MATEMÁTICAS CC.SS. II
Sistemas de ecuaciones

1) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y-2z=1 \\ -2x+4y-3z=3 \\ 2x-2y-7z=5 \end{array}\right\}$$

(5 puntos)

2) En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto *A*, 4 unidades de un producto *B* y 3 unidades de un producto *C*, pagando un total de 4.500 ptas. Otro cliente compra 2 unidades de *A* y 2 unidades de *C*, pagando en total 2.000 ptas. Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caro que el supermercado, 3 unidades del producto *A* y una del *B*, pagando en total 1.210 ptas. Se pide:
   a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado. *(1 punto)*
   b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos *A*, *B* y *C* en el supermercado. *(3 puntos)*
   c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio. *(1 punto)*

Soluciones

1) Clasificar y dar todas las soluciones del siguiente sistema, resolviéndolo por el método de Gauss. Si tuviera más de una solución, dar una concreta:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ -2x+4y-3z&=3\\ 2x-2y-7z&=5 \end{aligned}\right\}$$

(5 puntos)

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ -2x+4y-3z&=3\\ 2x-2y-7z&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \\ (2^a)+(1^a):\\ (3^a)-(1^a): \end{matrix} \left.\begin{aligned} 2x-3y-2z&=1\\ y-5z&=4\\ y-5z&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Eliminamos la tercera ecuación, por ser redundante. Al quedar, entonces, dos ecuaciones con dos incógnitas, pasamos una de ellas al segundo miembro; a partir de ahora, actuará como parámetro (el valor de esta incógnita será arbitrariamente fijado por nosotros). Dicha incógnita será *z*:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2z\\ y&=4+5z \end{aligned}\right\}$$

El sistema ya está triangularizado. Como el valor de *z* queda libre, para recalcarlo, llamamos $z = t$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1+2t\\ y&=4+5t \end{aligned}\right\}$$

Ya tenemos el valor de dos incógnitas: $z = t$ e $y = 4+5t$ (de la segunda ecuación). Sustituyendo en la primera:

$$2x-3(4+5t) = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x-12-15t = 1+2t \;\Rightarrow\; 2x = 13+17t \;\Rightarrow$$

$$x=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t$$

Luego las soluciones (infinitas, una para cada valor de *t*, elegido éste por nosotros de forma arbitraria) son:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{13}{2}+\frac{17}{2}t\\ y&=\;4+5t\\ z&=\;t \end{aligned}\right\}$$

Es decir, es un sistema compatible indeterminado. Para, por ejemplo $t = 1$, obtenemos la solución: (x=15, y=9, z=1)

2) En un supermercado, un cliente compra 5 unidades de un producto *A*, 4 unidades de un producto *B* y 3 unidades de un producto *C*, pagando un total de 4.500 ptas. Otro cliente compra 2 unidades de *A* y 2 unidades de *C*, pagando en total 2.000 ptas. Una tercera persona compra en la tienda del barrio, que marca los precios un 10% más caro que el supermercado, 3 unidades del producto *A* y una del *B*, pagando en total 1.210 ptas. Se pide:

a) Formular el sistema de ecuaciones asociado al enunciado. *(1 punto)*

Si *x* es el precio en el supermercado de *A*, *y* el de *B* y *z* el de *C*, lo que cuestan 5 unidades de *A* más 4 de *B* y más 3 de *C* son: $5x+4y+3z$, lo que da un total de 4.500.

Análogo para el segundo cliente: $2x+2z = 2.000$

En la tienda, el artículo *A* cuesta *x* más el 10% de *x*:

$$x+\frac{10}{100}x = x + 0{,}1x = (1+0{,}1)x = 1{,}1x$$

donde en el penúltimo paso se ha extraído x factor común de los dos sumandos. Análogo para y. Por tanto, lo que paga el tercer cliente es:

$$3\cdot 1{,}1x + 1{,}1y = 1210$$

Es decir, que el sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+4y+3z=4500 \\ 2x \qquad +2z=2000 \\ 3\cdot 1{,}1x+1{,}1y \qquad =1210 \end{array}\right\}$$

b) Calcular el precio por unidad de cada uno de los productos *A*, *B* y *C* en el supermercado. *(3 puntos)*

$$\begin{array}{r} \\ (2^a)/2: \\ (3^a)/1{,}1: \end{array}\left.\begin{array}{l} 5x+4y+3z=4500 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} (1^a)-3(2^a): \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{l} 2x+4y \qquad =1500 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} (1^a)-4(3^a): \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{l} -10x \qquad =-2900 \\ x \qquad +z=1000 \\ 3x+y \qquad =1100 \end{array}\right\}$$

Y ya está triangularizado el sistema, porque en la primera ecuación sólo tenemos la incógnita x, en la 3^a, dicha incógnita más la y, y en la 2^a, dichas incógnitas (aunque el coeficiente de y es 0) más la z. Despejando en la 1^a:

$x = 290 \;\Rightarrow$ Sustituyendo en la 3^a: $870+y = 1100 \;\Rightarrow\; y = 230 \;\Rightarrow$ Sustituyendo en la 2^a: $290+z = 1000 \;\Rightarrow\; z = 710$

Solución única: $x=290$; $y=230$; $z=710$

c) Calcular el precio de cada uno de estos productos en la tienda del barrio. *(1 punto)*

Multiplicando por 1,1 obtenemos los precios un 10% más caros:

$$x' = 319;\quad y' = 253;\quad z' = 781$$

MATEMÁTICAS CC.SS. II 16 de noviembre de 2.001
Sistemas, matrices, determinantes

1) *(Select MII)* Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1,5 puntos)*
b) Calcula la matriz inversa de C para $m = 2$ *(1,5 puntos)*

2) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{l} 3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{array}\right\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(2 puntos)*

3) *(Select MII)* El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques. *(2 puntos)*

4) *(Select)* Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendido entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

Soluciones

1) *(Selectividad MII)* Sea C la matriz que depende de un parámetro m, dada por

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C? *(1,5 puntos)*

Una matriz tiene inversa si, y sólo si su determinante es distinto de cero. Veamos cuándo ocurre.

$$det(C)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \overset{\boxed{C_3+C_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & m+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{Adj de } F_2}}{=} -1\cdot\begin{vmatrix} -1 & m+2 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{\boxed{F_1+F_2}}{=}$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & m+17 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}=m+17$$

Se han aplicado propiedades de determinantes, pero también podía haberse desarrollado por la regla de Sarros. Según eso, el determinante vale 0 si $m=-17$. Por tanto, no existe matriz inversa si, y sólo si $m=-17$.

b) Calcula la matriz inversa de C para $m=2$ *(1,5 puntos)*

Si $m=2 \Rightarrow |C|=19$ y existe C^{-1}.

$$Adj(C)=\begin{vmatrix} 1 & -15 & 1 \\ 19 & 38 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{19}\left[Adj(C)\right]^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{19} & 1 & \frac{1}{19} \\ -\frac{15}{19} & 2 & \frac{4}{19} \\ \frac{1}{19} & 0 & \frac{1}{19} \end{pmatrix}$$

2) Resolver el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{matrix} 3X+Y=A \\ X-2Y=B \end{matrix}\right\}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(2 puntos)*

$\varepsilon_1\cdot 2$: $\left.\begin{matrix} 6X+Y2=2A \\ X-2Y=B \end{matrix}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7X=2A+B \Rightarrow X=\frac{1}{7}(2A+B)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_2\cdot(-3)$: $\left.\begin{matrix} 3X+Y=A \\ -3X+6Y=-3B \end{matrix}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones:

$$7Y=A-3B \Rightarrow Y=\frac{1}{7}(A-3B)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right]=$$

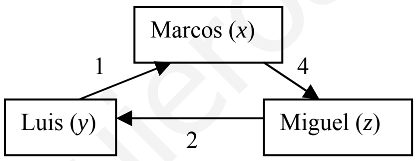
$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

3) *(Selectividad MII)* El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques. *(2 puntos)*

Para $a = 3$, la tercera columna es suma de las dos primeras, por lo que el determinante vale cero (la tercera columna es combinación lineal de las otras dos).

4) *(Selectividad)* Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendido entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

Llamamos: $\left.\begin{array}{l} x = \text{ CD de Marcos} \\ y = \text{ CD de Luis} \\ z = \text{ CD de Miguel} \end{array}\right\}$ Tienen los mismos CD prestándose así:



Es decir, tras el reparto quedan así:

Marcos	Luis	Miguel
x+1–4	y+2–1	z+4–2

y, entonces, todos tienen los mismos CD. Luego:

$\left.\begin{array}{l} x-3 = y+1 \\ y+1 = z+2 \\ x-3 = z+2 \end{array}\right\}$ donde la tercera ecuación puede eliminarse, porque es la suma de las dos primeras. Simplificando:

$\left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ y-z=1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Pasando y al segundo miembro: $\left.\begin{array}{l} x = 4+y \\ z = -1+y \end{array}\right\}$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones: (4+t, t, –1+t) (hemos llamado $y = t$)

Pero falta usar un dato: la suma de todos los discos es 4+t+t–1+t = 3+3t. Y según el enunciado, $16 \le 3+3t \le 22$. Como t son los discos de Luis, t tomará un valor de 1 en adelante (Luis tiene, al menos, un disco, ya que ha prestado 1 a Marcos). Veamos todas las posibilidades:

t	1	2	3	4	5	6	7
Discos en total (3+3t)	6	9	12	15	18	21	24

Luego pueden tener, en total 18 ó 21 discos (hay dos posibilidades).

MATEMÁTICAS CC.SS. II 17 de febrero de 2.006
Sistemas, matrices, determinantes

1) a) (*Batería de Selectividad 2.005)* Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(2 puntos)*

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(0,5 puntos)*

c) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa (no utilizar resultados previos). *(1 punto)*

2) (*Batería de Selectividad 2.004)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A - I_2) \cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t \cdot A$. *(1 punto)*

c) Calcule la matriz *X* que verifica $A \cdot X + B = C$. *(1,5 puntos)*

3) *(Resuelto en el libro)* Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro *m*: *(3 puntos)*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{cases}$$

Soluciones

1) a) (*Batería de Selectividad 2.005)* Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(2 puntos)*

$$\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ 4x+y-3z=-2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada y resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \to F_2-2F_1: \\ F_3-4F_1: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es igual a la segunda, podemos eliminarla (si restáramos F_3–F_2 se obtendría una fila de ceros). Por tanto, el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que será compatible indeterminado. Pasando la z al segundo miembro y llamándola, por ejemplo, t, el sistema será:

$$\begin{cases} x-y=-2+t \\ 5y=6-t \end{cases}$$

Que ya está triangularizado. Despejando y en la segunda ecuación, queda:

$$y=\frac{6-t}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$x-\frac{6-t}{5}=-2+t \quad \Rightarrow \quad x=-2+t+\frac{6-t}{5}=\frac{-10+5t+6-t}{5}=\frac{4t-4}{5}$$

Es decir, que las soluciones son de la forma:

$$\left(\frac{4t-4}{5},\frac{6-t}{5},t\right)$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(0,5 puntos)*

Según el método de Gauss, como hemos eliminado una ecuación, entonces, era combinación lineal de las anteriores.

c) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa (no utilizar resultados previos). *(1 punto)*

La matriz es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Si una ecuación es combinación lineal de las otras dos, una fila de esta matriz debe serlo de las otras dos. Por tanto, este determinante debe valer cero y la matriz no tendrá, pues, inversa. Como no nos permiten usar resultados anteriores, calculamos su determinante, por Sarrus:

$$-9+4-2+12+1-6=17-17=0$$

2) (*Batería de Selectividad 2.004)* Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule $(A-I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2. *(1 punto)*

$$(A-I_2)\cdot B=\left[\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&-4\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de *B*) y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$. *(1 punto)*

$B^t=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ Es posible efectuar el producto $B^t\cdot A$, porque B^t es de dimensión 3 x 2 y *A* es 2 x 2:

$$B^t\cdot A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\\-2&0\end{pmatrix}$$

c) Calcule la matriz *X* que verifica $A\cdot X+B=C$. *(1,5 puntos)*

$A\cdot X+B=C\Rightarrow A\cdot X=C-B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)\Rightarrow I_2X=A^{-1}(C-B)\Rightarrow$

$\Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$.

Calculemos A^{-1}. En primer lugar, comprobamos que existe, calculando su determinante:

$|A|=-2$. Como es no nulo, existe A^{-1}.

$$A^t=\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0\\1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-3\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-1&5/2&-2\end{pmatrix}$$

3) *(Resuelto en el libro)* Discuta y resuelva el siguiente sistema en función del parámetro *m*: *(3 puntos)*

$$\begin{cases}x+\ \ y+2z=3\\x+2y+3z=5\\x+3y+mz=7\end{cases}$$

La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&5\\1&3&m&7\end{pmatrix}\to\begin{matrix}\\F_2-F_1:\\F_3-F_1:\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&2&m-2&4\end{pmatrix}\to\begin{matrix}\\ \\F_3-2F_2:\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&0&m-4&0\end{pmatrix}$$

Pues bien. Si m–4 = 0, es decir, si m = 4, la última ecuación es 0x+0y+0z = 0, es decir, 0 = 0, por lo que podemos eliminarla. Entonces, el sistema será de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, compatible indeterminado con infinitas soluciones. Llamando z=t y pasándola al segundo miembro de las dos ecuaciones que quedan, el sistema será:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3-2t \\ y&=2-t \end{aligned}\right\}$$ Sustituyendo $y = 2–t$ (segunda ecuación) en la primera ecuación:

$$x + 2 - t = 3 - 2t \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 2t - 2 + t = 1 - t$$

Por tanto, las soluciones son de la forma:

$$(1–t, 2–t, t)$$

Por otra parte, si $m \neq 4 \quad \Rightarrow$ el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x+y \quad +2z&=3 \\ y \quad + \ z&=2 \\ (m-4)z&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{(3ª ec.)}: z = 0/(m–4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(2ª ec.)}: y + 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (1ª ec.): $x + 2 + 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3–2 = 1$

Por lo que el sistema es compatible determinado, con solución:

$$(1, 2, 0)$$

MATEMÁTICAS CC.SS. II
Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 0,4 € por kilo de la mercancía A y 0,3 € por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.
   b) Calcule $B + C \cdot A$
   c) Calcule el determinante de $A \cdot C$. ¿Tiene inversa $A \cdot C$? En caso afirmativo, calcularla; en caso negativo, calcular la inversa de B, suponiendo que exista.

Soluciones

1) Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm por viaje. En cierto viaje desea transportar, al menos, 5 Tm de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporte de A. Sabiendo que cobra 0,4 € por kilo de la mercancía A y 0,3 € por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

El cuadro siguiente resume las condiciones del enunciado. En primer lugar, elegimos como variables x e y, representando las cantidades que se van a transportar de cada mercancía, en toneladas. Las restricciones son: que el total transportado es, como máximo, 12 Tm: $x+y \leq 12$; que de A hay que transportar, al menos, 5 Tm: $x \geq 5$; que de B hay que transportar, al menos, la mitad de lo que se transporte de A: $y \geq x/2$. Por último, los ingresos, que hay que maximizar, son 0,4 por kilo de A más 0,3 por kilo de B. O, lo que es los mismo, 400€ por Tm de A y 300€ por Tm de B, es decir, un total de $400x+300y$. Para evitar decimales, en lugar de trabajar en euros, lo haremos en centenas de euro. Por tanto:

	Cantidad transportada (Tm)	Límites	Facturación (100€)
A	x	$x \geq 5$	$4x$
B	y	$y \geq x/2$	$3y$
TOTAL	$x+y \leq 12$		$4x+3y$

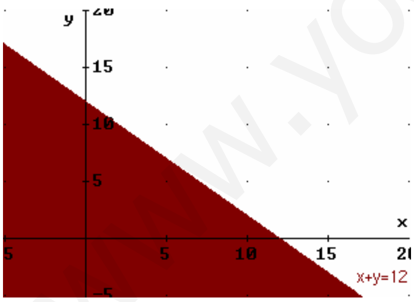
Por último, la cantidad transportada no puede ser negativa para ninguno de los dos tipos de mercancía: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Luego el problema de programación lineal es:

Función Objetivo: $f(x,y) = 4x+3y$ MAXIMIZAR

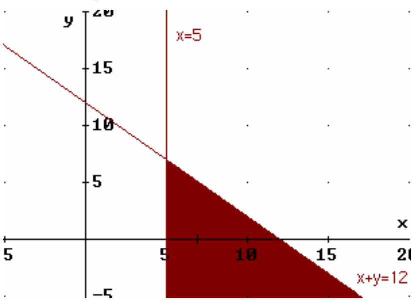
Restricciones:
$$x+y \leq 12$$
$$x \geq 5$$
$$y \geq x/2$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Dibujamos la región factible, determinada por las restricciones.

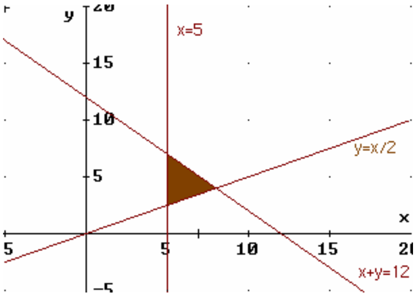


$x+y = 12$ es una recta. Para dibujarla, basta elegir dos puntos de la misma.

Esta recta divide el plano en dos semiplanos. Uno de ellos es el que verifica $x+y \leq 12$. Para averiguarlo, tomamos un punto cualquiera, del que sepamos seguro si está por encima o por debajo de la recta, y sustituimos en $x+y \leq 12$. Por ejemplo (0, 0), que está debajo de la recta, verifica: $0+0 \leq 12$. Por tanto, la zona $x+y \leq 12$ es la que queda bajo la recta, y que se ha destacado en el gráfico.



x=5 es una recta vertical. Como el punto (0,0), al sustituir en la desigualdad $x \geq 5$ no la verifica (quedaría $0 \geq 5$, que no es cierto), el semiplano que nos vale es el de la derecha. Combinándolo con lo anterior, la zona coloreada es la que verifica las dos restricciones a la vez.



Representamos la recta $y = x/2$. Esta vez no podemos trabajar con (0, 0), porque es un punto de la recta. Escogemos, por ejemplo (10, 0), que queda por debajo y sustituimos en $y \geq x/2$: $0 \geq 10/2 \Leftrightarrow 0 \geq 5$, que no es cierto. Luego el semiplano que vale es el otro, el que queda por encima. La zona coloreada verifica las tres restricciones simultáneamente.

Las restricciones restantes, $x \geq 0$, $y \geq 0$ nos remiten a trabajar sólo en el primer cuadrante. Como la región que tenemos hasta ahora está plenamente incluida en el primer cuadrante, ya está totalmente delimitada en el gráfico anterior.

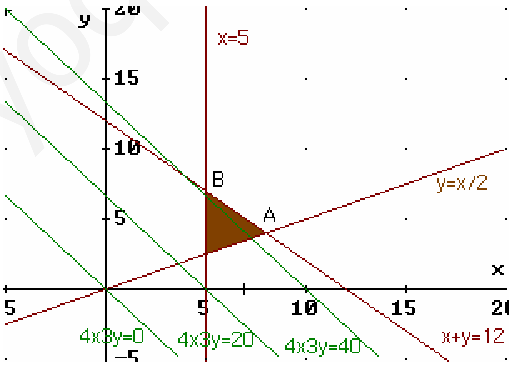
De entre todos los puntos de la *región factible*, hemos de escoger aquél que maximiza la *función objetivo* $f(x,y) = 4x+3y$. Para cada valor de x y de y la función objetivo toma un valor. Por ejemplo (sin considerar si los puntos están o no en la región factible):

Para (0, 0):	$4 \cdot 0+3 \cdot 0 = 0$
Para (2, 5):	$4 \cdot 2+3 \cdot 5 = 23$
Etc.	

Queremos, entonces, el punto (x, y) de la región factible que haga c, en $4x+3y = c$, lo mayor posible (eso es lo que hace que los ingresos sean lo mayor posible). Dicho punto pertenece a la recta de ecuación $4x+3y = c$. Todas estas rectas son paralelas entre sí (ver el gráfico siguiente). Y cuánto más alta es la recta, mayor es c, es decir, mayores son los ingresos. Luego nos interesa la recta más alta posible.

En cuanto a esto, es **importante** tener en cuenta que **si en la función objetivo *y* aparece con signo negativo**, la función objetivo ofrece resultados ***mayores* cuanto más baja está la recta**.

En nuestro problema, según el gráfico, la recta más alta posible que toca algún punto de la región factible será la que pase por A o, quizás, si el gráfico no estuviera muy afinado, podría ser la que pase por B:



Para quitarnos la duda, comprobamos ambos puntos. Para empezar, calculamos las coordenadas de ambos.

A es la intersección de $x+y = 12$ con $y = x/2$ (que equivale, despejando, a $x–2y = 0$). Por tanto, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo lo que hemos despejado en la primera ecuación ($x = 2y$) en la segunda:

$$2y+y = 12 \quad \Rightarrow \quad 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

Sustituyendo en $x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 8 \quad \Rightarrow \quad A(8, 4)$

B es la intersección de $x+y = 12$ con $x = 5$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Sustituyendo $x = 5$ en la segunda ecuación: $5+y = 12 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow B(5, 7)$

Por tanto, los valores de la función objetivo en cada uno de estos dos puntos, son:

$f(A) = 4·8+3·4 = 32+12 = 44$

$f(B) = 4·5+3·7 = 20+21 = 41$

Luego lo máximo que se puede conseguir con puntos de la región factible (la que verifica las restricciones) es 44, en A.

Es decir, que la solución óptima está en 8 Tm de la mercancía A y 4 Tm de B, con lo que se consiguen unos ingresos de 44 centenares de €, o sea, 4.400€.

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.

Como las dimensiones son:

dim(A) = 3x2

dim(B) = 2x2

dim(C) = 2x3

Se pueden hacer (indicamos la dimensión entre paréntesis):

$A·B$ (3x2), $A·C$ (3x3), $B·C$(2x3)

$C·A$ (2x2)

Y no se pueden hacer $B·A$ ni $C·B$, porque no coincide el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda.

b) Calcule $B + C·A$

$$B+C·A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calcule el determinante de $A·C$. ¿Tiene inversa $A·C$? En caso afirmativo, calcularla; en caso negativo, calcular la inversa de B, suponiendo que exista.

$$A·C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su determinante vale 0, porque tiene una columna de ceros (la tercera). Por tanto, no tiene inversa. Calculamos, entonces, la inversa de B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2–6 = –4 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS CC.SS. II 14 de diciembre de 2.001
Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) *(Junio 2.001, modificado a euros)* Para fabricar 2 tipos de cable, *A* y *B*, que se venderán a 1,5€ y 1 € el metro respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo *A* y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo *B*. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo *B* no puede ser mayor que el doble de la del tipo *A* y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima. *(Formulación: 2,5 puntos; Resolución: 2,5 puntos)*
2) a) *(Junio 2.001)* Determine los valores de *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ *(Productos: 1 punto; Resolución: 1 punto)*

b) Determine la matriz *X* de dimensión 2x2 tal que:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$ *(Hasta 3 puntos)*

Soluciones

1) *(Junio 2.001, modificado a euros*) Para fabricar 2 tipos de cable, *A* y *B*, que se venderán a 1,5€ y 1 € el metro respectivamente, se emplean 16 Kg de plástico y 4 Kg de cobre para cada Hm (hectómetro) del tipo *A* y 6 Kg de plástico y 12 Kg de cobre para cada Hm del tipo *B*. Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo *B* no puede ser mayor que el doble de la del tipo *A* y que, además, no pueden emplearse más de 252 Kg de plástico ni más de 168 Kg de cobre, determine la longitud, en Hm, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima. *(Formulación: 2,5 puntos; Resolución: 2,5 puntos)*

Volcamos los datos del enunciado en el siguiente cuadro:

	Cantidad fabricada (Hm)	Plástico (Kg)	Cobre (Kg)	Precio venta (Decenas de €)
A	x	$16x$	$4x$	$15x$
B	y	$6y$	$12y$	$10y$
TOTALES	$y\le 2x$	$16x+6y\le 252$	$4x+12y\le 168$	$15x+10y$

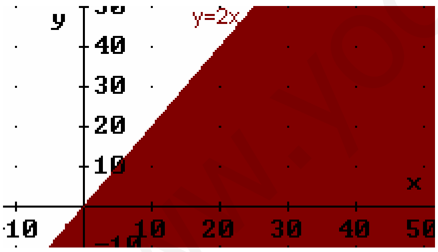
Es decir, vamos a fabricar *x* Hm de *A* e *y* Hm de *B*. Cada Hm de *A* se vende a 150€ o, lo que es lo mismo, a 15 decenas de €; cada Hm de *B*, a 100€, equivalente a 10 decenas de € (usamos esta medida para simplificar las cantidades con las que trabajamos). Así, la venta, que es lo que hay que maximizar (o sea, la *función objetivo*) es:

$$f(x, y) = 15x+10y \quad \text{(Maximizar)}$$

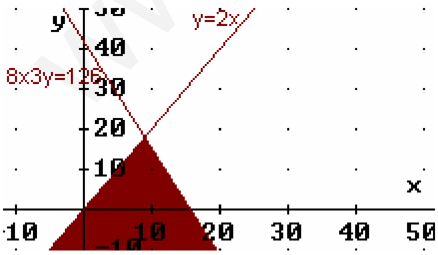
Las restricciones son:

- La cantidad fabricada de *A* debe ser menor o igual que el doble de la de *B*: $y\le 2x$
- La cantidad de plástico disponible es de 252 Kg: $16x+6y\le 252$
- La cantidad de cobre disponible es de 168 Kg: $4x+12y\le 168$
- No se pueden fabricar cantidades negativas: $x\ge 0,\quad y\ge 0$

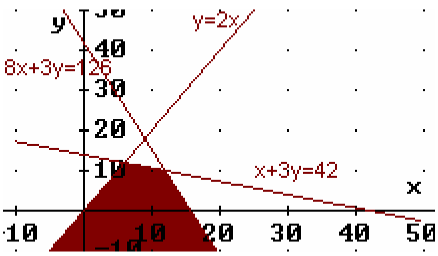
Dibujemos la región factible, es decir, los puntos (x, y) que verifican todas las restricciones.



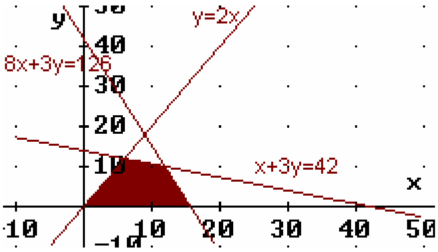
Dibujamos $y=2x$. Los puntos que verifican $y\le 2x$ son los que tienen una *y* menor que los de la recta, es decir, los que quedan bajo la misma. Podemos también comprobarlo tomando un punto cualquiera bajo la misma y viendo que verifica la desigualdad. Por ejemplo, (40, 0): $0\le 2\cdot 40$



La recta $16x+6y=252$ equivale a (simplificando entre 2) $8x+3y=126$. De los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, la desigualdad $16x+6y\le 252$ la verifican los puntos que quedan por debajo (puede comprobarse sustituyendo (0, 0) en la desigualdad. Combinando este resultado con el anterior, la zona coloreada verifica las dos desigualdades a la vez.

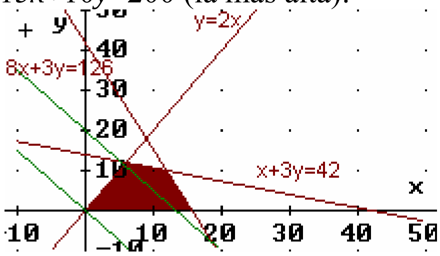


La recta $4x+12y=168$ equivale a $x+3y=42$, simplificando entre 4. La zona válida para $4x+12y\le 168$ es la que queda bajo la recta. La zona combinada es la coloreada.



Por último, las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ limitan la zona a puntos del primer cuadrante, por lo que la región factible final es la que está coloreada junto a estas líneas.

Buscamos el punto (x, y) de la región factible tal que $15x+10y$ da el valor c máximo: $15x+10y = c$. Esto es una recta. Dará el valor mayor posible, cuanto más alta esté (porque y lleva coeficiente positivo: si no, sería al revés); en el gráfico están dibujadas $15x+10y=0$ (la de abajo) y $15x+10y=200$ (la más alta):



A la vista del gráfico, eso va a suceder en el punto donde se cortan $8x+3y=126$ y $x+3y=42$:

$$\begin{cases} 8x+3y=126 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad F_1 - F_2 : \begin{cases} 7x \qquad = 84 \\ x+3y=42 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{84}{7} = 12 \quad \Rightarrow \quad 12+3y=42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3y = 42–12 \quad \Rightarrow \quad 3y = 30 \quad \Rightarrow \quad y = 10$$

Dicho punto es, entonces, (12, 10). (Nota: Si tuviésemos dudas, calcularíamos también las coordenadas del punto de intersección de $x+3y=42$ con $y=2x$, y las del punto intersección de $8x+3y=126$ con el eje OX, y compararíamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos). El resultado es, entonces:

$$f(12, 10) = 15 \cdot 12 + 10 \cdot 10 = 180+100 = 280 \text{ decenas de €}$$

En definitiva, la solución óptima consiste en fabricar 12 Hm de A y 10 Hm de B, con lo que la venta ascenderá a 2.800€.

2) a) *(Junio 2.001)* Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ *(Productos: 1 punto; Resolución: 1 punto)*

Realizamos los productos matriciales indicados:

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales, deben serlo componente a componente:

$$\begin{cases} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} -x-y=3 \\ 3x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow \quad F_2+3F_1 : \begin{cases} -x-\ \ y=3 \\ \quad -4y=7 \end{cases} \Rightarrow$$

(Segunda ecuación): $y = –7/4 \Rightarrow$ (Sustituyendo en la 1ª): $–x + 7/4 = 3 \Rightarrow$
(Multiplicando por 4 los dos miembros): $–4x + 7 = 12 \quad \Rightarrow \quad 7–12 = 4x \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad –5 = 4x \quad \Rightarrow \quad x = –5/4$

Es decir, los valores solicitados son: $\boxed{x = –5/4 \text{ con } y = –7/4}$.

b) Determine la matriz X de dimensión 2x2 tal que:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$ *(Hasta 3 puntos)*

X es una matriz, que intentaremos despejar realizando operaciones matriciales. De momento, multiplicamos 2 por la segunda matriz:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Sumando la segunda matriz a ambos miembros de la ecuación:

$$X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

Si multiplicamos por la derecha los dos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz primera:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}^{-1}$$

Calculemos dicha matriz inversa, si existe. Llamémosla A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5–6=–1 \quad\Rightarrow\quad \exists A^{-1} \text{ (el determinante es no nulo)}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -23 & 14\end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS CC.SS. II 9 de marzo de 2.006

Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) *(Propuesta para Selectividad 2.005)* Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio. *(6 puntos)*

2) *(Propuesta para Select. 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y. *(4 puntos)*

Soluciones

1) *(Propuesta para Selectividad 2.005)* Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

	Cantidad fabricada	Horas de trabajo	Máximo semanal	Beneficio (Decenas de €)
Fijos	x	$4x$	$x\leq 10$	$10x$
Portátiles	y	$10y$	$y\leq 15$	$15y$
TOTALES		$4x+10y\leq 160$		$10x+15y$

Esquematizado el enunciado en el cuadro anterior, el problema de Programación Lineal consiste en:

Función Objetivo: $f(x, y) = 10x+15y$ MAXIMIZAR

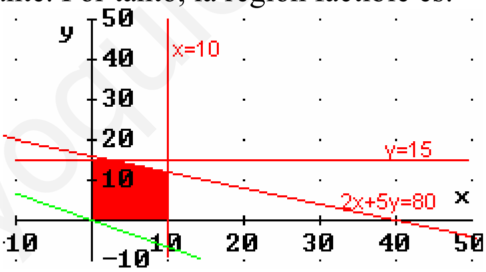
Restricciones: $4x+10y\leq 160 \Leftrightarrow 2x+5y\leq 80$

$x\leq 10$

$y\leq 15$

$x\geq 0$, $y\geq 0$ (no se puede fabricar una cantidad negativa)

Dibujamos la región factible. Los puntos que verifican $2x+5y\leq 80$ quedan bajo la recta (si despejásemos, sería $y\leq(-2x+80)/5$, es decir, valores con y menores que los puntos de la recta, que tendrían $y=(-2x+80)/5$; también puede verse sustituyendo un punto de uno de los dos semiplanos en los que la recta divide al plano, y viendo si el punto elegido es del semiplano que verifica la inecuación). Los que cumplen que $x\leq 10$ quedan a la izquierda de la recta $x=10$. Los de $y\leq 15$ están bajo la recta horizontal $y=15$. $x\geq 0$, $y\geq 0$ nos restringe al primer cuadrante. Por tanto, la región factible es:



Hemos dibujado, pasando por (0, 0), la recta $10x+15y=0$. La solución será una recta $10x+15y=c$, es decir, paralela a la dibujada, con c lo mayor posible (porque estamos maximizando). Esto nos obliga a dibujarla lo más alta posible tocando a puntos de la región factible (porque el coeficiente de y en la función objetivo es positivo; si fuese negativo, sería la recta más baja posible). Luego los últimos puntos que tocará serán (dependiendo de la precisión del gráfico dibujado) o el vértice intersección de $y=15$ con $2x+5y=80$, o la intersección de esta última recta con $x=10$, o incluso todo el segmento que los une. Calculemos ambos, veamos qué valor toma la función objetivo en cada uno de ellos, para ver dónde es mayor.

$\begin{cases} y=15 \\ 2x+5y=80 \end{cases} \Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación (que ya nos da el valor de y) en la segunda: $2x + 5\cdot 15 = 80 \Rightarrow 2x + 75 = 80 \Rightarrow 2x = 80-75 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x=5/2$

Luego el primer punto es (5/2, 15)

$\begin{cases} x=10 \\ 2x+5y=80 \end{cases} \Rightarrow$ De la misma forma: $2\cdot 10 + 5y = 80 \Rightarrow 5y = 80-20 \Rightarrow y=60/5=12$

Por lo que el segundo punto es (10, 12)

$f(5/2, 15) = 10\cdot\frac{5}{2}+15\cdot 15 = 25+225 = 250$

$f(10, 12) = 10\cdot 10 + 15\cdot 12 = 100+180 = 280$

Luego el beneficio máximo se consigue fabricando 10 fijos y 12 portátiles, lo que reporta un beneficio de 2.800€.
Téngase en cuenta que si la solución hubiera sido en (5/2, 15) no sería válida, porque no puede fabricarse un número decimal de ordenadores. Habría entonces que dibujar los puntos de la región factible correspondientes a valores de x e y sin decimales, y buscar el máximo sólo entre ellos.

2) *(Propuesta para Select. 2.005)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B.

Como $|B| = 0–2 = –2$ es no nulo, existe la inversa de B.

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y $A + A^t = 3 \cdot I_2$, calcule x e y.

La primera igualdad equivale a:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x+y & 2x \\ y+x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y & -y+2x \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y = -x-2y \\ 2x = -y+2x \\ y+x = x \\ -2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2y \Rightarrow 0 = 2y-y \Rightarrow 0 = y \\ 0 = -y \Rightarrow 0 = y \\ y = 0 \\ 0 = 3y \Rightarrow 0 = y \end{cases}$$

Es decir, sólo con que $y = 0$ se verifica la igualdad matricial.

La segunda es:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = 3 \end{cases} \Rightarrow x=3/2$$

(Hemos igualado sólo las posiciones de las dos matrices que diferían)

Luego la solución es: $\boxed{x = \frac{3}{2}, y = 5}$

MATEMÁTICAS CC.SS. II 21 de marzo de 2.006
Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) a) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2x+3y-z&=17\\ 4x+5y+z&=17 \end{aligned}\right\}$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(1 punto)*

2) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: *(1,5 puntos)*

$$x-y\le 1;\ \ x+2y\ge 7;\ \ \ x\ge 0;\ \ \ y\le 5.$$

b) Determine los vértices de este recinto. *(1 punto)*

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo siguiente?

$$F(x, y) = 2x + 4y - 5$$ *(1,5 puntos)*

3) *(Selectividad 2.005)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Soluciones

1) a) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones: *(3 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x+3y-z&=17 \\ 4x+5y+z&=17 \end{aligned}\right\}$$

Trabajamos con la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 17 \\ 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la tercera fila es de 0, la eliminamos. Las dos filas restantes corresponden a un sistema ya triangularizado, pero con dos ecuaciones y tres incógnitas. Pasamos, por ejemplo z al segundo miembro; a partir de ahora, actuará de parámetro: $z = t$, suponiendo t un número conocido, cuyo valor determinamos nosotros a nuestro antojo:

$$\left.\begin{aligned} x+y+\ z&=0 \\ y-3z&=17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-z \\ y&=17+3z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y&=-t \\ y&=17+3t \end{aligned}\right\}$$

La segunda ecuación nos da el valor de y. Sustituyéndolo en la primera y despejando:

$$x + 17 + 3t = -t \ \Rightarrow \ x = -17-4t$$

Luego el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, es *compatible indeterminado*. Y las infinitas soluciones, dependientes del valor que, para cada una de ellas, elijamos para t, son:

$$(x = -17-4t,\ y = 17+3t,\ z = t)$$

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos? *(1 punto)*

Como quiera que el sistema partiera de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y ha resultado tener infinitas soluciones, es porque una de las ecuaciones ha sido eliminada. Y esto es porque dicha ecuación resultaba ser combinación lineal de las restantes.

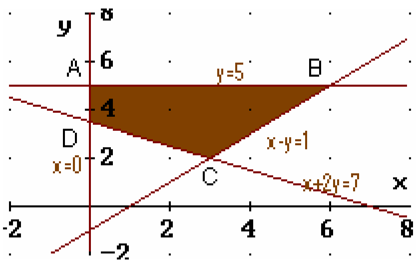
Y, en efecto, podemos incluso determinar dicha combinación lineal. Tras el primer paso que dimos, la matriz tenía iguales sus filas segunda y tercera. Teniendo en cuenta el valor de dichas filas respecto de la matriz de partida, se tiene que:

$$F_2-2F_1 = F_3-4F_1 \ \Rightarrow \ F_2-2F_1+4F_1 = F_3 \ \Rightarrow \ F_3 = 2F_1+F_2$$

2) *(Propuesta de Selectividad 2.005)*: a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: *(1,5 puntos)*

$$x-y\le 1;\quad x+2y\ge 7;\quad x\ge 0;\quad y\le 5.$$

Como en problemas similares anteriores, dibujamos las rectas y decidimos cuál de los dos semiplanos resultantes corresponde a la inecuación correspondiente. El área final es la siguiente:



Puede presentar algún problema razonar con estas inecuaciones para decidir la zona. Por ejemplo la primera inecuación $x - y \leq 1$ equivale a: $x \leq 1+y \iff x - 1 \leq y$. Es decir:

$$y \geq x-1$$

Por tanto, la zona es la que queda *por arriba* de la recta.
Lo mismo sucede con la inecuación $x+2y \geq 7$, que despejando y nos queda, también, que es el semiplano que está *por encima* de la recta.
Si la decisión la hubiésemos tomado eligiendo un punto cualquiera del plano que no esté en la recta y viendo si verifica, o no, la inecuación, no hubiésemos tenido problemas.

b) Determine los vértices de este recinto. *(1 punto)*

$$A\begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$$

$$B\begin{cases} y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $x-5 = 1 \Rightarrow x=6$
$\Rightarrow$ B(6, 5)

$$C\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \quad \cdot 2 : \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Sumando: $3x \quad = 9 \Rightarrow x = 3$
Sustituyendo en la primera ecuación original: $3-y = 1 \Rightarrow 3-1 = y \Rightarrow y = 2$
Luego C(3, 2)

$$D\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $2y = 7 \Rightarrow y=\frac{7}{2}$
Luego D(0, 7/2)

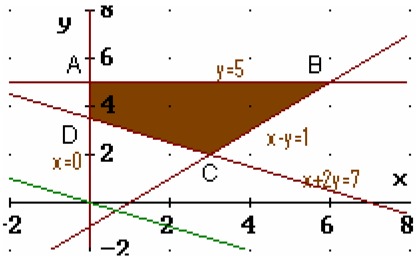
c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo siguiente?

$F(x, y) = 2x + 4y - 5$ *(1,5 puntos)*

Como tenemos los cuatro vértices, y los extremos de una región factible están en los vértices de la misma o en los segmentos que unen los vértices, siempre y cuando cualquier punto de la región factible pueda ser solución, en lugar de recurrir a dibujar la recta $2x + 4y - 5 = c \iff 2x + 4y = c'$ procedemos a calcular el valor de la función objetivo F en cada vértice y comparamos los resultados:

$F(A) = F(0, 5) = 2\cdot 0 + 4\cdot 5 - 5 = 15$
$F(B) = F(6, 5) = 2\cdot 6 + 4\cdot 5 - 5 = 27$
$F(C) = F(3, 2) = 2\cdot 3 + 4\cdot 2 - 5 = 9$
$F(D) = F(0, \frac{7}{2}) = 2\cdot 0 + 4\cdot \frac{7}{2} - 5 = 9$

Por tanto, el máximo valor de la función objetivo es 27, y se alcanza en B(6, 5). El mínimo vale 9, y es alcanzado en dos vértices: C y D. Por tanto, cualquier punto del segmento CD es solución si se intenta minimizar la función objetivo.
En efecto, si dibujamos $2x+4y = 0$ observamos que es paralela a la recta que une C con D, lo que explica el resultado obtenido:



3) *(Selectividad 2.005)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. *(2 puntos)*

Llamamos $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot1-1\cdot2+1(-2) & -2(-1)-1\cdot0+1\cdot1\\ -1\cdot1+0\cdot2+1(-2) & -1(-1)+0\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

Entonces, $|C|=\begin{vmatrix}-6 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-12-(-9)=-12+9=-3$ y $C^t=\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ por lo que:

$Adj(C^t)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$. Entonces:

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}Adj(C^t)=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Pues bien: $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow C\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ Multiplicando, a la izquierda, los dos miembros de esta ecuación por C^{-1}:

$C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow I_2\cdot X=C^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, donde I_2 es la matriz identidad 2x2 $\Rightarrow$

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}4+1\cdot2\\ -1\cdot4+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}+2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS CC.SS. II
Sistemas, matrices, determinantes, p. lineal

1) a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: *(2 puntos)*

$$x + 2y \geq 6, \quad x \leq 10 - 2y, \quad \frac{x}{12} + \frac{y}{3} \geq 1, \quad x \geq 0$$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x, y) = 4 - 3x - 6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan. *(2 puntos)*

2) Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & =-2 \\ 2x & & -z & = 0 \\ & -2y & +z & = 4 \end{array}\right\}$$

a) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones. *(2 puntos)*
b) ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo. *(1 punto)*
c) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$. *(1 punto)*

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar: razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar:

$A + B$; $A^t + B$; $A \cdot B$; $A \cdot B^t$. *(2 puntos)*