Discusión de sistemas.

Problema 1:

A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 3x - ky = 3 \\ y + 3z = 6 \\ x + kz = 5 \end{cases}$ para el valor del parámetro k ∈ R que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t, y = …, z = … Determina para qué valor del parámetro **k** ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas **y** y **z**que le faltan.

Problema 2:

Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Estudia, según los valores del parámetro **a,** el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} ax + ay = a \\ x - y + az = a \\ x + 2y + 3z = a \end{array}\right\}$$

Problema 4:

Dado el sistema $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de **a**

b) Resolverlo cuando sea posible.

Problema 5:

Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución (x, y, x) = (0, 0, 0)

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando λ = – 3

Problema 6:

Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ x + by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Según los valores de **b**

Problema 7:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ (1+a)y + z = 4 \\ x + 2y + az = 4 \end{cases}$

a) Discute el sistema según el valor del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para a = 2

Problema 8:

La terna (0, 0, 0) es siempre solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$

Independientemente del valor del parámetro **a**

a) Indica para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema.

b) Indica algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. *(Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos)*.

Problema 9:

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averigua para qué valores de **k** tiene soluciones distintas de x = y = z = 0. Resolver en tales casos.

Problema 10:

Resuelve los siguientes apartados.

a) Discute e interpreta geométricamente, según los diferentes valores del parámetro **m,** el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = m \\ mx - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los casos m = 0 y m = 2

Soluciones.

Problema 1:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$$ para todos los valores de **k** se obtiene que R(C) = 2

Para que el sistema sea compatible indeterminado R(A) = 2

$$R\begin{pmatrix} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & k & 5 \end{pmatrix}_{3 \cdot 3^a - 1^a} = R\begin{pmatrix} 3 & -k & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & k & 3k & 12 \end{pmatrix}$$

Para que las dos últimas filas sean proporcionales tiene que ser k = 2

Resolvemos el sistema para k = 2, x = 1 + 2t

$$\left.\begin{aligned} 3(1+2t) - 2y \quad &= 3 \\ y + 3z &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 3t,\ z = 2 - t$$

La solución es x = 1 + 2t, y = 3t, z = 2 – t, t ∈ R

Problema 2:

Pasamos al sistema de ecuaciones y lo resolvemos por Gauss:

$$\left.\begin{aligned} 2x \quad + 5z &= 7 \\ x + y - 2z &= -2 \\ -x + y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1,\ y = -1,\ z = 1$$

Problema 3:

$$|C| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ $= -a^2 - 6a$; $a^2 + 6a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = -6$

Para a ≠ 0, a ≠ –6, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Para a = 0, R(C) = R(A) = 2 < Nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

Para a = – 6, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

Problema 4:

a) $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a+2$; a – 1= 0 ⇒ a = 1

Para a ≠ 1, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Para a = 1, R(C) = R(A) = 2 < Nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

b) Siempre tiene solución:

Para a ≠ 1, x = 1/2, y = 1/2, z = –a/2 + 1/2

Para a = 1 ⇒ x = 1 – t, y = t, z = 0, t ∈ |

Problema 5:

El sistema es homogéneo.

a) $|C| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$; $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = -3$

Para λ ≠ 0, λ ≠ –3, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado

b) Para λ = 0, x = – t/5, y = 3t/5, z = t, t ∈ R

Para λ = – 3, x = u – t, y = t, z = u, t, u ∈ R

c) Para λ = – 3, los tres planos son el mismo, porque sus coeficientes son proporcionales.

Problema 6:

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = 2b^2 - 2b$; $b^2 - b = 0 \Rightarrow b = 0, b = 1$

Para b ≠ 0, b ≠ 1, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Para b = 0, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

Para b = 1, R(C) = R(A) = 2 < Nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

Problema 7:

a) $$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \ ; a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = 1$$

Para a ≠ –1, a ≠ 1, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

Para a = –1, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

Para a = 1, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

b) Para a = 2 ⇒ x = 0, y = 1, z = 1

Problema 8:

a) $$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3a^2 + 6a \ ; 3a^2 - 6a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 2$$

Tiene soluciones distintas de la terna (0, 0, 0) para a = 0, a = 2

b) Solo se pide resolver para uno de estos valores, aquí lo haremos para los dos

Solución para a = 0, x = –2t, y = t, z = t, t ∈ R

Solución para a = 2, x = 0, y = t, z = t, t ∈ R

Problema 9:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 \ ; k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = -1,\ k = 2$$

Tiene soluciones distintas de x = y = z = 0 para k = –1, k = 2

Solución para k = –1, x = t, y = 0, z = t, t ∈ R

Solución para k = 2, x = – t/5, y = 3t/5, z = t, t ∈ R

Problema 10:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2 \; ; \; m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Para m ≠ 2, R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado, los tres planos se cortan en un punto.

Para m = 2, R(C) = R(A) = 2 < nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado. El 1er plano y el 3º son el mismo y el 2º los corta en una recta.

Para m = 0, x = y = z = 0

$$\text{Para } m = 2, \; \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}t \quad ; \; t \in R \\ z = \qquad\quad t \end{cases}$$