 kg de pintura brillante.

27. (Propuesto en Selectividad). Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?
<u>Solución</u>:
La información se resume en la siguiente tabla:

Tarta	Cantidad	Masa	Crema	Nata	Beneficio
Chocolate	x	x	$2x$		$10x$
Choc y crema	y	$2y$	y	y	$12y$
Disponible		100	80	46	

Con esto, el problema es:
Maximizar $B(x, y) = 10x + 12y$
Restringida por:
$x + 2y \leq 100$; $2x + y \leq 80$;
$y \leq 46$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



Los vértices de la región factible son:
O(0, 0), P(0, 46), Q(8, 46) , R(20, 40) y S(40, 0).

El beneficio en cada vértices es: 0, 552, 632, 680 y 400 euros, respectivamente.
El máximo es de 680 €, y se da cuando se fabrican 20 tartas de chocolate y 20 de chocolate y nata.

28. Una empresa tiene dos plantas de producción (P1 y P2) de cierto artículo que vende en tres ciudades (C1, C2 y C3). En P1 produce 5000 unidades y en P2, 7000 unidades; estas 12000 unidades las vende así: 3500 en C1, 4000 en C2 y 4500 en C3. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a $C1$	a $C2$	a $C3$
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina qué número de artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.

Solución:

En los problemas de este tipo se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stock del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas. (La generación de stock añade problemas considerables a las empresas; piensa, por ejemplo, en las dificultades de almacenaje que implica el exceso de producción de coches a una empresa automovilística).

En consecuencia, los 5000 artículos producidos en $P1$ deben distribuirse en las cantidades x, y, z a $C1$, $C2$, y $C3$, de manera que $x+y+z=5000$. Pero, además, si desde $P1$ se envían x unidades a $C1$, el resto, hasta las 3500 necesarias en $C1$, deben ser enviadas desde $P2$; esto es, $3500-x$ unidades serán las enviadas desde $P2$ a $C1$.

Del mismo modo, si de $P1$ a $C2$ se envían y, el resto necesario, $4000-y$, deben enviarse desde $P2$. Y lo mismo para $C3$, que recibirá z desde $P1$ y $4500-z$ desde $P2$.

En la siguiente tabla se resume lo dicho.

Envíos	a $C1$ (3500)	a $C2$ (4000)	a $C3$ (4500)
Desde $P1$ (5000)	x	y	z
Desde P2 (7000)	$3500-x$	$4000-y$	$4500-z$

Como $x+y+z=5000$, se tiene que $z=5000-x-y \Rightarrow 4500-z=-500+x+y$

Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero y menores o iguales que las cantidades demandadas. Por tanto, se obtiene las siguientes desigualdades:

$0 \le x \le 3500$ (1); $\quad 0 \le y \le 4000$ (2); $\quad 0 \le 5000-x-y \le 4500$ (3)

$0 \le 3500-x \le 3500$ (4); $\quad 0 \le 4000-y \le 4000$ (5); $\quad 0 \le -500+x+y \le 4.500$ (6)

Transformando esas seis restricciones y observando que se repiten, quedan:

$0 \le x \le 3.500$ (1) y (4)

$0 \le y \le 4.000$ (2) y (5)

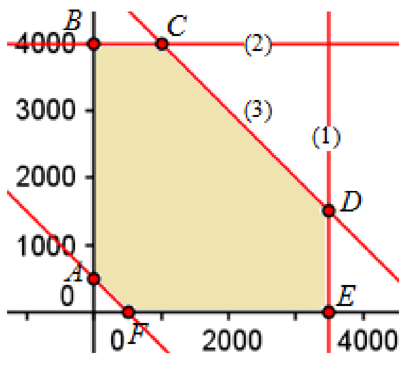
$500 \le x+y \le 5000$ (3) y (6)

Recuerda que nuestro objetivo es abaratar, al máximo, los costes de transporte. Estos costes se hallan multiplicando las cantidades enviadas desde cada planta a cada ciudad por los respectivos costes de transporte unitario.

Se obtiene:

$$C(x,y)=30x+25y+35(5000-x-y)+22,5(3500-x)+37,5(4000-y)+40(-500+x+y)$$

$$C(x,y)=12,5x-7,5y+383750$$



En definitiva, el objetivo es:

Minimizar $C(x,y)=12,5x-7,5y+383750$

sujeta a: $\quad 0 \le x \le 3500 \quad$ (1)

$0 \le y \le 4000 \quad$ (2)

$500 \le x+y \le 5000 \quad$ (3)

La región factible es la adjunta. Sus vértices son:

A(0, 500), B(0, 4.000), C(1.000, 4.000), D(3.500, 1.500), E(3.500, 0) y F(500, 0).

El coste, el valor de $C(x, y) = 12,5x - 7,5y + 383750$, en cada uno de esos puntos es:
$\to$ en *A*, 380000; en *B*, 353750; en *C*, 366250; en *D*, 416250; en *E*, 427500; en *F*, 390000.

El mínimo se da en *B*; cuando $x = 0$ e $y = 4000$.
Luego, las cantidades a distribuir son:

Envíos	a *C*1 (3500)	a *C*2 (4000)	a *C*3 (4500)
Desde *P*1 (5000)	0	4000	1000
Desde P2 (7000)	3500	0	3500