

PAU.7.4. Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Obtenga los valores del número real a para los que A tiene matriz inversa.

b) Halle, si es posible, la matriz inversa de A en el caso $a = 0$.

a) La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a+1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 1) + 2(1 - a) - (a^2 - 1) - (a + 1)(1 - a) = a^3 - 3a + 2$$

$$|A| = 0 \rightarrow a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) = 0 \rightarrow a = -2, a = 1$$

Existe inversa si $\forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

b) Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

PAU.7.6. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resuelva, si es posible, la ecuación matricial $A \cdot X = B$

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 + 2 + 1 = 5 \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PAU.7.7. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Halle, si existe, la matriz inversa de M .

b) Calcule la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$.

a) $|M| = -2 - 2 + 1 + 4 = 1$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \text{Adj}(M)^t \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = M$$

b) $X \cdot M + M = 2M^2 \rightarrow X \cdot M = 2M^2 - M \rightarrow X = (2M^2 - M) \cdot M^{-1}$

Según el apartado anterior se verifica que $M^{-1} = M \rightarrow M^2 = M \cdot M = M \cdot M^{-1} = I$

Por tanto, se tiene que $X = (2I - M) \cdot M = 2M - M \cdot M = 2M - I$

$$2M - I = 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

5.2. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} (a-1)x + 2y + (a-1)z &= 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z &= 2 \\ x + y + az &= a \end{aligned} \right\}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvalo cuando a = 0. (1 punto)

SOLUCIÓN

a) $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 2 & a-1 & 1+a \\ 0 & a+1 & -a-1 & 2 \\ 1 & 1 & a & a \end{array} \right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a+1) - 2(a+1) - (a+1)(a-1) + (a+1)(a-1) = (a+1)(a^2 - a - 2) = 0$$

$$|A| = 0 \text{ si } (a+1)^2 \cdot (a-2) = 0 \rightarrow a = -1, a = 2$$

o Si $a = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \text{rang } A = 2; \text{ rang } A^* = 3 \rightarrow \text{S. I.}$

o Si $a = 2 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F3 = F3 - F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F2 = F2 + 3F3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \text{S. I.}$

o Si $a \neq -1, a \neq 2 \rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A^* = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.D.}$

b) Para $a = 0 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F3 = F3 + F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F3 = F3 - 3F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right)$

$$\left. \begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ y - z &= 2 \\ 2z &= -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - z - 1 \rightarrow x = -1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ y = z + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

5.4. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
 b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

SOLUCIÓN

$$\text{a) } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 1 + 1 - a - a - 1 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\text{Para } a = 1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A^* = 1 \rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{b) } x + y - z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z \rightarrow \text{Solución: } (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

5.5. Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + ay - z &= 1 + a \\ x + y - az &= 2 \\ x - y - z &= a \end{aligned} \right\}$$

- a) Estudia su compatibilidad según los valores de a . (1.5 puntos)
 b) Resuélvalo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

SOLUCIÓN

$$\text{a) } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1+a \\ 1 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{array} \right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - a^2 + 1 + a - a = 1 - a^2 = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

$$\circ \text{ Para } a = 1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A^* = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\circ \text{ Para } a = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \text{rang } A = 2; \text{rang } A^* = 3 \rightarrow \text{S.I.}$$

$$\text{b) } A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x + y &= 2 + z \\ x - y &= 1 + z \end{aligned} \right\} \rightarrow x = \frac{3}{2} + z; y = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Solución: } \left(\frac{3}{2} + \lambda, \frac{1}{2}, \lambda \right) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$