1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. CONCEPTOS GENERALES

- *Definición*: Un ***sistema de m ecuaciones con n incógnitas*** es un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde:

- a_{ij}, son números reales y son los coeficientes del sistema. El subíndice i (i = 1,2,...,m) indica la ecuación y el subíndice j (j = 1,2,...,n) la incógnita.

  El escalar a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación.
- b_i , i = 1, …, m, son números reales, llamados **términos independientes** del sistema.
- x_j, j = 1,…, n, son las **variables** del sistema.

En el caso de ser todos los términos independientes cero, $b_i = 0$, i = 1, 2, …, m, se dice que el ***sistema es homogéneo***.

Expresión matricial de un sistema.

Los conocimientos adquiridos sobre matrices facilitan la escritura de un sistema de ecuaciones lineales de manera más reducida.

A cada sistema le asociamos

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$, donde:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $A \in M_{m\,x\,n}$ es la ***matriz de los coeficientes*** de las incógnitas

$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ $A^* \in M_{m\,x\,n+1}$ es la ***matriz ampliada*** con los términos independientes

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $X \in M_{n\,x\,1}$ es la matriz formada por las incógnitas

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ $B \in M_{m\,x\,1}$ es la matriz formada por los términos independientes

Ejemplos

1) Expresa el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en forma matricial:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Expresar el siguiente sistema dado por su expresión matricial mediante ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

3) Comprobar si *x* = 1 ; *y* = -1 ; *z* = 0 es una solución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la expresión matricial sustituimos la matriz de las incógnitas X por la solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ -1-1+2 \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La igualdad es cierta → *x* = 1 ; *y* = -1 ; *z* = 0 es solución.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Atendiendo al número de sus soluciones, los sistemas se clasifican en:

- Sistemas ***Incompatibles***: no admiten ninguna solución.
- Sistemas ***compatibles***: admiten alguna solución. Éstos se clasifican en:
  - Sistemas ***compatibles determinados***: tienen una única solución.
  - Sistemas ***compatibles indeterminados***: tienen infinitas soluciones.

Ejemplos

- Sistema compatible determinado: $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y - z = 2 \end{cases}$ Solución: x = 1, y = 2, z = -4

- Sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 3z = 3 \end{cases}$ Solución: $x = 1 - \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

  (la tercera ecuación es suma de las dos anteriores)

- Sistema incompatible: $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7y + 2z = -2 \\ -7y + 2z = -11 \end{cases} \rightarrow 0 = 9$ → No hay solución

Sistemas triangulares

- *Definición*: Un ***sistema escalonado* o *triangular*** es un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m-1,n-1}x_{n-1} + a_{m-1,n}x_n = b_{m-1} \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

La ventaja de estos sistemas es que son muy fáciles de resolver.

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2y-z=4 \\ 2z=12 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \rightarrow x+5+6=2 \rightarrow x=-9 \\ 2y-z=4 \rightarrow 2y-6=4 \rightarrow 2y=10 \rightarrow y=5 \\ 2z=12 \rightarrow z=6 \end{array}\right.$$

2 MÉTODO DE GAUSS. DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se trata de obtener un sistema escalonado equivalente al inicial. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de los coeficientes.

- *Definición*: Dos ***sistemas*** de ecuaciones se llaman ***equivalentes*** cuando admiten las mismas soluciones

Transformaciones permitidas entre sistemas

Las operaciones permitidas para lograr el sistema triangular equivalente son:

- Multiplicar (o dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número o una combinación lineal de las restantes.
- Permutar dos ecuaciones entre sí.
- Suprimir una ecuación que:
  - Sea proporcional a otra.
  - Sea combinación lineal de otras ecuaciones.
  - Tenga todos los elementos nulos (coeficientes y término independiente).

Ejemplo:

Resuelve aplicando el método de Gauss: $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-F1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3+F2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ 2z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-y=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Solución: x = 3, y = -2, z = 0

Discusión del sistema

A la hora de discutir un sistema escalonado, en el cual todas las ecuaciones son linealmente independientes, se pueden presentar tres situaciones:

a) Si el nº de ecuaciones = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

b) Si el nº de ecuaciones > nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

c) Si hay una ecuación de la forma $0 \cdot x = b$, siendo $b \neq 0$, el sistema es incompatible.

Ejemplos

a) $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ x+y-z=2 \\ 3x+y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible (3ª ecuación: $0 \cdot x = -1$), por tanto, no hay solución.

b) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3+E1]{E2:E2+E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3-2E2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado.

Hay dos ecuaciones l.i., con lo cual, consideramos una de las incógnitas como parámetro y expresamos las restantes en función de dicho parámetro.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3y+z=-2x \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=-2x+3y=-2x+9x=7x \\ y=3x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=7x \\ y=3x \end{cases}$$

Solución: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:E3-E1]{E2:E2-2E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow[E3:6E2+E3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2+2-3=1 \\ y=7-9=-2 \\ z=3 \end{cases} \rightarrow \text{Solución:}(1, -2, 3)$$

3 SISTEMAS DE CRAMER. REGLA DE CRAMER

- *Definición*: Se llaman ***sistemas de Cramer*** aquellos sistemas de ecuaciones lineales que cumplen las siguientes condiciones:

  a) Tiene el mismo nº de ecuaciones que de incógnitas: m = n

  b) El determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es no nulo: $|A| \neq 0$

Regla de Cramer

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados y su solución única viene dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

donde

- A_i es la matriz que se obtiene a partir de la matriz de los coeficientes, cambiando la columna i por la columna de los términos independientes
- A es la matriz formada por los coeficientes.

Consideramos en forma matricial: $A \cdot X = B$, tal que $|A| \neq 0$:

Multiplicando los dos miembros de la ecuación matricial por la izquierda por A^{-1}, queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \Rightarrow\ X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si desarrollamos este producto, obtenemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ;\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ ;\ \ldots\ldots \ ;\ x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Observación:

Si $|A| = 0$ se tiene que alguna ecuación es combinación lineal de las otras (i.e. esa ecuación "sobra"); por lo tanto, basta con detectar dicha ecuación, eliminarla.

Para poder aplicar la regla de Cramer al sistema, se pasa una de las incógnitas como parámetro al otro miembro. Para ello, tenemos que comprobar que el nuevo sistema es efectivamente tipo Cramer, es decir, $|A| \neq 0$.

Ejemplos

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-3y+3z=-2 \\ 2x+y-z=6 \\ 3x+2y+2z=6 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=14\neq 0 \rightarrow$$ Es un sistema de Cramer. La solución del sistema es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{28}{14}=2 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{14}{14}=1 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-14}{14}=-1$$

2. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+z=4 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow$$ Es un sistema de Cramer. La solución del sistema es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4}{4}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8}{4}=2 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{12}{4}=3$$

3. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ 2x-y+z=5 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad (E_2=E_1+E_3) \rightarrow$$ Suprimiendo dicha ecuación, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y=3-2z \\ x+y=z \end{cases} \rightarrow |C|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3-2z & -2 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{|C|}=\frac{-3+4z}{3} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{|C|}=\frac{5z-6}{3}$$

Es sistema es compatible indeterminado. La solución es: $\left(-1+\frac{4}{3}z, \frac{5}{3}z-2, z\right) \quad z\in\mathbb{R}$

4 DISCUSIÓN DE SISTEMAS. TEOREMA DE ROUCHE - FRÖBENIUS

La regla de Cramer no es aplicable en el caso de que el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea cero, ni tampoco en el caso de que el número de ecuaciones sea distinto del número de incógnitas.

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ matriz de los coeficientes} \quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ matriz ampliada}$$

Se verifica el siguiente ***teorema de Rouché-Fröbenius***:

"Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución (es compatible) si, y sólo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada, A*".

Un sistema es compatible $\Leftrightarrow$ rg (A) = rg (A*).

Clasificación y discusión del sistema según el teorema de Rouché

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sea rg(A) = r ≤ n

1) Si rg (A) ≠ rg(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.

2) Si rg (A) = rg(A*), el sistema es compatible y tiene solución.

a) rg (A) = rg (A*) = r = n (nº de incógnitas), el sistema es compatible determinado.

Su única solución se puede determinar mediante la regla de Cramer.

b) Si rg(A) = rg(A*) = r < n, el sistema es compatible indeterminado.

El sistema tiene infinitas soluciones que se determinan de la siguiente manera:

- Consideramos las r ecuaciones que forman parte del menor, las restantes se suprimen del sistema.
- Consideramos las r incógnitas que intervienen en el menor como incógnitas principales. Las restantes n – r incógnitas se consideran como parámetros que junto con el término independiente forman el nuevo término independiente.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right\} \text{Nº de parámetros = nº incógnitas – rg A}$$

Las soluciones de las r incógnitas principales quedan expresadas en función de los n – r parámetros, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones

Ejemplos

1) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z=2 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

rg A = rg A* = 2 ya que F3 = F1 + F2 ; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Es un sistema compatible indeterminado.

Consideramos del sistema las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte del menor y consideremos como incógnitas principales aquellas cuyos coeficientes aparecen en el menor:

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ x=2-z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{z-2}{-1}=2-z \qquad ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2-z-3+z}{-1}=1$$

Las infinitas soluciones del sistema son: x = 2 – z ; y = 1 ; z = z , es decir, $(2-\lambda,\ 1,\ \lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

2) Clasificar el siguiente sistema y resolver en caso de ser compatible:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x-3y-5z=-4 \end{cases}$$

Consideremos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right)$$

|A| = 0 ya que F3 + F2 + F1 = 0 → rg A = 2 , considerando que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2+3 \neq 0$

Estudiamos el rango de A*:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3+F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

Por tanto, el sistema es incompatible.

5 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS: MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Ya hemos visto dos procedimientos de resolución de sistemas: método de Gauss y la regla de Cramer.

El método de la matriz inversa consiste en expresar el sistema en forma matricial **A·X** = B y despejar la matriz X, siempre que exista su inversa, A^{-1}:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Ejemplos

1) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ x-3z=-18 \\ 2x-5y+3z=52 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -5-6-3+15=1$$

$$A^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Adj}\left(A^T\right)=\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}\left(A^T\right)=\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de los adjuntos de cada elemento de A^T:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-15 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-(3+5)=-8 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-(3+6)=-9 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3-2=-5 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-(3-1)=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=-5 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=-(5-2)=-3 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

Calculamos la matriz X, solución del sistema:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$ La solución del sistema es: x = 3, y = -5, z = 7

2) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x+2y+z=6 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=5 \rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}\left(A^T\right)=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución del sistema es: x = 1, y = 2, z = -1

6 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON PARÁMETROS

Recuerda que hay dos procedimientos para analizar el nº de soluciones del sistema:

- El teorema de Rouchè-Fröbenius.
- El método de Gauss.

Hay tres métodos de resolución de sistemas lineales compatibles:

- El método de Gauss.
- La regla de Cramer.
- Empleando la matriz inversa.

Ejemplos

1) Sea considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=a \\ (a-2)x+y+3z=0 \\ (a-1)y=1-a \end{array}\right\}$$

a) Estudie el sistema, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-1=5\neq 0 \;\rightarrow \text{rg } A \geq 2 \qquad |A| = (a-2)\cdot(a-1) = 0 \text{ si } a = 1,\ a = 2$$

Por tanto, rg A = 2 si a = 1, a = 2.

- Si $a = 1 \rightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ rg A* = 2 = rg A $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Tenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ -x+y+3z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ y+3z=x \end{array}\right\} \rightarrow y=\dfrac{3-x}{5};\ z=\dfrac{2x-1}{5}$

Solución: $(5\lambda, 3-\lambda, 2\lambda-1) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$

- Si $a = 2 \rightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ rg A* $\neq$ rg A $\rightarrow$ sistema incompatible.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-6-6+1=-11\neq 0 \;\rightarrow \text{rg } A^* = 3$$

- Si $a \neq 2$, $a \neq 1 \rightarrow$ rg A* = rg A = 3 $\rightarrow$ sistema compatible determinado.

2) Dado el número real a, se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-ay+z=a \\ ax-y+z=1 \\ -ax-y+z=a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema según los valores de a.

b) Resuelva el sistema para el caso a = 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F3=F2-F3} \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-1)=0 \rightarrow a = 1,\ a = 0$

- Si $a = 0 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ rg $A^* \neq$ rg $A \rightarrow$ sistema incompatible.

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ rg $A^* = 3$

- Si $a = 1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ rg A^* = rg $A \rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

- Si $a = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 4$ (sustituyendo a = 2)

  Aplicando el método de Gauss para resolver el sistema:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=-F1+F2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

  El sistema triangular equivalente que hemos obtenido es:

  $$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=2 \\ x+y=-1 \\ 4x=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{4}+z=2 \rightarrow z=\dfrac{3}{4} \\ y=-1+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4} \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

  Por tanto la solución del sistema es: $\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$

7 DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGÉNEOS

- *Definición*: Un sistema se llama ***homogéneo*** cuando todos los términos independientes son nulos.

Características:

- Siempre va a tener la solución (0,0,0), llamada solución trivial.
- Siempre rg (A) = rg(A*) ⟶ El sistema homogéneo nunca va a ser incompatible.
- Si |A| = 0 ⟶ El sistema es compatible indeterminado.
- Si |A| ≠ 0 ⟶ El sistema es compatible determinado, siendo a solución la trivial: $x_i = 0$

Ejemplos

Estudiar el sistema para los distintos valores del parámetro "a". Resolver en caso de ser compatible.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Al ser un sistema homogéneo el rang(A) = rang(A*), por tanto, admite la solución trivial (0, 0, 0)

|A| = (2a + 2 + 45) – (-5a + 3 – 12) = 7a + 56

|A| = 0 → 7a + 56 = 0 → a = – 8

Si a = – 8 → rang (A) = rang(A*) = 2 < nº incógnitas → S.C.I.

Si a ≠ – 8 → rang (A) = rang(A*) = 3 = nº incógnitas → S.C.D.

<u>Resolución para a = -8</u>:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2\leftrightarrow F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-5F1]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -19 & 7 \\ 0 & -38 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+8y-3z=0 \\ -19y+7z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x+8y=3z \\ 19y=7z \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x=3z-8y=3\lambda-\dfrac{56\lambda}{19}=\dfrac{\lambda}{19} \\ y=\dfrac{7\lambda}{19} \end{array}\right.$$

Solución: x = λ, y = 7λ, z = 19λ

EJERCICIOS

1. Resolución de sistemas lineales. Método de Gauss

1.1. Resolver los siguientes sistemas, aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \\ -x+3y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+5z=-1 \\ 3x+y=-2 \\ -x+3y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+5y=16 \\ x+3y-2z=-2 \\ x+z=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{cases}$

<u>*Soluciones*</u>: a) (2,1,-1) ; b) $\left(-1,1,-\frac{2}{5}\right)$; c) (3, -2, 0) ; d) (-1, 1, -2) ; e) (-2, 4, 6) ; f) $\left(\frac{3}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$; g) (-1, 1, 8) ; h) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

1.2. Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible:

a) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-4y+6z=2 \\ y+2z=-3 \\ x-3y+z=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=4 \\ -4x+3y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ x+y+5z=3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ x+2y-z=3 \\ -x+6y-3z=1 \end{cases}$

<u>*Soluciones*</u>: a) (4, 5, 2) ; b) $(-7\lambda-5,-3-2\lambda,\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, c) S.I.; d) $\left(\frac{9-7\lambda}{2},\frac{5-3\lambda}{2},\lambda\right)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$; e) $\left(\frac{3-2\lambda}{3},-\frac{\lambda}{3},\lambda\right)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

f) (4, 2, 5) ; g) S.I. ; h) $(2,\lambda,2\lambda-1)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

1.3. Discutir y resolver, en caso de ser compatible, los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 3x-y=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y+3z-14t=0 \\ 2x-2y+3z+t=0 \\ 3x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$

<u>*Soluciones*</u>: a) (0, 0, 0) ; b) $(\lambda,\lambda,-2\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, c) $(\lambda,3\lambda,7\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$; d) $(\lambda,\lambda,0,0)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

1.4. Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-y+w=7 \\ x-2y+z=2 \\ 3x+z=2 \\ 4x=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+z-3t=4 \\ x+3y-z+2t=2 \\ -3x+y-3z+8t=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+w=0 \\ x-2y+z=0 \\ 5x-y+z+w=0 \\ 5x-2y-z+2w=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-z+t=1 \\ x-y-t=2 \\ z-t=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+z=-1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y-z+t=4 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$

<u>*Soluciones*</u>: a) (1, -2, -1, 3) ; b) S.I, c) (0, 0, 0, 0), d) $\left(\frac{3+\lambda}{2},-\frac{1+\lambda}{2},\lambda,\lambda\right)\ \lambda\in\mathbb{R}$, e) (3,-2,1), f) $(3,-1-\lambda+\mu,\lambda,\mu)\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

2. Resolución de sistemas lineales. Regla de Cramer

2.1. Resolver los siguientes sistemas, aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 5x+2y+3z=4 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y+2z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ 3x+2y+2z=1 \\ -2x+3y+z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=7 \\ 2x+y-z=3 \\ y+z=3 \end{cases}$

Soluciones: a) (1, 1 , –1) b) :(1, –2, 3) ; c) (1, -3, 2) ; d) (5, -2, 5)

2.2. Discutir los siguientes sistemas y resolver en caso de ser compatible, aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x+y+2z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 2x-4y+2z=3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+z=-1 \\ x-y=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{cases}$

Soluciones: a) (-1 – 3λ, 4λ + 2, λ) ; b) (3λ – 4, λ , 7 – 5λ) ; c) S.I. d) (1+ λ, λ , –1 – λ)

2.3. Discutir y resolver, en caso de ser compatible, los siguientes sistemas homogéneos, empleando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 11x-y-3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+3z=0 \\ x-5y-9z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-2t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$

Soluciones: a) $(\lambda, 2\lambda, 3\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$; b) (0, 0, 0) , c) $(-\lambda, -2\lambda, \lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$; d) $(\lambda, -\lambda, 0, 2\lambda)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

3. Discusión y resolución de sistemas con un parámetro

3.1. Discute, en función del parámetro k, estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 4x+2y=k \\ x+y-z=2 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+2y=k \\ x+y-z=2 \\ kx+y+z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=k+2 \\ x-ky+z=1 \\ kx+y+z=4 \end{cases}$

Solución: a) k = 3 SCI, k ≠ 3, SCD b) k = 3 SI, k ≠ 3, SCD; c) k = 1 SI, k = -1 SCI, $k\neq 1, k\neq -1$ S.C.D

3.2. a) Discutir, según los distintos valores del parámetro m, el siguiente sistema.

b) Resolver en el caso de m = -2.

$$\begin{cases} (m-6)y+3z=0 \\ 2x+y-z=m-4 \\ (m+1)x+2y=3 \end{cases}$$

Solución: m = 5 SCI; m = -3 S.I., $m\neq 5, m\neq -3$ S.C.D. Para m = -2 solución: (-3, 0, 0)

3.3. Discutir, según los distintos valores del parámetro A, el siguiente sistema. Resolver el sistema para a = 8

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 7x-y+az=6 \end{cases}$$

Solución: a = 10 S.I; $a\neq 10$ S.C.D. Para a = 8 solución: $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$

3.4. Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -ax+y=1 \\ -x+ay-z=0 \\ x+y+az=1 \end{aligned}\right\}$$

a) Estudie su compatibilidad según los valores del número real *a*.

b) Resuélvalo cuando *a* = 0 si es posible.

<u>*Solución*</u>: a = -1 S.I; $a \neq -1$ S.C.D. Para a = 0 solución: (0, 1, 0)

3.5. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z=a \\ x+y+z=a \\ y+az=2 \end{aligned}\right\}$$

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores de a.

b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

<u>*Solución*</u>: a = 1 S.C.I; $a \neq 1$ S.C.D. b) solución: $(-1, 2-\lambda, \lambda)\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.6. Dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ 2x+y+mz=1 \\ 4x+y+m^2z=m \end{aligned}\right\}$$

a) Estudie su compatibilidad según los valores de m.

b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.

<u>*Solución*</u>: m = 1 S.C.I; m = 2 S.I. $m \neq 1$; $m \neq 2$ S.C.D. b) solución: $(0, 1-\lambda, \lambda)\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4. Resolución de problemas empleando la matriz inversa ($AX = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$)

4.1. Calcule los números *a*, *b* y *c* para que la curva de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ pase por los puntos (1,10), (-1,2) y (2,26). Demuestre que la curva es única. Escriba dicha curva.

<u>*Solución*</u>: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

4.2. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto A, 4 de B y 3 de C, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de A, 7 de B y 4 de C, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de A, 13 de B y 5 de C, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?

<u>*Solución*</u>: A=1.000, B=300 y C=800 €.

4.3. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel *A*, 20.000 a los de nivel *B* y 15.000 a los de nivel *C*. Teniendo en cuenta que para los de nivel *C* destina en total el doble que para los del *B*, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?

<u>*Solución*</u>: A=6, B=15 y C=30 empleados

4.4. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.

<u>*Solución*</u>*: 15, 18 y 40 años*

4.5. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos tés, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,50 €. ¿Qué cuesta cada bebida?

<u>*Solución*</u>: *café=1 €, refresco=1,50 €, té=0,90 €*

4.6. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

<u>*Solución*</u>*:Andrés=80 kg; Benjamín=93 kg; Carlos=72 kg*

5. Repasa

5.1. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Resuelve la ecuación det $(A - x \cdot I_3) = 0$. (1 punto)
b) Discuta el sistema homogéneo de matriz $A - x \cdot I_3$, según los valores del número real x. (0.75 puntos)
c) Resuélvalo en aquellos casos en que el sistema sea compatible determinado. (0.75 puntos)

5.2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuélvalo cuando a = 0. (1 punto)

5.3. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ ax + y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1 punto)
b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1.5 puntos)

5.4. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

5.5. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = 2 \\ x - y - z = a \end{array}\right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)
b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

5.6. Dado el número real ***m,*** se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. (0.75 puntos)
b) Para m = 2, halle, si existe, la inversa de A. (1 punto)
c) Para m = 2, calcule el vector X que verifique $A \cdot X = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (0,75 puntos)