

INTERVALOS DE CONFIANZA Y TAMAÑO MUESTRAL

5. Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos

88 90 90 86 87 88 91 92 89

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

El intervalo de confianza para la población es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$, siendo \bar{x} la media muestral, σ la desviación típica, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza $1 - \alpha$.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{88 + 90 + 90 + 86 + 87 + 88 + 91 + 92 + 89}{9} = 89$

Por tanto, como $\sigma = 1,8$, $n = 9$ y $Z_{\alpha/2} = 1,96$, el intervalo de confianza será:

$$\left(89 - 1,96 \cdot \frac{1,8}{\sqrt{9}}, 89 + 1,96 \cdot \frac{1,8}{\sqrt{9}} \right) = (87,824, 90,176)$$

6. La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en mese):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso: $\bar{x} = \frac{33 + 34 + 26 + 37 + 30 + 39 + 26 + 31 + 36 + 19}{10} = 31,1$; $\sigma = 5$; el tamaño

muestral es $n = 10$; y $Z_{\alpha/2} = 1,96$.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(31,1 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}, 31,1 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \right) = (31,1 - 3,1, 31,1 + 3,1) = (28, 34,2)$$

7. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros.. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

(a) Hallar un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional..

(b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

Solución:

(a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 5$, $\sigma = 2$, $n = 10000$ y, para el 80 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,28$.

$$\begin{aligned} \left(5 - 1,28 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}}, 5 + 1,28 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}} \right) &= (5 - 0,0256, 5 + 0,0256) = \\ &= (4,9744, 5,0256) \end{aligned}$$

(b) El error admitido, E , viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, y $E < 0,25$ se tendrá:

$$1,96 \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} > 15,68 \Rightarrow n \geq 15,68^2 = 245,8$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 246 personas.

8. Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcular:

- (a) El intervalo de confianza para la recaudación media con un nivel de confianza del 99 %.
(b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria media menor de 127 euros.

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso $\bar{x} = 1248$, $\sigma = 328$, $n = 100$; y $Z_{\alpha/2} = 2,575$.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\begin{aligned} & \left(1248 - 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}, 1248 + 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}} \right) = \\ & = (1248 - 84,46, 1248 + 84,46) = (1163,54, 1332,46) \end{aligned}$$

b) El error admitido, E , viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En nuestro caso, para una confianza del 95 %, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, $\sigma = 328$ y $E < 127$, se tendrá:

$$1,96 \frac{328}{\sqrt{n}} < 127 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1,96 \cdot 328}{127} = 5,06 \Rightarrow n > 25,6$$

El tamaño muestral debe ser 26 o más comercios.

9. Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancias, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x} = 8,1$ días; $s = 9$ días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica s es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$, siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 8,1$, $s = 9$, $n = 800$ y, para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, se tiene:

$$\left(100 - 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}, 100 + 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} \right) = (8,1 - 0,6, 8,1 + 0,6) = (7,5, 8,7)$$

La estancia media está entre 7,5 y 8,7 días.

10. Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia que la variable “inteligencia de todos los estudiantes” es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de 0,99?

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica s es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 100$, $s = 10$, $n = 25$ y, para el 99 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2,58$, se tiene:

$$\left(100 - 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}, 100 + 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}} \right) = (100 - 5,16, 100 + 5,16) = (94,84, 105,16)$$

La inteligencia media estará entre 94,84 y 105,16 puntos.

11. Una muestra aleatoria de tamaño 100, extraída de una población normal de varianza 81, presenta una media muestral igual a 150.

- i) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional. (3 puntos)
- ii) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional y compararlo con el anterior. (4 puntos)
- iii) Si se quiere tener una confianza del 95 % de que su estimación se encuentra a una distancia máxima de 1,2 de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse? (3 puntos)

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

i) Para $\bar{x} = 150$, $\sigma^2 = 81 \Rightarrow \sigma = 9$, $n = 100$ y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,645$, se tendrá:

$$\left(150 - 1,645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}, 150 + 1,645 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} \right) = (148,52, 151,48)$$

ii) Para una confianza del 95 %, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(150 - 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}, 150 + 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} \right) = (148,24, 151,76)$$

El intervalo se hace más amplio, pues si se desea más confianza (más seguridad de acierto sin variar el tamaño muestral), debe precisarse menos.

iii) La distancia máxima, el error máximo admitido, viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2} = 1,96$; si desea que la distancia máxima sea menor que 1,2, $E < 1,2$, se tendrá:

$$1,96 \frac{9}{\sqrt{n}} < 1,2 \Rightarrow \sqrt{n} > 14,7 \Rightarrow n > 216$$

El valor mínimo de n debe ser de 217; por tanto, deben tomarse 117 elementos más.

12. Un agricultor quiere estimar el peso medio de las naranjas que produce, con un error menor de 10 g, empleando una muestra de 81 naranjas. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 36 g, ¿cuál será el máximo nivel de confianza con que realizará la estimación?

Solución:

El error admitido viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, n

el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, $E < 10$, $n = 81$ y $\sigma = 36$, siendo α desconocida.

Se tiene:

$$Z_{\alpha/2} \frac{36}{\sqrt{81}} < 10 \Rightarrow Z_{\alpha/2} < \frac{10 \cdot 9}{36} = 2,5$$

Para $Z_{\alpha/2} < 2,5$, se tiene que $1 - \alpha/2 < 0,9938 \Rightarrow \alpha < 0,0124 \Rightarrow 1 - \alpha < 0,9876$. Por tanto, la confianza máxima es del 98,76 %.

13. En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.

a) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con un 97 % de confianza, para la media de la población.

b) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1.

Solución:

a) El intervalo de confianza, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} , es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde σ es la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso: $\bar{x} = 50$, $\sigma = 2$, $Z_{\alpha/2} = 2,17$ y $n = 400$. El intervalo será:

$$\left(50 - 2,17 \frac{2}{\sqrt{400}}, 50 + 2,17 \frac{2}{\sqrt{400}} \right) = (49,783, 50,217)$$

b) La amplitud del intervalo es $2 \cdot Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si se quiere que sea menor que 1:

$$2,17 \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{n} > 4 \cdot 2,17 = 8,68 \Rightarrow n > 75,34.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser 76.

14. Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66, 8,34). Calcule la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explique cada uno de los pasos realizados.

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso se sabe que $\sigma = 3$ y $Z_{\alpha/2} = 1,96$ (95 % de confianza: $1 - \alpha = 0,95$).

Por tanto:

$$\left(\bar{x} - 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = (6,66, 8,34)$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } \begin{cases} \bar{x} - 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 6,66 \\ \bar{x} + 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 8,34 \end{cases} &\Rightarrow 6,66 + 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 8,34 - 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,96 \frac{3}{\sqrt{n}} = 0,84 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 3}{0,84} = 7 \Rightarrow n = 49 \end{aligned}$$

$$\text{Si } n = 49, \text{ como } \bar{x} - 1,96 \frac{3}{\sqrt{49}} = 6,66 \Rightarrow \bar{x} = 7,5$$

NOTA: La media se podría haber calculado sin conocer n , pues al ser el intervalo de confianza simétrico respecto de la media, esta es la media aritmética de los extremos de ese

$$\text{intervalo: } \bar{x} = \frac{6,66 + 8,34}{2} = 7,5.$$

15. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros:

a) Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n y de media \bar{x} , es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 1480$, $\sigma = 250$, $n = 625$ y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,645$, este intervalo es:

$$\begin{aligned} & \left(1480 - 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}}, 1480 + 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} \right) = \\ & = (1480 - 16,45, 1480 + 16,45) = (1463,55, 1496,45) \end{aligned}$$

b) El error viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si se desea que sea menor que 10, para el 99 % ($Z_{\alpha/2} = 2,575$) y $\sigma = 250$, se tendrá:

$$2,575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} < 10 \Rightarrow n > (2,575 \cdot 25)^2 = 4144,14$$

El tamaño mínimo de $n = 4145$.

16. De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %

Solución:

La proporción de la muestra es $\hat{p} = \frac{630}{2100} = 0,30$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right)$$

siendo \hat{p} la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$; n , el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para el 99 % de confianza (significación 0,01), $Z_{\alpha/2} = 2,575$; $\hat{p} = 0,30$, $\hat{q} = 0,70$, y $n = 2100$. Luego, el intervalo de confianza será:

$$\begin{aligned} & \left(0,30 - 2,575 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}}, 0,30 + 2,575 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}} \right) = \\ & = (0,30 - 0,02575, 0,30 + 0,02575) \approx (0,274, 0,326) \end{aligned}$$

NOTA: Si se desea ser más exigente, los parámetros p y q podrían suponerse iguales, $p = q = 0,50$. Así se obtendría:

$$\left(0,30 - 2,575 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}}, 0,30 + 2,575 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}} \right) \approx (0,272, 0,328)$$

17. En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas, se pide:

a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?.

b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?

Justificar las respuestas.

Solución:

El tamaño muestral fue de $1250 \cdot 0,20 = 250$ familias.

La proporción de familias con gas natural en la muestra es $\frac{75}{250} = 0,30$, el 30 %.

a) Puede afirmarse que el porcentaje de familias con gas natural es del 30 %.

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$, siendo:

p la proporción de familias con gas natural y $q = 1 - p \rightarrow p = 0,30$, $q = 0,70$

n el tamaño muestral $\rightarrow n = 250$

$Z_{\alpha/2}$ el valor de la variable normal correspondiente a una confianza $1 - \alpha \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

Por tanto, $E = 1,96 \sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{250}} = 1,96 \cdot 0,029 = 0,057$

Se puede cometer un error máximo del 5,7 %. Esto es, el porcentaje de familias con gas natural pertenece al intervalo $(30 - 5,7, 30 + 5,7)$: estará entre el 24,3 % y el 35,7 %

Si somos más exigentes y suponemos que al desconocer la proporción de la población hay que tomar $p = q = 0,5$, el error que se asume es,

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{250}} = 1,96 \cdot 0,0316 \approx 0,062$$

Cometeríamos un error máximo del 6,2 %.

18. En cierta cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el departamento de ventas, 200 en el departamento de contabilidad y 100 en el departamento de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

Justificar las respuestas

Solución:

a) Podría hacerse un muestreo aleatorio estratificado, eligiendo de cada grupo de trabajadores un número proporcional a su tamaño.

b) Hay que repartir proporcionalmente 180 entre 150, 450, 200 y 100, que son el número de trabajadores de los departamentos de personal, ventas, contabilidad y atención al cliente, respectivamente.

El total, el número de trabajadores de la empresa es 900; como el tamaño muestral es 180 habrá que elegir 1 trabajador de cada 5. Por tanto, se elegirán:

30 del departamento de personal

90 del departamento de ventas

40 del departamento de contabilidad y

20 del departamento de atención al cliente.