1) Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos? *(1 punto)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos? *(1,5 puntos)*
2) En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado? *(1 punto)*
   b) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(1,5 puntos)*
3) Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.
   a) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores. *(1,5 puntos)*
   b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%. *(1,5 puntos)*
4) Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción p de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población. *(2 puntos)*

Soluciones

1) Un estudiante se presenta a un examen en el que debe responder a dos temas, elegidos al azar, de un temario de 80, de los que se sabe 60.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente a los dos? *(1 punto)*

   Sean los sucesos A = Se ha estudiado el primer tema; B = idem el segundo.
   Los sucesos son dependientes, porque se escogen dos temas al azar para el examen. La probabilidad de B depende de que en la primera elección haya salido un tema de los que se sabe, o lo contrario. Podríamos esquematizar la situación en forma de árbol, pero no parece necesario, pues lo que nos preguntan es $P(A\cap B)$ y, para hallarla, podemos recurrir directamente a la fórmula de la probabilidad condicionada (la intersección sólo aparece en dos fórmulas; la otra es la del suceso unión, que no está entre los datos del problema). Entonces:

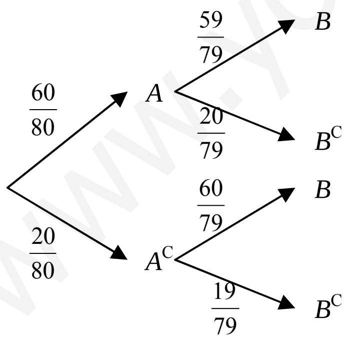
$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{60}{80}\frac{59}{79} = \frac{177}{316} = 0.5601$$

   Porque en la primera elección se ha estudiado 60 de un total de 80 y, en la segunda, quedan 79 temas, de los que se ha estudiado 59, puesto que ya ha salido uno que se sabe.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que responda correctamente al menos a uno de los dos? *(1,5 puntos)*

   Realizaremos este problema de tres formas diferentes.
   Nos piden $P(A\cup B)$. Usamos la única fórmula en la que aparece: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)–P(A\cap B)$. Lo que sucede es que $P(B)$ no la sabemos directamente, pues depende de que haya salido A ó A^C. Por tanto, hay que recurrir al teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(B/A)\cdot P(A) + P(B/A^C)\cdot P(A^C) = \frac{59}{79}\frac{60}{80} + \frac{60}{79}\frac{20}{80} = \frac{3}{4}$$



   Aquí sí que hubiera sido provechoso utilizar un árbol; la probabilidad que nos piden es la suma de las dos terminales en las que aparece B, por el Teorema de la Probabilidad Total.

   Entonces:

$$P(A\cup B) = \frac{60}{80} + \frac{3}{4} - \frac{177}{316} = \frac{297}{316} = 0.9399$$

   La segunda forma, a nuestro entender más corta, es usar las Leyes de Morgan. Calcularemos la probabilidad del suceso contrario del que nos piden: $(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$, según Morgan.

$$P(A^C\cap B^C) = P(B^C/A^C)\cdot P(A^C) = \frac{19}{79}\frac{20}{80} = \frac{19}{316}$$

   Luego: $P(A\cup B) = 1–P[(A\cup B)^C] = 1 - \frac{19}{316} = \frac{297}{316} = 0.9399$

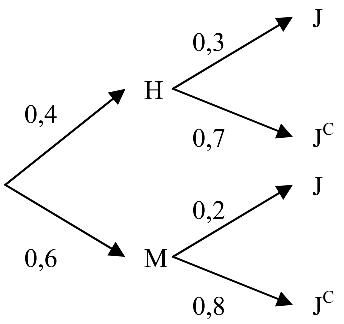
Por último, la tercera, se basa en que saberse alguno de los dos temas consiste en: saberse el primero y el segundo, o saberse el primero pero no el segundo, o no saberse el primero pero sí el segundo. Es decir:

$$P(A\cup B) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C) + P(A^C\cap B) = \frac{59}{79}\frac{60}{80} + \frac{20}{79}\frac{60}{80} + \frac{60}{79}\frac{20}{80} = \frac{297}{316} = 0.9399$$

probabilidades que se sacan directamente del árbol.

Observar que siempre que hemos usado probabilidades condicionadas, ha sido de la segunda extracción (B ó B^C) condicionado al resultado de la primera. Las probabilidades al revés requieren la utilización de la fórmula de Bayes.

2) En una agrupación musical el 60% de sus componentes son mujeres. El 20% de las mujeres y el 30% de los hombres de la citada agrupación están jubilados.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente de la agrupación, elegido al azar, esté jubilado? *(1 punto)*



Este problema ya se ha resuelto, en el examen de 4/4/06, por lo que nos remitimos al mismo, al principio del documento: P(J) = 0,3·0,4 + 0,2·0,6 = 0,24

   b) Sabiendo que un componente de la agrupación, elegido al azar, está jubilado ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(1,5 puntos)*

Por Bayes:

$$P(\mathrm{M/J}) = \frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{J})}{P(\mathrm{J})} = \frac{P(\mathrm{J}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{J})} = \frac{P(\mathrm{J/M})P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{J})} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}24} = 0{,}5$$

3) Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.
   a) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores. *(1,5 puntos)*

Nos dicen: $X\in N(\mu;6)$, es decir, $\sigma = 6$; además, $n = 36$, $\bar{x} = 35$. Y también:

$$1-\alpha = 0.95 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0.95 = 0.05 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0.025 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1.96 \text{ (por las tablas)}$$

Entonces, el intervalo de confianza de la media poblacional μ:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

resulta:

$$\left(35 - 1.96\frac{6}{\sqrt{36}}, 35 + 1.96\frac{6}{\sqrt{36}}\right) = (33.04,\ 36.96)$$

   b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%. *(1,5 puntos)*

$$1-\alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; \alpha = 1-0.99 = 0.01 \;\Rightarrow\; \alpha/2 = 0.005 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$$

$$\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575 \text{ (según las tablas)}$$

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Despejando:

$$E = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; E\sqrt{n} = z_{\alpha/2}\sigma \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E} \;\Rightarrow\; n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2$$

O sea: $n = \left(\frac{2.575\cdot 6}{1}\right)^2 = 238.7025$. Cuanto mayor es n, menor es el error. Por tanto, para garantizar que E es, como máximo, 1, debemos tomar, como mínimo $n = 239$.

4) Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción p de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población. *(2 puntos)*

Se trata de un intervalo de confianza para la proporción poblacional p. Nos dan la proporción muestral $\hat{p} = 0.35$, el tamaño de la muestra $n = 80$ y el nivel de confianza $1-\alpha = 0.99 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2.575$. Sustituyendo en la fórmula del intervalo de confianza para proporciones:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Queda:

$$\left(0.35 - 2.575\sqrt{\frac{0.35(1-0.35)}{80}},\; 0.35 + 2.575\sqrt{\frac{0.35(1-0.35)}{80}}\right) = (0.213,\; 0.487)$$