Ejercicio nº 1.-

En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.

a) Describe los sucesos, escribiendo todos sus elementos.
   i. A = "Obtener par"   B = "Obtener impar"
   ii. C = "Obtener primo"   D = "Obtener impar menor que 9"

b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?

c) ¿Cuál es el suceso $A \cup B$? ¿y $C \cap D$?

Solución:

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}
   B = {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
   C = {2, 3, 5, 7, 11, 13}
   D = {3, 5, 7}

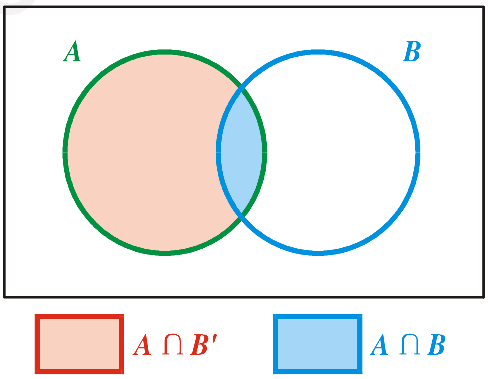
b) $B = \overline{A}$; $D \subset C$

c) $A \cup B = \Omega$ (Espacio muestral); $C \cap D = D$

Ejercicio nº 2.-

Sabiendo que: $P[A \cap B] = 0,2$; $P[\overline{B}] = 0,7$; $P[A \cap \overline{B}] = 0,5$
Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A]$.

Solución:



$P[A] = P[A \cap \overline{B}] + P[A \cap B] = 0,5 + 0,2 = 0,7$
$P[B] = 1 - P[\overline{B}] = 1 - 0,7 = 0,3$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,7 + 0,3 - 0,2 = 0,8$

Ejercicio nº 3.-

Sabiendo que: $P[A] = 0,5$; $P[\overline{B}] = 0,6$; $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 0,25$

a) ¿Son A y B sucesos independientes?
b) Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A / B]$.

Solución:

a)
$P[\overline{B}] = 1 - P[B] = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad P[B] = 0{,}4$
$P[\overline{A} \cap \overline{B}] = P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] = 0{,}25 \quad \rightarrow P[A \cup B] = 0{,}75$
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad \rightarrow \quad 0{,}75 = 0{,}5 + 0{,}4 - P[A \cap B] \;\rightarrow\; P[A \cap B] = 0{,}15$
Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} P[A]\cdot P[B] = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 \\ P[A \cap B] = 0{,}15 \end{array}\right\} P[A \cap B] \neq P[A]\cdot P[B]$$

Luego, A y B no son independientes.

b) Hemos obtenido en el apartado anterior que: $P[A \cup B] = 0{,}75$
Por otra parte:

$$P[A / B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375$$

Ejercicio nº 4.-

En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Solución:

Tenemos que hallar la probabilidad de que ocurra el siguiente suceso:
A = "el opositor conoce, al menos, uno de los tres temas"
Para calcularla, utilizaremos el complementario. Si sabe 35 temas, hay 85 - 35 = 50 temas que no sabe; entonces:
$P[A] = 1 - P[\overline{A}] = 1 - P$ ["no sabe ninguno de los tres"] =

$$= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} = 1 - 0{,}198 = 0{,}802$$

Por tanto, la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas es de 0,802.

Ejercicio nº 5.-

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que vio el debate?
c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?

Solución:

Organizamos la información en una tabla de doble entrada, completando los datos que faltan:

	DEBATE	NO DEBATE	
PELÍCULA	1 450	650	2 100
NO PELÍCULA	50	350	400
	1 500	1 000	2 500

Llamamos D = "Vio el debate" y P = "Vio la película".

a) $P[D \cap P] = \frac{1\,450}{2\,500} = \frac{29}{50} = 0{,}58$

b) $P[P/D] = \frac{1\,450}{1\,500} = \frac{29}{30} = 0{,}97$

c) $P[D/P] = \frac{1\,450}{2\,100} = \frac{29}{42} = 0{,}69$

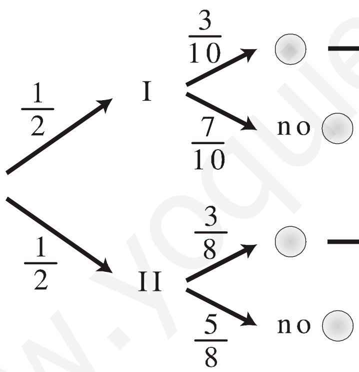
Ejercicio nº 6.-

Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna?

Solución:

Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$

$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

a) $P[B] = \frac{3}{20} + \frac{3}{16} = \frac{27}{80}$

b) $P[\text{I}/B] = \frac{P[\text{I y } B]}{P[B]} = \frac{3/20}{27/80} = \frac{4}{9}$

Ejercicio nº 7.-

De una bolsa que tiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, se extrae una bola al azar.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) Describe los sucesos, escribiendo todos sus elementos:

A = "Mayor que 6" B = "No obtener 6" C = "Menor que 6"

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $\overline{B} \cap \overline{A}$.

Solución:

a) $E = \{\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ \}$

b) $A = \{ 7, 8, 9 \}$ $\quad B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 \}$ $\quad C = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$$\left.\begin{array}{l} c)\ A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,7,8,9\}=B \\ A\cap B=\{7,8,9\}=A \\ \overline{B}\cap\overline{A}=\{6\}=B \end{array}\right\} \text{pues } A\subset B$$

Ejercicio nº 8.-

Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad tales que:

$$P[A'] = 0,6 \qquad P[B] = 0,3 \qquad P[A' \cup B'] = 0,9$$

a) ¿Son independientes A y B?
b) Calcula $P[A' / B]$.

Solución:

a) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 0,9 \quad \rightarrow \quad P[A \cap B] = 0,1$

$P[A'] = 1 - P[A] = 0,6 \quad \rightarrow \quad P[A] = 0,4$

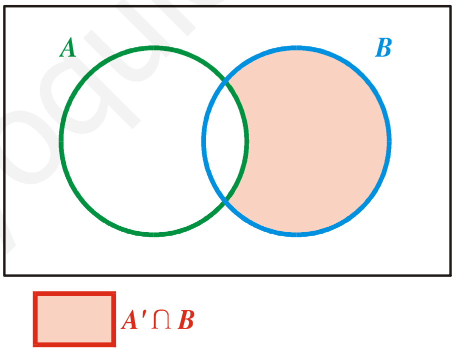
$$\left.\begin{array}{l} P[A]\cdot P[B] = 0,4\cdot 0,3 = 0,12 \\ P[A\cap B] = 0,1 \end{array}\right\} P[A\cap B]\neq P[A]\cdot P[B]$$

Por tanto, A y B no son independientes.

b) Como:

$$P[A'/B]=\frac{P[A'\cap B]}{P[B]}$$

necesitamos calcular $P[A' \cap B]$:



$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = 0,3 - 0,1 = 0,2$

Por tanto:

$$P[A'/B]=\frac{P[A'\cap B]}{P[B]}=\frac{0,2}{0,3}=0,67$$

Ejercicio nº 9.-

En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos.
Elegimos al azar un alumno de esa clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?

b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?

c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

Solución:

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	APRUEBAN MATEMÁTICAS	NO APRUEBAN MATEMÁTICAS	
APRUEBAN INGLÉS	10	6	16
NO APRUEBAN INGLES	8	6	14
	18	12	30

Llamamos M = "Aprueba matemáticas", I = "Aprueba inglés".

a) $P[M \cap I] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,33$

b) $P[I / M] = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,56$

c) $P[M] \cdot P[I] = \frac{18}{30} \cdot \frac{16}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$

$P[M \cap I] = \frac{1}{3} \neq \frac{8}{25}$

como $P[M \cap I] \neq P[M] \cdot P[I]$, los dos sucesos son NO son independientes

Ejercicio nº 10.-

Extraemos dos cartas de una baraja española y vemos de qué palo son.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuántos elementos tiene?

b) Describe los sucesos, escribiendo todos sus elementos:

A = "Las cartas son de distinto palo"

B = "Al menos una carta es de oros"

C = "Ninguna de las cartas es de espadas"

c) Halla los sucesos $B \cup C$ y $B' \cap C$.

Solución:

a) E = { (O,O), (O,C), (O,Es), (O,B), (C,O), (C,C), (C,Es), (C,B), (Es,O), (Es,C), (Es,Es), (Es,B), (B,O), (B,C), (B,Es), (B,B) }

Donde O representa oros; C, Copas; Es, espadas y B, bastos.

Tiene 16 elementos.

b) A = { (O,C), (O,Es), (O,B), (C,O), (C,Es), (C,B), (Es,O), (Es,C), (Es,B), (B,O), (B,C), (B,Es) }

B = { (O,O), (O,C), (O,Es), (O,B), (C,O), (Es,O), (B,O) }

C = { (O,O), (O,C), (O,B), (C,O), (C,C), (C,B), (B,O), (B,C), (B,B) }

c) $B \cup C$ = { (O,O), (O,C), (O,Es), (O,B), (C,O), (C,C), (C,B), (Es,O), (B,O), (B,C), (B,B) }

$B' \cap C$ = { (C,C), (C,B), (B,C), (B,B) }

Ejercicio nº 11.-

De dos sucesos, A y B, sabemos que: $P[A' \cap B'] = 0$ $\quad P[A' \cup B'] = 0{,}5$ $\quad P[A'] = 0{,}4$
Calcula $P[B]$ y $P[A \cap B]$.

Solución:

$P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 0 \;\rightarrow\; P[A \cup B] = 1$
$P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 0{,}5 \;\rightarrow\; P[A \cap B] = 0{,}5$
$P[A'] = 1 - P[A] = 0{,}4 \;\rightarrow P[A] = 0{,}6$
Así:
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \;\rightarrow\; 1 = 0{,}6 + P[B] - 0{,}5 \;\rightarrow\; P[B] = 0{,}9$

Ejercicio nº 12.-

De dos sucesos A y B sabemos que: $P[A'] = 0{,}48$ $\quad P[A \cup B] = 0{,}82$ $\quad P[B] = 0{,}42$

a) ¿Son A y B independientes?
b) ¿Cuánto vale $P[A / B]$?

Solución:

a) $P[A'] = 1 - P[A] = 0{,}48 \;\rightarrow\; P[A] = 0{,}52$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \rightarrow 0{,}82 = 0{,}52 + 0{,}42 - P[A \cap B] \;\rightarrow\; P[A \cap B] = 0{,}12$

$$\left.\begin{array}{l} P[A]\cdot P[B] = 0{,}52 \cdot 0{,}42 = 0{,}2184 \\ P[A \cap B] = 0{,}12 \end{array}\right\} P[A \cap B] \neq P[A]\cdot P[B]$$

No son independientes.

b) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}12}{0{,}42} = 0{,}29$

Ejercicio nº 13.-

Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcula la probabilidad de que sean:

a) Las dos de oros.
b) Una de copas u otra de oros.
c) Al menos una de oros.
d) La primera de copas y la segunda de oro.

Solución:

a) $P = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{3}{52} = 0{,}058$

b) $P = 2 \cdot \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{5}{39} = 0{,}128$

c) $P = 1 - P[\text{NINGUNA DE OROS}] = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = 1 - \dfrac{29}{52} = \dfrac{23}{52} = 0{,}442$

d) $P = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{5}{78} = 0{,}064$

Ejercicio nº 14.-

En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos.

Elegimos al azar un alumno de esa clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?
b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?
c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

Solución:

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	APRUEBAN MATEMÁTICAS	NO APRUEBAN MATEMÁTICAS	
APRUEBAN INGLÉS	10	6	16
NO APRUEBAN INGLES	8	6	14
	18	12	30

Llamamos M = "Aprueba matemáticas", I = "Aprueba inglés".

a) $P[M \cap I] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,33$

b) $P[I/M] = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,56$

c) $P[M] \cdot P[I] = \frac{18}{30} \cdot \frac{16}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$

$P[M \cap I] = \frac{1}{3} \neq \frac{8}{25}$

Como $P[M \cap I] \neq P[M] \cdot P[I]$, los dos sucesos no son independientes.

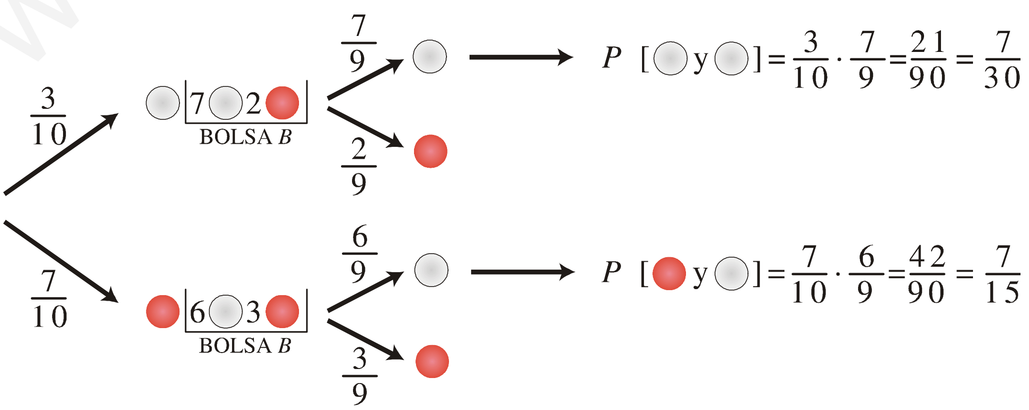
Ejercicio nº 15.-

Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2.rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?

Solución:

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[2^{a}\ \ Bl] = \frac{7}{30} + \frac{7}{15} = \frac{7}{10}$ b) $P[Bl\ \ y\ \ Bl] = \frac{7}{30}$

Ejercicio nº 16

Tiramos dos dados y nos fijamos en la suma de los resultados. Calcular:

a) la probabilidad de que sea un 3
b) la probabilidad de que sea un número múltiplo de 3

Solución:

Primero construyamos el espacio muestral, veamos todas las posibilidades que hay al tirar dos dados y sumamos los resultados:

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) Al tirar dos dados, solo pueden sumar 3 en los siguientes casos: (1,2); (2,1). Así pues, P("la suma sea 3") = P(S=3) = 2/36 = 1/18
b) Al tirar dos dados, que la suma sea un multipo de 3 se da en los siguientes casos: (1,2); (2,1); (1,5); (5,1); (2,4); (4,2); (3,3); (3,6); (6,3); (4,5); (5,4); (6,6). Así pues, P("la suma sea mult. de 3") = P(S=mult. de 3) = 12/36 = 1/3

Ejercicio nº 17

Una variable aleatoria discreta X toma valores x_i =1,2,…6 con función de probabilidad P(X)=1/6. Calcúlese:

a) $P(2 < X \leq 4)$
b) $P(2 \leq X \leq 4)$
c) $P(3 < X \leq 4{,}3)$

utilizando la función de probabilidad y la función de distribución.

Solución:

La función de probabilidad es:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

La función de distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

a)

$$P(2 < X \le 4) = P(3 \le X \le 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(2 < X \le 4) = F(4) - F(2) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b)

$$P(2 \le X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \le X \le 4) = P(X = 2) + P(2 < X \le 4) = P(X = 2) + F(4) - F(2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

c)

$$P(3 < X \le 4{,}3) = P(3 < X \le 4) + P(4 < X \le 4{,}3) = P(X = 4) + P(4 < X \le 4{,}3) = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$$

Ejercicio nº 17

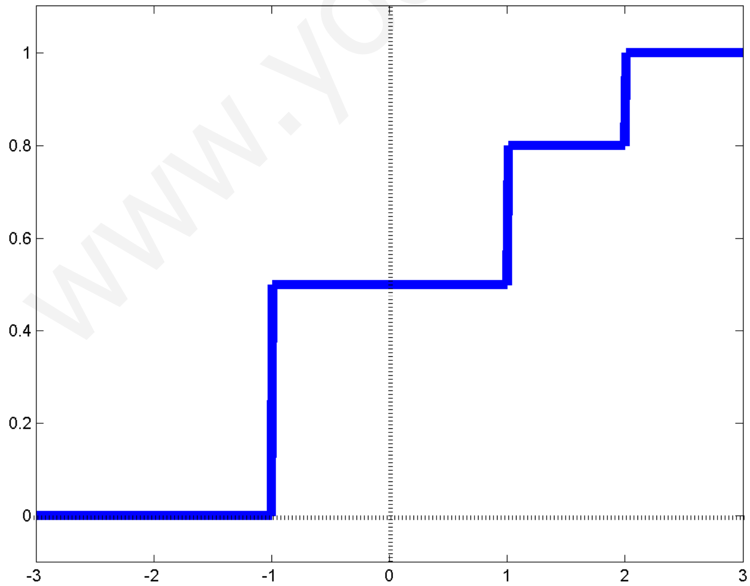
Sea la variable aleatoria X definida por la función de distribución:

$$F(x)\begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0{,}5 & -1 \le x < 1 \\ 0{,}8 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente *F(x)*
b) Determínese la función de probabilidad de esta variable aleatoria

Solución:

a)



b)

$P(X=-1)=0{,}5-0=0{,}5$
$P(X=1)=0{,}8-0{,}5=0{,}3$
$P(X=2)=1-0{,}8=0{,}2$

Ejercicio nº 18

Dada la función $g(x)=e^{-2x}$

a) Compruébese si puede ser función de densidad de una variable aleatoria X cuando su campo de variación es el intervalo $x\geq 0$.

b) En caso de que no lo pueda ser, qué modificaciones habría que introducir para que lo fuera.

Solución:

a) Para que sea función de densidad, debe cumplir dos condiciones en el campo de variación de la variable aleatoria: no ser negativa, y que su integral en el campo de variación sea 1.

Primera condición: $e^{-2x}\geq 0$. Tomando neperianos $-2x>-\infty \quad \textit{luego} \quad x<\infty$. Se cumple.

Segunda condición: $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}\neq 1$. No se cumple, luego la función dada no es de densidad en ese intervalo.

b) Para que lo sea:

$$k\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=k\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}=\frac{k}{2}=1 \quad \textit{Entonces } k=2$$

La función $2e^{-2x}$ sí es función de densidad para $x\geq 0$.

Ejercicio nº 19

Dada la variable aleatoria continua X, con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+2) & 0\leq x\leq 4 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Hallar:

a) El valor de k para que sea realmente una función de densidad.
b) La función de distribución.
c) La media.
d) La varianza.
e) $P(2\leq X\leq 3)$

Solución:

a) $\int_0^4 k(x+2)dx=1$

$$k\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=1 \qquad 16k=1 \qquad k=\frac{1}{16}$$

b) Entre 0 y 4 $F(x)=\int \frac{1}{16}(x+2)dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]=\frac{x^2+4x}{32}$

Luego: $F(x)=\begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ \dfrac{x^2+4x}{32} & si\ 0\le x\le 4 \\ 1 & si\ x\ge 4 \end{cases}$

c) $E(x)=\int xf(x)dx$

$$E(x)=\int_0^4 \frac{1}{16}(x+2)xdx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^4=\frac{1}{16}\left[\frac{64}{3}+16\right]=\frac{1}{16}\cdot\frac{112}{3}=\frac{7}{3}$$

d) $\mathrm{var}(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$

$$E(X^2)=\int x^2f(x)dx=\int_0^4 \frac{1}{16}(x+2)x^2dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=\frac{1}{16}\left[64+\frac{128}{3}\right]=\frac{20}{3}$$

$$\mathrm{var}(X)=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

e) $P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\frac{9+12}{32}-\frac{4+8}{32}=\frac{9}{32}$

Ejercicio nº 20

El flujo de demanda de teléfonos móviles (en miles a la hora) de una determinada fábrica, se ajusta a una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x)\begin{cases}(k-x) & 0\le x\le 1 \\ \\ 0 & resto\end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar k, para que f(x) sea efectivamente una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución F(x).
c) Hallar la esperanza y la varianza de x.
d) Si la fábrica sólo puede producir 750 como máximo en una hora, calcular la probabilidad de que haya un exceso de demanda.

Solución:

a) $\int_0^1 (k-x)dx = 1$

$$\left[kx - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 \qquad k - \frac{1}{2} = 1 \qquad k = \frac{3}{2}$$

b) Entre 0 y 1 $F(x) = \int \left(\frac{3}{2} - x\right)dx = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}$

Luego: $F(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} & si\ 0 \le x \le 1 \\ 1 & si\ x \ge 1 \end{array}\right\}$

c) $E(x) = \int x f(x) dx$

$$E(x) = \int_0^1 \left[\frac{3}{2} - x\right] x dx = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\text{var}(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{3x^2}{2} - x^3\right] dx = \left[\frac{3x^3}{6} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$\text{var}(X) = \frac{3}{12} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

Ejercicio nº 21

La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x) = \left\{\begin{array}{cc} ax^2 + b & si\ x \in (0,2) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{array}\right\}$$

Sabiendo que P($\frac{1}{2} < x < 1) = 0.1357$, determinar a y b

Solución:

Por ser función de densidad: $1 = \int_0^2 (ax^2 + b) = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + b[x]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b$

Por otro lado: $0{,}1357 = P(0{,}5 < x < 1) = \int_{0,5}^{1} (ax^2 + b)dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,5}^{1} + b[x]_{0,5}^{1} = \frac{7}{24}a + \frac{b}{2}$

Luego:

$$8a + 6b = 3$$
$$7a + 12b = 3{,}2568$$

$$a = 0{,}3048 \qquad b = 0{,}0936$$

Ejercicio nº 22.-

El tiempo de reparación en horas de cierta pieza es una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \left(x/5\right)^2 & si\ 0 \le x < 5 \\ 1 & si\ x \ge 5 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria X para cualquier valor de x, el tiempo medio que lleva la reparación de una pieza y su desviación típica.

Solución:

Derivando la función de distribución: $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{2x}{25} \quad 0 \le x < 5$

$$E(X) = \int_0^5 \frac{2x^2}{25}dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{10}{3}$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$E(X^2) = \int_0^5 \frac{2x^3}{25}dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^5 = \frac{25}{2}$$

$$\text{var}(X) = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18} \qquad DT(X) = \sqrt{\frac{25}{18}} = 1{,}1785$$

Ejercicio nº 23.-

Sean las variables aleatorias X,Y, Z tales que:

X=3Y+2Z — Var (Y) = Var (Z) = 1

E(Y)= 2 — Cov (Y,Z) = -0,5

E(Z)= -3

Decidir si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

a) E(X) = 7
b) Var (X) = 7
c) Cov (X, Y) = 2
d) ρ (X,Y) = -1

Solución:

a) Falso. $E(X) = E(3Y + 2Z) = 3E(Y) + 2E(Z) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$
b) Verdadero. $\text{var}(X) = 9\,\text{var}(Y) + 4\,\text{var}(Z) + 2\,\text{cov}(3Y, 2Z) = 9 + 4 - 6 = 7$
c) Verdadero.
$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - E[Y(3Y + 2Z)] = E(3Y^2) + 2E(YZ)$ porque $E(X) = 0$

$\text{var}(Y) = 1 = E(Y^2) - E(Y)^2 \qquad E(Y^2) = 1 + E(Y)^2 = 1 + 2^2 = 5$
$\text{cov}(Y, Z) = -0{,}5 = E(YZ) - E(Y)E(Z) \qquad E(YZ) = -0{,}5 + E(Y)E(Z) = -0{,}5 + 2(-3) = -6{,}5$

Entonces, $\text{cov}(X, Y) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-6{,}5) = 15 - 13 = 2$

d) Falso $\rho(X, Y) = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\,\text{var}(Y)}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

Ejercicio nº 24.-

Lanzamos tres dados y anotamos el número de cincos que obtenemos.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a) Los posibles valores de x_i son 0, 1, 2, 3. La tabla de la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216} = 0{,}58$	$\frac{75}{216} = 0{,}35$	$\frac{15}{216} = 0{,}07$	$\frac{1}{216} = 0{,}005$

Por ejemplo, P(x_i = 1) = P("salga un 5") = P("salga 5 en el primer dado O 5 en el 2º O 5 en el tercer dado") = (1/6 ·5/6 · 5/6) + (5/6 ·1/6 · 5/6) + (5/6 ·5/6 · 1/6) = 3· (1/6 ·5/6 · 5/6) = 3·(25/216) = 75/216
Esta tabla también se puede confeccionar dándonos cuenta de que se trata de una experiencia dicotómica ("lanzar un dado y salir 5 o no") realizada 3 veces, n=3, siendo la probabilidad de éxito, p=1/6 ("Salir 5"), se trata pues de una B(3,1/6) y entonces P(x_i=1)=$\binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6}^1 \cdot \frac{5}{6}^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{75}{216}$

b) $\mu = \Sigma\, p_i x_i = \dfrac{108}{216} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \mu = 0{,}5$

$$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{144}{216} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}65 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0{,}65$$

Ejercicio nº 25.-

Para cada una de las siguientes situaciones, indica si sigue una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica en ella los valores de n y p:

a) Lanzamos cien veces un dado y nos preguntamos por el número de unos que obtenemos.
b) Extraemos una carta de una baraja y vemos si es un as o no. Sin devolverla al mazo, extraemos otra y también miramos si se trata de un as o no, ... y así sucesivamente hasta diez veces.

Solución:

a) Es una distribución binomial con n=100, p=1/6 → B(100, 1/6)
b) No es una binomial, pues la probabilidad de obtener as para la segunda carta es distinta que para la primera (al ser sin reemplazamiento las extracciones).

Ejercicio nº 26.-

El 65% de los alumnos de un cierto instituto cursan estudios universitarios al terminar el Bachillerato. En un grupo de ocho alumnos elegidos al azar, halla la probabilidad de que estudien una carrera:

a) Alguno de ellos.
b) Más de seis.

Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

Si llamamos x = "número de alumnos, de un grupo de 8, que estudian carrera", se trata de una distribución binomial con n = 8, p = 0,65 → B(8; 0,65)

a) $p[x > 0] = 1 - p[x = 0] = 1 - 0{,}35^8 = 0{,}9998 \rightarrow p[x > 0] = 0{,}9998$

b) $p[x > 6] = p[x = 7] + p[x = 8] =$

$$= \binom{8}{7} \cdot 0{,}65^7 \cdot 0{,}35 + \binom{8}{8} \cdot 0{,}65^8 = 8 \cdot 0{,}65^7 \cdot 0{,}35 + 0{,}65^8 = 0{,}169 \quad \rightarrow \quad p[x > 6] = 0{,}169$$

Hallamos la media y la desviación típica:

$$\mu = np = 8 \cdot 0{,}65 = 5{,}2 \quad \rightarrow \quad \mu = 5{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} = 1{,}35 \quad \rightarrow \quad \sigma = 1{,}35$$

Ejercicio nº 27.-

En un sorteo que se realiza diariamente de lunes a viernes, la probabilidad de ganar es 0,1. Vamos a jugar los cinco días de la semana y estamos interesados en saber cuál es la probabilidad de ganar 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 días.

a) Haz una tabla con las probabilidades.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Observar que se trata de una B(5; 0,1) → por ejemplo: P(x_i =0)=$\binom{5}{0}\cdot 0.1^0 \cdot 0.9^5 = 0.9^5 = 0.59049$

b) $\mu = \Sigma\, p_i x_i = 0,5 \quad \rightarrow \quad \mu = 0,5$

$\sigma = \sqrt{\Sigma\, p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0,7 - 0,25} = \sqrt{0,45} = 0,67 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0,67$

Ejercicio nº 28.-

Explica para cada una de estas situaciones si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica los valores de n y p:

a) El 2% de las naranjas que se empaquetan en un cierto lugar están estropeadas. Se empaquetan en bolsas de 10 naranjas cada una. Nos preguntamos por el número de naranjas estropeadas de una bolsa elegida al azar.
b) En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas blancas que hemos extraído.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n = 10,\ \ p = 0{,}02 \ \rightarrow\ B(10;\ 0,02)$
b) Es una distribución binomial con $n = 10,\ \ p = \frac{3}{7} \ \rightarrow\ B\left(10,\ \frac{3}{7}\right)$

Ejercicio nº 29.-

Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 5 veces, calcula la probabilidad de sacar:

a) Alguna bola verde.
b) Menos de dos bolas verdes.

Halla el número medio de bolas verdes extraídas. Calcula también la desviación típica.

Solución:

Si llamamos x = "número de bolas verdes extraídas", se trata de una distribución binomial con

$n = 5,\ p = \frac{2}{10} = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad B(5;\ 0,2)$

a) $p[x > 0] = 1 - p[x = 0] = 1 - 0,8^5 = 0,672 \rightarrow p[x > 0] = 0,672$
b) $p[x < 2] = p[x = 0] + p[x = 1] = 0,8^5 + 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,737 \rightarrow p[x < 2] = 0,737$

Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu = np = 5 \cdot 0,2 = 1$ bola verde (por término medio) $\rightarrow \quad \mu = 1$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 0,89 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0,89$

Ejercicio nº 30.-

En una bolsa hay 3 bolas rojas, 5 blancas y 2 verdes. Hacemos tres extracciones con reemplazamiento y anotamos el número total de bolas verdes que hemos sacado.

a) Haz una tabla con las probabilidades.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a) Los posibles valores de xi son 0, 1, 2, 3. La tabla de la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

b) $\mu = \Sigma\, p_i x_i = 0,6 \quad \rightarrow \quad \mu = 0,6$

$\sigma = \sqrt{\Sigma\, p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{0,84 - 0,36} = \sqrt{0,48} = 0,69 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0,69$

Ejercicio nº 31.-

En cada una de estas situaciones, explica si se trata de una distribución binomial. En caso afirmativo, di cuáles son los valores de n y p:

a) El 3% de las chinchetas que se hacen en una determinada fábrica salen defectuosas. Se empaquetan en cajas de 20 chinchetas. Estamos interesados en el número de chinchetas defectuosas de una caja elegida al azar.
b) En una urna hay 2 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la experiencia 10 veces y estamos interesados en saber el número de bolas de cada color que hemos obtenido.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n = 20,\ \ p = 0,03 \quad \rightarrow \quad B(20;\ 0,03)$
b) No se trata de una binomial, ya que tenemos más de dos resultados posibles: rojo, blanco, verde.

Ejercicio nº 32.-

Se sabe que el 30% de la población de una determinada ciudad ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas de esa ciudad elegidas al azar. Calcula la probabilidad de que, entre esas 10 personas, estuvieran viendo el programa:

a) Más de 8.
b) Alguna de las 10.

Halla la media y la desviación típica.

Solución:

Si llamamos x = "número de personas entre esas 10, que están viendo el programa", se trata de una distribución binomial con n = 10, p = 0,3 = B(10; 0,3).

a) $p[x > 8] = p[x = 9] + p[x = 10] =$

$= \binom{10}{9} \cdot 0,3^9 \cdot 0,7 + \binom{10}{10} \cdot 0,3^{10} = 10 \cdot 0,3^9 \cdot 0,7 + 0,3^{10} = 0,000144 \rightarrow p[x > 8] = 0,000144$

b) $p[x > 0] = 1 - p[x = 0] = 1 - 0,7^{10} = 0,972 \rightarrow p[x > 0] = 0,972$

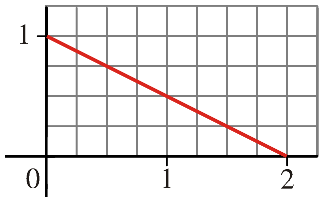
Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu = np = 10 \cdot 0,3 = 3 \quad \rightarrow \quad \mu = 3$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{2,1} = 1,45 \quad \rightarrow \quad \sigma = 1,45$

Ejercicio nº 33.-

La siguiente gráfica corresponde a la función de probabilidad de una variable continua, x :



Calcula la probabilidad de que x:

a) Sea menor que 1.
b) Esté entre 1/2 y 3/2

Solución:

El área total bajo la curva es:

$$\text{Área} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\ \text{u}^2$$

a) Entre 0 y 1 tenemos un trapecio cuyas bases miden 1 y $\frac{1}{2}$, y su altura es 1. Su área será:

$$\text{Área} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\ \text{u}^2$$

Por tanto:

$$p[x<1] = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

b) Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ tenemos un trapecio de bases $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, y de altura 1. Su área será:

$$\text{Área} = \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ \text{u}^2$$

Por tanto:

$$p\left[\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right] = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

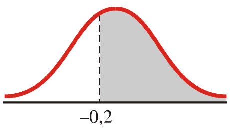
Ejercicio nº 34.-

Halla, en una distribución N(0, 1), las siguientes probabilidades:

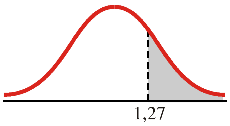
a) $\boldsymbol{p[z > -0{,}2]}$
b) $\boldsymbol{p[z > 1{,}27]}$
c) $\boldsymbol{p[-0{,}52 < z < 1{,}03]}$

Solución:

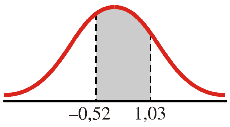
a) $p[z > -0,2] = p[z < 0,2] = 0,5793$



b) $p[z > 1,27] = 1 - p[z \; - 1,27] = 1 - 0,8980 = 0,1020$



c) $p[-0,52 < z < 1,03] = p[z < 1,03] - p[z < -0,52] =$
$p[z < 1,03] - p[z > 0,52] = p[z < 1,03] - (1 - p[z \le 0,52]) =$
$= 0,8485 - (1 - 0,6985) = 0,5470$



Ejercicio nº 35.-

El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal N(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.
b) Entre 180 y 220 unidades.

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right] = p[z > 0,67] =$
$= 1 - p[z \le 0,67] = 1 - 0,7486 = 0,2514$

b) $p[180 < x < 220] = p\left[\frac{180-192}{12} < \frac{x-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right] =$
$= p[-1 < z < 2,33] = p[z < 2,33] - p[z < -1] =$
$= p[z < 2,33] - p[z > 1] = p[z < 2,33] - (1 - p[z \le 1]) = 0,9901 - (1 - 0,8413) = 0,8314$

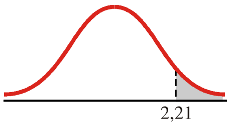
Ejercicio nº 36.-

En una distribución N(0,1), calcula las siguientes probabilidades:

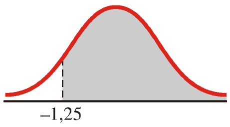
a) $\boldsymbol{p[z > 2,21]}$
b) $\boldsymbol{p[z > -1,25]}$
c) $\boldsymbol{p[-0,86 < z < 2,34]}$

Solución:

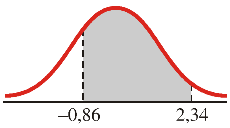
a) $p[z > 2,21] = 1 - p[z < 2,21] = 1 - 0,9864 = 0,0136$



b) $p[z > -1,25] = p[z < 1,25] = 0,8944$



c) $p[-0,86 < z < 2,34] = p[z < 2,34] - p[z < -0,86] = p[z < 2,34] - p[z > 0,86] =$
$p[z < 2,34] - (1 - p[z \le 0,86]) = 0,9904 - (1 - 0,8051) = 0,7955$



Ejercicio nº 37.-

El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución N(10, 2). Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas.
b) Entre 8 y 13 horas.

Solución:

a) $p[x < 7] = p\left[\frac{x - 10}{2} < \frac{7 - 10}{2}\right] = p[z < -1,5] =$
$= p[z > 1,5] = 1 - p[z \le 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$

b) $p[8 < x < 13] = p\left[\frac{8 - 10}{2} < \frac{x - 10}{2} < \frac{13 - 10}{2}\right] = p[-1 < z < 1,5] =$
$= p[z < 1,5] - p[z < -1] = p[z < 1,5] - p[z > 1] =$
$= p[z < 1,5] - (1 - p[z \le 1]) = 0,9332 - (1 - 0,8413) = 0,7745$

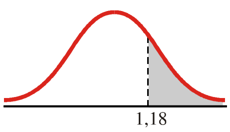
Ejercicio nº 38.-

En una distribución N(0, 1), calcula:

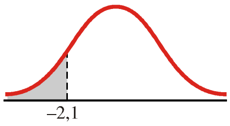
a) $\boldsymbol{p[z > 1,18]}$
b) $\boldsymbol{p[z < -2,1]}$
c) $\boldsymbol{p[-0,71 < z < 1,23]}$

Solución:

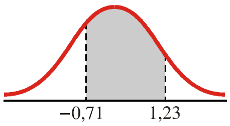
a) $p[z > 1,18] = 1 - p[z < 1,18] = 1 - 0,8810 = 0,1190$



b) $p[z < -2,1] = p[z > 2,1] = 1 - p[z - 2,1] = 1 - 0,9821 = 0,0179$



c) $p[-0,71 < z < 1,23] = p[z < 1,23] - p[z < -0,71] = p[z < 1,23] - p[z > 0,71] =$
$= p[z < 1,23] - (1 - p[z \leq 0,71]) = 0,8907 - (1 - 0,7612) = 0,6519$



Ejercicio nº 39.-

Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución N(950, 200).
Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:

Superen los 1200 euros.

Estén entre 700 y 1000 euros.

Solución:

$$p[x > 1200] = p\left[\frac{x - 950}{200} > \frac{1200 - 950}{200}\right] = p[z > 1,25] = 1 - p[z \leq 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$p[700 < x < 1000] = p\left[\frac{700 - 950}{200} < \frac{x - 950}{200} < \frac{1000 - 950}{200}\right] =$$

$$= p[-1 < z < 0,25] = p[z < 0,25] - p[z < -1] =$$

$$= p[z < 0,25] - p[z > 1] = p[z < 0,25] - (1 - p[z \leq 1]) = 0,5987 - (1 - 0,8413) = 0,44$$

Ejercicio nº 40.-

El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 para distribuirlos por diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

Solución:

Si llamamos x = "número de pantalones defectuosos en una caja", entonces x es una binomial con $n = 80$; $p = 0,07$, en la que hay que calcular $p[x > 10]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 80 \quad 0,07 = 5,6;$ su desviación típica es $\sqrt{npq} = 2,28$.

x es $B(80;\ 0,07) \rightarrow x'$ es $N(5,6;\ 2,28) \rightarrow z$ es $N(0,1)$

$$p[x > 10] = p[x' \geq 10,5] = p\left[z \geq \frac{10,5 - 5,6}{2,28}\right] = p[z \geq 2,15] =$$

$$= 1 - p[z < 2,15] = 1 - 0,9842 = 0,0158 \quad \rightarrow \quad p[x > 10] = 0,0158$$

Ejercicio nº 41.-
Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de respuestas acertadas", entonces x es una binomial con $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, en la que tenemos que calcular:

$$p[x > 60] \quad (\text{La media de } x \text{ es } np = 50. \text{Su desviación típica es } \sqrt{npq} = 5).$$

La calculamos aproximando con una normal:

$$x \text{ es } B\left(100, \frac{1}{2}\right) \quad \to \quad x' \text{ es } N(50, 5) \quad \to \quad z \text{ es } N(0, 1)$$

$$p[x > 60] = p[x' \geq 60,5] = p\left[z \geq \frac{60,5 - 50}{5}\right] = p[z \geq 2,1] =$$
$$= 1 - p[z < 2,1] = 1 - 0,9821 = 0,0179 \quad \to \quad p[x > 60] = 0,0179$$

Ejercicio nº 42.-
En una urna hay 3 bolas rojas, 2 blancas y 5 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 50 veces, ¿cuál es la probabilidad de sacar roja en más de 20 ocasiones?

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de bolas rojas", entonces x es una binomial con $n = 50$, $p = \frac{3}{10} = 0,3$, en la que tenemos que calcular $p[x > 20]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 50 \cdot 0,3 = 15$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = 3,24$.

$$x \text{ es } B(50; 0,3) \to x' \text{ es } N(15; 3,24) \to z \text{ es } N(0, 1)$$

$$p[x > 20] = p[x' \geq 20,5] = p\left[z \geq \frac{20,5 - 15}{3,24}\right] = p[z \geq 1,70] =$$
$$= 1 - p[z < 1,70] = 1 - 0,9554 = 0,0446 \quad \to \quad p[x > 20] = 0,0446$$