DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

Recordamos que una variable aleatoria es una función que a cada elemento del espacio muestral E de un experimento aleatorio le asocia un número real. Una variable aleatoria es continua cuando toma todos los valores pertenecientes a un intervalo de la recta real.

En este caso se presenta el problema de que no puede asignarse un número real (un valor de probabilidad) a cada uno de los infinitos valores del intervalo sobre el que está definida la variable (porque la probabilidad puntual vale 0). Lo que si se puede calcular es la probabilidad dentro de un intervalo.

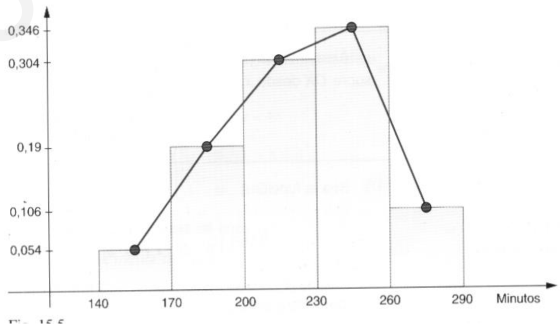
Por tanto, para que las variables aleatorias continuas tengan sentido, hay que definirlas mediante por una función que se denomina **función de probabilidad**, **distribución de probabilidad** o **función de densidad**.

La función de densidad se define como la función correspondiente a la curva límite del histograma de una distribución continua de frecuencias, al considerar un número cada vez mayor de intervalos de amplitud progresivamente menor.

<u>Ejemplo 86º:</u> En un carrera de maratón tenemos los siguientes datos: el ganador ha recorrido los 42195 metros en un tiempo de 2 horas 21 minutos 35 segundos; el último corredor ha tardado 4 horas 50 minutos, y la carrera la han terminado un total de 500 corredores.

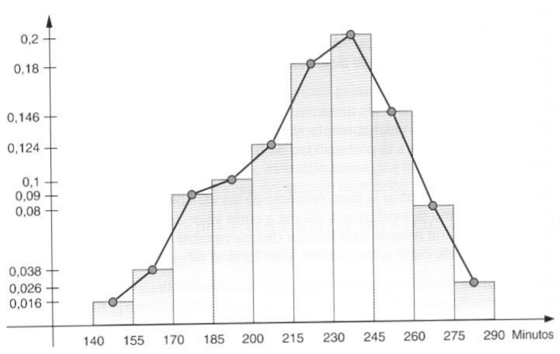
Se ha considerado la variable x = "tiempo empleado por cada corredor" y se han agrupado los tiempos invertidos por los 500 corredores en cinco intervalos de 30 minutos. Los resultados se recogen en la tabla siguiente y se adjunta el correspondiente histograma de frecuencias relativas:

Tiempo (minutos)	Número de corredores	Frecuencia Relativa
(140,170]	27	0,054
(170,200]	95	0,19
(200,230]	152	0,304
(230,260]	173	0,346
(260,290]	53	0,106
Suma	500	1

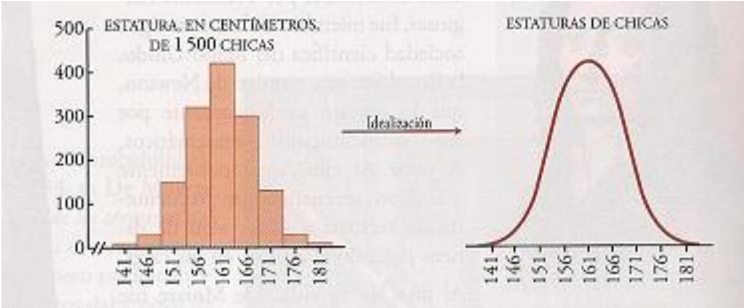


Si se hace una nueva distribución de frecuencias, esta vez agrupando los resultados en diez intervalos de quince minutos de amplitud, se tienen los resultados mostrados en la tabla siguiente:

Tiempo (minutos)	Número de corredores	Frecuencia Relativa
(140,155]	8	0,016
(155,170]	19	0,038
(170,185]	45	0,090
(185,200]	50	0,1
(200,215]	62	0,124
(215,230]	90	0,18
(230,245]	100	0,2
(245,260]	73	0,146
(260,275]	40	0,080
(275,290]	13	0,026
Suma	500	1

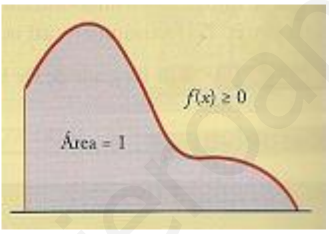


Las distribuciones de probabilidad de variable continua son idealizaciones de las distribuciones estadísticas de variable continua.
Estaturas, pesos, tiempos… son variables continuas.



Si seguimos dividiendo los intervalos de modo que se tienda a considerar un número infinitamente grande de intervalos infinitamente pequeños, aparece como "límite" del polígono de frecuencias una curva que corresponde a una función real de variable real.
Esta función se llama **función de densidad** y debe cumplir las siguientes condiciones:

- f(x) ≥ 0, para todo valor de x.
- El área bajo la gráfica de f(x) sobre el eje de abscisas es 1.



Del mismo modo que para calcular probabilidades en una variable discreta se necesita su función de probabilidad, para poder calcular probabilidades en una variable aleatoria continua se precisará de su función de densidad, pero ahora la **probabilidad** corresponde al **área**.

Para hallar la probabilidad $P(a \le x \le b)$, obtendremos el área bajo la curva en el intervalo $[a,b]$:

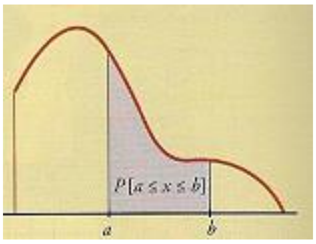
$P(a \le x \le b)$ = Área bajo la curva en $[a,b]$.

Resumiendo: Si x es una variable aleatoria continua y f(x) su función de densidad, la probabilidad de que x pertenezca a un cierto intervalo $[a,b]$, es el área de la región limitada por la gráfica de f(x), las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje OX. Es decir:

$P(a \le x \le b) = Área[f(x), a, b]$ = Área limitada por f(x) sobre OX desde x_1 hasta x_2.

Las probabilidades de sucesos puntuales son cero: $P(x=a)=0$, $P(x=b)=0$, …

Por tanto: $P(a \le x \le b) = P(a < x < b)$:

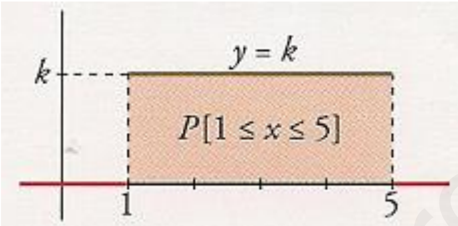


CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD F(X)

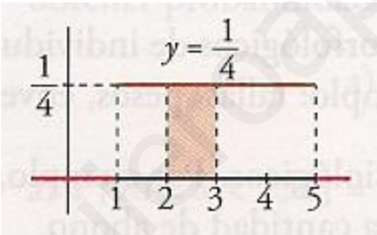
Hay que calcular el área bajo la curva de la función de densidad entre los valores que se desea.
Eso se hace con el cálculo integral, que se estudiará el curso próximo.
Aunque con algunas funciones sencillas se puede calcular de forma geométrica.

Ejemplo 87º: Calcula k para que la función: $f(x)=\begin{cases} k & si \quad x\in[1,5] \\ 0 & si \quad x\notin[1,5] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla la probabilidad: $P(2\le x\le 3)$, $P(2\le x\le 5)$, $P(2\le x\le 2{,}5)$.

Solución: El área total bajo la curva vale 1: $P(-\infty<x<+\infty)=P(1\le x\le 5)=4\cdot k=1\Rightarrow k=\frac{1}{4}$



$P(2\le x\le 3)=(3-2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

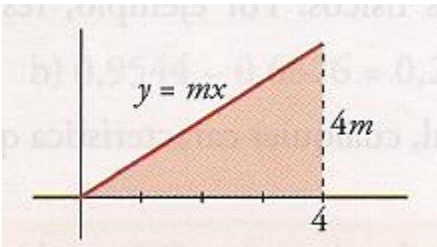


Análogamente se calculan las otras dos probabilidades.

Ejemplo 88º: Calcula m para que la función: $f(x)=\begin{cases} mx & si \quad x\in[0,4] \\ 0 & si \quad x\notin[0,4] \end{cases}$, sea una función de densidad. Halla la probabilidad: $P(2\le x\le 3)$.

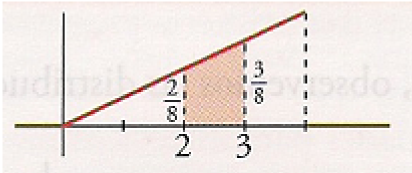
Solución: El área del triángulo vale 1: $\frac{4\cdot 4m}{2}=8m$. Por tanto:

$P(-\infty<x<+\infty)=P(0\le x\le 4)=8m=1\Rightarrow m=\frac{1}{8}$



La función densidad es y = x/8 con $x\in[0,4]$. El área del trapecio coloreado nos da la probabilidad buscada:

$$P(2 \le x \le 3) = \frac{\left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8}\right)1}{2} = \frac{5}{16}$$



EJERCICIOS

89°.- Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$. Comprueba que es función de densidad y halla $P(0 \le x \le 1/2)$.

Solución: Se cumple: f(x) ≥ 0, para todo valor de x. El área del triángulo vale 1: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

Por tanto: $P\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}$

90°.- Sea la función: $f(x) = \begin{cases} k & si \quad x \in [0,a] \\ 0 & si \quad x \notin [0,a] \end{cases}$. Calcula el valor de k para que f(x) sea función de densidad y halla $p(a/4 \le X \le a/3)$.

Solución: Función de densidad, por tanto: k > 0. Área 1: $A = k \cdot a = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{a}$.

Por tanto: $P\left(\frac{a}{4} \le x \le \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{4}\right) \cdot k = \frac{a}{12} \cdot k$. Como $k = \frac{1}{a} \Rightarrow P = \frac{a}{12} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{12}$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Si se conoce la función de densidad de una variable aleatoria continua, f(x), se puede calcular la probabilidad de que la variable esté comprendida entre dos valores determinados mediante el área que limita esa función de densidad sobre el eje de abscisas, entre los dos valores dados. Además, sabemos que la probabilidad puntual es cero.

Por tanto, si a y b son dos valores cualesquiera del dominio de la variable, se tiene:

$$p(a \le x \le b) = p(a \le x < b) = p(a < x < b) = Área[f(x), a, b]$$

Pero el cálculo del área puede ser complicado y necesita del cálculo integral. Para facilitar el cálculo se ha definido una función que da el área encerrada por la gráfica de la función de densidad sobre el eje OX desde - ∞ hasta x. Esta función se llama **función de distribución** y se define como:

$$F(x) = p(X \le x)$$

El valor de la función de distribución para un determinado valor, x, de la variable, representa la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x.

Por tanto se pueden hallar probabilidades a partir de la función de distribución F(x) sin necesidad de calcular áreas, teniendo en cuenta las dos relaciones básicas para ello:

- $p(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$
- $p(X \ge a) = p(X > a) = 1 - p(X \le a) = 1 - F(a)$

<u>Ejemplo 91º:</u> Dada una variable continua cuya función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<1\\ \dfrac{x-1}{2} & si \quad 1\le x\le 3\\ 1 & si \quad 3<x\end{cases}$$

, calcula la probabilidad de que la variable tome valores entre 1,5 y 2.

<u>Solución:</u> $p(1{,}5\le x\le 2)=F(2)-F(1{,}5)=\dfrac{2-1}{2}-\dfrac{1{,}5-1}{2}=0{,}25$

EJERCICIOS

92º.- La función de distribución de una variable aleatoria es: $F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<1\\ \dfrac{x^3}{7} & si \quad 1\le x\le 2\\ 1 & si \quad 2<x\end{cases}$. Halla la probabilidad de que:

a) x sea menor que 3/2.
b) x sea mayor que 3/2.
c) x esté comprendido entre 1,3 y 1,7.

<u>Solución:</u> A) $P\left(x<\dfrac{3}{2}\right)=F\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}{7}=\dfrac{27}{56}$

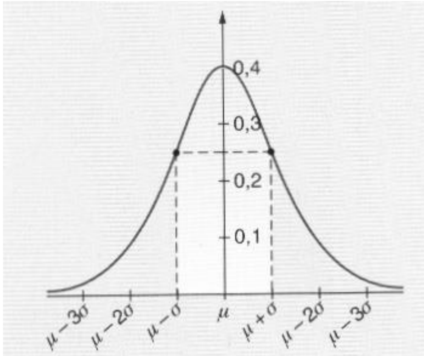
B) $P\left(x>\dfrac{3}{2}\right)=1-P\left(x\le\dfrac{3}{2}\right)=1-\dfrac{27}{56}=\dfrac{29}{56}$

C) $P(1{,}3<x<1{,}7)=F(1{,}7)-F(1{,}3)=\dfrac{1{,}7^3}{7}-\dfrac{1{,}3^3}{7}=$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

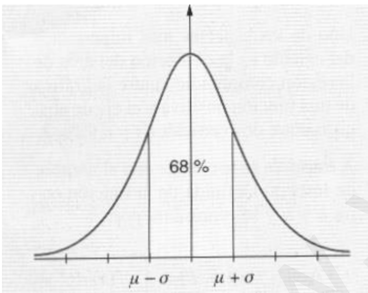
La mayor parte de las variables aleatorias continuas, sobre todo las que dependen de un gran número de factores, tienen una distribución de probabilidad que acumula muchos individuos en los valores centrales, pero el número de éstos va decreciendo según se aleja la variable en cualquiera de los dos sentidos.
Lo normal es que haya pocos individuos con valores extremos, ya sea por debajo o por encima de la media, y multitud de individuos que tomen valores intermedios, próximos a la media.
La apariencia gráfica de estas distribuciones es una curva, más o menos simétrica, en forma de campana llamada **campana de Gauss**.
Si la gráfica de la función de densidad de una variable aleatoria continua se ajusta a una campana de Gauss se dice que la variable presenta una **distribución normal**. Las características esenciales de una distribución normal son la media y la desviación típica, de modo que las variables que presentan una distribución normal de media μ y desviación típica σ, se representan por $N(\mu,\sigma)$.

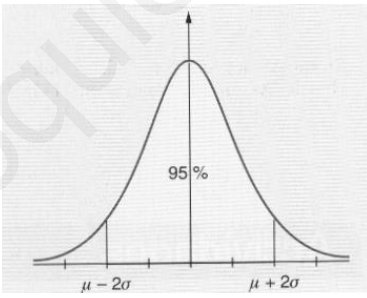
La campana de Gauss o **curva normal** es una curva simétrica con un máximo en x = μ, puntos de inflexión en x = μ ± σ y una asíntota horizontal en y = 0, es decir, el eje de abscisas.

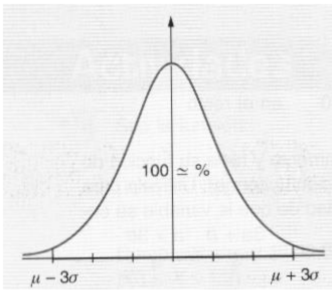


Para cada par (μ, σ) existe una campana de Gauss distinta, pero todas ellas verifican las siguientes propiedades:

- El área total bajo la curva desde x = -∞ hasta x = +∞ vale 1, ya que la curva es su función de densidad.
- El área bajo la curva entre dos abscisas cualesquiera representa la probabilidad de que la variable tome algún valor entre esas dos abscisas.
- El área bajo la curva entre los dos puntos de inflexión vale 0,6827, es decir, que el 68,27 % de los individuos (aproximadamente un porcentaje de 2/3) toma valores centrales en una distribución normal.
- El área bajo la curva entre μ - 2σ y μ + 2σ es 0,9545, esto es, sólo el 5 % de los individuos presenta un valor de la variable que difiere de la media dos veces más que la desviación típica.
- El área bajo la curva entre μ - 3σ y μ + 3σ es 0,9973 o, lo que es lo mismo, que prácticamente la totalidad de los individuos tiene un valor de la variable que difiere de la media, en valor absoluto, menos de tres veces la desviación típica.







La expresión de la función de densidad de una variable x que sigue una **distribución normal** es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ejemplo 93°: La duración, en horas de funcionamiento, de las pilas alcalinas fabricadas por una determinada empresa, sigue una distribución normal de media μ = 60 y desviación típica σ = 5.

a) Se examinan cien pilas alcalinas, ¿cuántas de ellas se espera que tengan una duración comprendida entre 55 y 65 horas?
b) ¿Y cuántas durarán más de 70 horas?

Solución:

a) Como μ = 60 y σ = 5, resulta que 55 = μ - σ y 65 = μ + σ. Por tanto, según las propiedades de la distribución normal, el número de individuos comprendidos entre éstos dos valores es el 68,27 %. Así, es de esperar que, de las cien pilas alcalinas, 68 tengan una duración comprendida entre 55 y 65 horas.

b) Como 70 = 60 + 2 · 5 = $\mu + 2\sigma$, la proporción de individuos con valores superiores a $\mu + 2\sigma$ o inferiores a $\mu - 2\sigma$ es del 4,55 %; siendo la distribución perfectamente simétrica, es de esperar que de las cien pilas la mitad, que corresponde al $\frac{4,55}{2}$ %, es decir, 2,275 ≈ 2 pilas, duren más de 70 horas.

Ejemplo 94º: Las estaturas de 800 personas se distribuyen según la normal N(175,10). Distribuye a esas 800 personas en los intervalos $(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu - \sigma)$, $(\mu - \sigma, \mu)$, $(\mu, \mu + \sigma)$, $(\mu + \sigma, \mu + 2\sigma)$ y $(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Solución:

En primer lugar, calculamos los extremos de los intervalos indicados: $\mu - 3\sigma = 145$, $\mu - 2\sigma = 155$, $\mu - \sigma = 165$, $\mu + \sigma = 185$, $\mu + 2\sigma = 195$ y $\mu + 3\sigma = 205$.

Se sabe que las medidas se situarán entre los 145 y los 205 cm y que entre 155 y 195 cm se sitúa el 95,45 % del total, lo que supone 764 personas. Por tanto, habrá 800 – 764 = 36 personas repartidas en los intervalos $[145{,}155]$ y $[195{,}205]$. Como la distribución es simétrica, debe haber 18 personas situadas en el intervalo $[145{,}155]$ y otras 18 en $[195{,}205]$.

Del mismo modo, entre los 165 y 185 cm se encuentra el 68,27 % del total, es decir, 546 personas. Por tanto habrá 764 – 546 = 218 personas repartidas en los intervalos $[155{,}165]$ y $[185{,}195]$, en cada uno de los cuáles habrá un total de 109 personas. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

Intervalo	$(\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma)$ $[145{,}155]$	$(\mu - 2\sigma, \mu - \sigma)$ $[155{,}165]$	$(\mu - \sigma, \mu)$ $[165{,}175]$	$(\mu, \mu + \sigma)$ $[175{,}185]$	$(\mu + \sigma, \mu + 2\sigma)$ $[185{,}195]$	$(\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$ $[195{,}205]$
Nº de personas	18	109	273	273	109	18

EJERCICIOS

95º.- El conjunto de calificaciones de matemáticas obtenidas por un grupo de 200 alumnos en las pruebas de Selectividad, sigue una distribución normal N(5; 1,33). Haz una distribución de las calificaciones de los 200 alumnos en intervalos de amplitud 1,33, partiendo de la media hacia arriba y hacia abajo.

♦ **CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR**

Para poder calcular probabilidades en una distribución normal, es necesario saber calcular el área bajo la curva de su función de densidad entre dos valores cualesquiera. Puesto que éste cálculo no es sencillo, se han elaborado tablas para la **función de distribución**, $F(x) = p(X \le x)$. El problema es que existen infinitas distribuciones normales diferentes. Pero como todas tienen propiedades comunes, se puede reducir una de ellas a cualquier otra, haciendo un cambio de variable adecuado.

Se ha tabulado la distribución normal más sencilla, que es la distribución N(0,1), es decir, la que tiene media 0 y desviación típica 1, y que se llama **distribución normal estándar o tipificada**. En las tablas la precisión de la variable llega hasta las centésimas, mientras que la de la función de distribución llega hasta las diez milésimas.

Ejemplo 96º.- (ejercicio resuelto pág. 354 - 355):

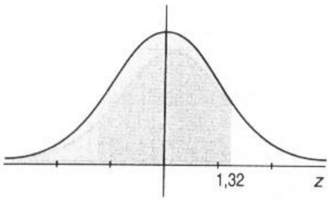
Si x sigue una distribución N(0,1), calcula:

A) $p(z \leq 1{,}32)$ B) $p(z \geq 0{,}74)$

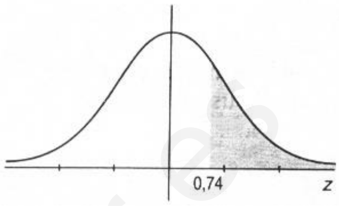
C) $p(z \leq -2{,}26)$ D) $p(z \geq -1{,}73)$

E) $p(0{,}47 \leq z \leq 2{,}13)$ F) $p(-1{,}27 \leq z \leq 1{,}66)$

G) $p(-1{,}77 \leq z \leq -0{,}65)$.



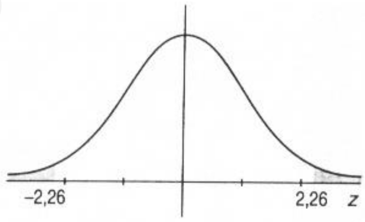
Solución: A) Para obtener $F(1{,}32) = p(z \leq 1{,}32)$, se busca en la tabla N(0,1), en la columna de la izquierda, el valor 1,3, pero la segunda cifra decimal 0,02 se encuentra en la fila superior. El valor correspondiente, 0,9066, es la probabilidad buscada.



B) Para obtener $p(z \geq 0{,}74)$, se puede utilizar la probabilidad del suceso contrario y el hecho de que la suma de la probabilidad de un suceso con su contrario es la unidad:

$$p(z \geq 0{,}74) = 1 - p(z \leq 0{,}74) = 1 - F(0{,}74) = 1 - 0{,}7704 = 0{,}2296$$

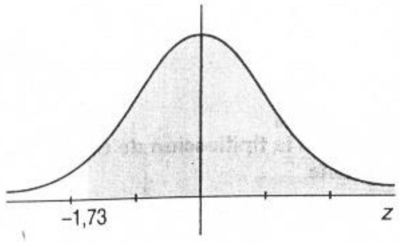
C) Como la tabla solo nos da probabilidades para valores positivos de la variable z, para obtener $p(z \leq -2{,}26)$ se tiene en cuenta la simetría de la función densidad y que el área bajo toda la curva es la unidad:



$$p(z \leq -2{,}26) = p(z \geq +2{,}26) = 1 - p(z < 2{,}26) =$$
$$= 1 - F(2{,}26) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019.$$

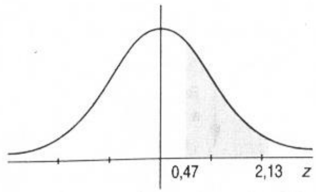
E) Para obtener $p(z \geq -1{,}73)$, observamos el dibujo y consideramos el área que podemos obtener directamente en la tabla:

F)



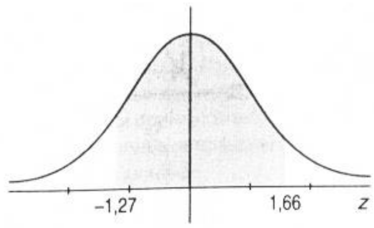
$$p(z \geq -1{,}73) = p(z \leq 1{,}73) = 0{,}9582.$$

E) Para calcular $p(0{,}47 \leq z \leq 2{,}13)$, observamos el dibujo y restamos el área mayor menos la menor:



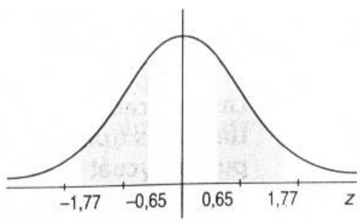
$$p(0{,}47 \leq z \leq 2{,}13) = p(z \leq 2{,}13) - p(z \leq 0{,}47) = 0{,}9834 - 0{,}6808 =$$
$$= 0{,}3026.$$

F) Para calcular $p(-1{,}27 \leq z \leq 1{,}66)$, observamos el dibujo y tenemos en cuenta todo lo visto anteriormente:



$$p(-1{,}27 \leq z \leq 1{,}66) = p(z \leq 1{,}66) - p(z \leq -1{,}27) = p(z \leq 1{,}66) - p(z \geq 1{,}27) =$$
$$= p(z \leq 1{,}66) - [1 - p(z < 1{,}27)] = 0{,}9515 - [1 - 0{,}8980] = 0{,}8495$$

G) Para calcular $p(-1{,}77 \leq z \leq -0{,}65)$, observamos el dibujo tenemos:



$$p(-1{,}77 \leq z \leq -0{,}65) = p(0{,}65 \leq z \leq 1{,}77) = p(z \leq 1{,}77) - p(0{,}65) =$$
$$= 0{,}9616 - 0{,}7422 = 0{,}2194$$

Ejemplo 97º.- (ejercicio 1 resuelto pág. 356):
Sea Z una variable aleatoria que sigue una distribución N(0,1). Halla las siguientes probabilidades:

A) $p(z \geq 0{,}32)$ B) $p(z \leq 0)$ C) $p(z \geq -2{,}3)$
D) $p(z \geq 0)$ E) $p(-0{,}51 \leq z \leq 0{,}51)$ F) $p(0 \leq z \leq 1{,}55)$

Solución:
a) $p(z \geq 0{,}32) = 1 - p(z \leq 0{,}32) = 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$
b) $p(z \leq 0) = 0{,}5$
c) $p(z \geq -2{,}3) = p(z \leq 2{,}3) = 0{,}9893$
d) $p(z \geq 0) = p(z \leq 0) = 0{,}5$
e) $p(-0{,}51 \leq z \leq 0{,}51) = 2 \cdot p(0 \leq z \leq 0{,}51) = 2 \cdot [p(z \leq 0{,}51) - 0{,}5] = 2 \cdot [0{,}6950 - 0{,}5] = 0{,}43394$
f) $p(0 \leq z \leq 1{,}55) = p(z \leq 1{,}55) - p(z \leq 0) = 0{,}9394 - 0{,}5 = 0{,}4394$

Ejemplo 98º.- (ejercicio 2 resuelto pág. 356):
Si Z es una variable aleatoria que sigue una distribución normal N(0,1), halla el valor de a en cada una de las siguientes igualdades:

A) $p(z \leq a) = 0{,}7673$ B) $p(a \leq z) = 0{,}9940$
C) $p(0 \leq z \leq a) = 0{,}4115$ D) $p(z \leq 2 + a) = 0{,}9974$

Solución:
a) tabla: a = 0,73.
b) Probabilidad mayor que 0,5, por tanto, área mayor que 0,5, por tanto, a negativo.
$p(z \geq -a) = p(z \leq a) = 0{,}9940 \Rightarrow a = -2{,}51$
c) $p(0 \leq z \leq a) = p(z \leq a) - p(z \leq 0) = p(z \leq a) - 0{,}5 \Rightarrow p(z \leq a) = 0{,}4115 + 0{,}5 = 0{,}9115 \Rightarrow a = 1{,}35$
d) $p(z \leq 2 + a) = 0{,}9974 \Rightarrow 2 + a = 2{,}79 \Rightarrow a = 0{,}79$

Ejemplo 99º: Sea X una variable que sigue una distribución N(0,1). Calcula la probabilidad de que:

a) x > 1,23 b) $1{,}23 \leq x < 2{,}01$
c) x < -1,23 d) $-1{,}23 < x < 2{,}01$

Solución:
a) $p(x > 1{,}23) = 1 - p(x \leq 1{,}23) = 1 - F(1{,}23) = 1 - 0{,}8907 = 0{,}1093$
b) $p(1{,}23 \leq x < 2{,}01) = F(2{,}01) - F(1{,}23) = 0{,}9778 - 0{,}8907 = 0{,}0871$
c) Por simetría: $p(x < -1{,}23) = p(x > 1{,}23) = 1 - F(1{,}23) = 0{,}1093$
d) $p(-1{,}23 < x < 2{,}01) = p(x < 2{,}01) - p(x < -1{,}23) = 0{,}9778 - 0{,}1093 = 0{,}8685$

EJERCICIOS

100º.- Sea Z una variable aleatoria N(0,1), calcula:

a) $p(Z \leq 1{,}45)$ b) $p(Z \leq -1{,}45)$ c) $p(1{,}25 < Z \leq 2{,}57)$
d) $p(-2{,}57 < Z \leq -1{,}25)$ e) $p(-0{,}53 < Z \leq 2{,}46)$

Solución:
a) $p(Z \leq 1{,}45) = 0{,}9265$
b) $p(z \leq -1{,}45) = p(z \geq 1{,}45) = 1 - p(z < 1{,}45) = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$
c) $p(1{,}25 < z \leq 2{,}57) = p(z \leq 2{,}57) - p(z \leq 1{,}25) = 0{,}9949 - 0{,}8944 = 0{,}1005$
d) $p(-2{,}57 < z \leq -1{,}25) = p(z \leq -1{,}25) - p(z \leq -2{,}57) = p(z \geq 1{,}25) - p(z \geq 2{,}57) =$
$= 1 - p(z < 1{,}25) - [1 - p(z < -2{,}57)] = -p(z < 1{,}25) + p(z > 2{,}57) = -0{,}8944 + 0{,}9949 = 0{,}1005$
e) $p(-0{,}53 < z \leq 2{,}46) = p(z \leq 2{,}46) - p(z < -0{,}53) = p(z \leq 2{,}46) - p(z > 0{,}53) =$

$= p(z \leq 2{,}46) - [1 - p(z < 0{,}53)] = 0{,}9931 - 1 + 0{,}7019 = 0{,}6950$

101°.- Sea Z una variable aleatoria N(0,1), calcula:

a) $p(Z \geq 1{,}32)$ b) $p(Z \geq -1{,}32)$ c) $p(Z \leq +2{,}17)$

d) $p(Z \leq -2{,}17)$ e) $p(1{,}52 < Z \leq 2{,}03)$ f) $p(-2{,}03 < Z \leq 1{,}52)$

Solución:

a) $p(Z \geq 1{,}32) = 1 - p(z < 1{,}32) = 1 - 0{,}9066 = 0{,}0934$

b) $p(z \geq -1{,}32) = p(z \leq 1{,}32) = 0{,}9066$

c) $p(z \leq 2{,}17) = 0{,}9850$

d) $p(z \leq -2{,}17) = p(z \geq 2{,}17) = 1 - p(z < 2{,}17) = 1 - 0{,}9850 = 0{,}0150$

e) $p(1{,}52 < z \leq 2{,}03) = p(z \leq 2{,}03) - p(z < 1{,}52) = 0{,}9788 - 0{,}9357 = 0{,}0431$

f) $p(-2{,}03 < z \leq 1{,}52) = p(z \leq 1{,}52) - p(z < -2{,}03) = p(z \leq 1{,}52) - p(z > 2{,}03) =$

$= p(z \leq 1{,}52) - [1 - p(z < 2{,}03)] = 0{,}9357 - 1 + 0{,}9788 = 0{,}9145$

102°.- *(ejercicio 5 pág. 366)*:

En una distribución normal N(0,1), calcula el valor de k, sabiendo que k ≥ 0, en los siguientes casos:

a) $p(z \geq k) = 0{,}1075$ b) $p(z \leq k) = 0{,}7967$ c) $p(z \geq k) = 0{,}4236$

Solución:

a) $p(z \leq k) = 1 - p(z \geq k) = 1 - 0{,}1075 = 0{,}8925 \Rightarrow k = 1{,}24$

b) $p(Z \leq k) = 0{,}7967 \Rightarrow k = 0{,}83$

c) $p(z \leq k) = 1 - p(z \geq k) = 1 - 0{,}4236 = 0{,}5764 \Rightarrow k = 1{,}195$

103°.- En una distribución normal N(0,1), calcula el valor de k, sabiendo que k ≥ 0, en los siguientes casos:

a) $p(z \leq k) = 0{,}7673$ b) $p(z \leq k) = 0{,}9761$ c) $p(z \geq k) = 0{,}0045$

Solución:

a) $k = 0{,}75$ b) $k = 1{,}98$ c) $k = 2{,}61$

- **TIPIFICACIÓN DE LA VARIABLE**

Si una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ, para calcular probabilidades es preciso hacer un cambio de variable y así poder utilizar las tablas de la distribución tipificada. Esto se llama **tipificar** o **estandarizar** la variable.

Se trata de calcular los valores de la variable referidos a su media, y hacerlo en unidades de la desviación típica. Esto se consigue calculando Z para que: X = μ + Zσ, es decir: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Entonces, si X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, la nueva variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ sigue una distribución normal de μ = 0 y σ = 1, es decir, una $N(0{,}1)$.

Ejemplo 104°: Sea X una variable que sigue una distribución normal N(120,30). Halla la probabilidad de que la variable tome valores entre 110 y 125.

Solución: Para tipificar la variable hacemos el cambio: $Z = \frac{X - 120}{30}$:

$$p(110 < x < 125) = p\left(\frac{110 - 120}{30} < \frac{x - 120}{30} < \frac{125 - 120}{30}\right) = p(-0{,}3333 < z < 0{,}1666) \approx$$

$$\approx p(z<0{,}17)-p(z<-0{,}33)=p(z<0{,}17)-[1-F(z<0{,}33)]=F(0{,}17)-1+F(0{,}33)=$$
$$=0{,}5675-1+0{,}6293=0{,}1968$$

EJERCICIOS

105º.- En una distribución normal N(5,2), calcula:

a) $p(x\le 6)$ b) $p(x\ge 4{,}5)$ c) $p(x\le 7{,}2)$

d) $p(3\le x\le 6)$

Solución: **T**ipificando:

A) $p(x\le 6)=p\left(z\le \frac{6-5}{2}\right)=p(z\le 0{,}5)=0{,}6915$

B) $p(x\ge 4{,}5)=p\left(z\ge \frac{5-4{,}5}{2}\right)=p(z\ge 0{,}25)=1-p(z\le 0{,}25)=1-0{,}5987=0{,}4013$

C) $p(x\le 7{,}2)=p\left(z\le \frac{7{,}2-5}{2}\right)=p(z\le 1{,}1)=0{,}8643$

D) $p(3\le x\le 6)=p\left(\frac{3-5}{2}\le z\le \frac{6-5}{2}\right)=p(-1\le z\le 0{,}5)=p(z\le 0{,}5)-p(z\ge 1)=$

$=p(z\le 0{,}5)-[1-p(z\le 1)]=0{,}6915-(1-0{,}8413)=0{,}5328$

106º.- En una distribución normal N(5,2), calcula el valor de k, para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $p(x\le k)=0{,}8106$ b) $p(x\ge k)=0{,}4801$ c) $p(5-k\le x\le 5+k)=0{,}5934$

Solución: **T**ipificando:

A) $p\left(z\le \frac{k-5}{2}\right)=0{,}8106\Rightarrow \frac{k-5}{2}=0{,}88\Rightarrow k=6{,}76$

B) $p(x\ge k)=1-p(x<k)=1-p\left(z\le \frac{k-5}{2}\right)=0{,}4801\Rightarrow p\left(z\le \frac{k-5}{2}\right)=0{,}5199\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k-5}{2}=0{,}05\Rightarrow k=5{,}1$

C) $p(5-k\le x\le 5+k)=p\left(\frac{5-k-5}{2}\le z\le \frac{5+k-5}{2}\right)=p\left(-\frac{k}{2}\le z\le \frac{k}{2}\right)=2\cdot p\left(z\le \frac{k}{2}\right)-1$. Como:

$p(5-k\le x\le 5+k)=0{,}5934\Rightarrow 2p\left(z\le \frac{k}{2}\right)-1=0{,}5934\Rightarrow p\left(z\le \frac{k}{2}\right)=0{,}7967\Rightarrow \frac{k}{2}=0{,}83\Rightarrow k=1{,}66$

107º.- Un autobús tiene prevista su entrada en la terminal a las 12.00 horas. Pero la hora a la que llega habitualmente es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(12:00;2{,}5)$, donde la media está expresada en horas y la desviación típica se mide en minutos. Calcula la probabilidad de que el autobús:

a) Se retrase 5 minutos como máximo.

b) Se adelante 10 minutos como mínimo.

c) Llegue puntualmente, con un margen de error de 1 minuto.

Solución: A) $p(x\le 720+5)=p(z\le 2)=0{,}9772$

B) $p(x\le 720-10)=p(x\le 710)=p\left(z\le \frac{710-720}{0{,}5}\right)=p(z\le -4)=p(z\ge 4)=1-p(z<4)=$

(no tabla)

c) $p(719 \le x \le 721) = p\left(\frac{719-720}{2,5} \le z \le \frac{721-720}{2,5}\right) = p(-0,40 \le z \le 0,40) =$

$= p(z \le 0,40) - p(z \le -0,40) = p(z \le 0,40) - p(z \ge -0,40) = p(z \le 0,40) - [1 - p(z < 0,40)] =$
$= 0,6554 - 1 + 0,6554 = 0,3308$

108º.- Una variable presenta una distribución $N(6;1,5)$. Calcula, usando las tablas de la distribución $N(0,1)$, la probabilidad de que la variable tome un valor mayor o igual que 4,5, siendo $p(x \ge 4,5)$.

Solución: $p(x \ge 4,5) = p\left(z \ge \frac{4,5-6}{1,5}\right) = p(z \ge -1) = p(z \le 1) = 0,8413$

109º.- Se tiene una distribución normal $N(35,8)$. Calcula los cuartiles y el percentil 60.

Solución: Cuartiles (p:25) no viene en la tabla. Miro P_{75} y por simetría.

$$\left.\begin{array}{l} p(x \le a) = p\left(z \le \frac{a-35}{8}\right) = 0,75 \\ tabla: p\left(z \le \frac{0,67+0,68}{2}\right) = 0,75 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-35}{8} = 0,675 \Rightarrow a = 8 \cdot 0,675 + 35 = 40,4$$

$P_{25} \to 40,4 - 35 = 5,4 \to 35 - 5,4 = 29,6 \Rightarrow p(x \le 29,6) = 0,25$

Percentil 60:

$$\left.\begin{array}{l} p(x \le a) = p\left(z \le \frac{a-35}{8}\right) = 0,60 \\ tabla: p\left(z \le \frac{0,25+0,26}{2}\right) = 0,60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-35}{8} = 0,255 \Rightarrow a = 8 \cdot 0,255 + 35 = 37,04$$

$P_{25} = 29,6; P_{60} = 37,04; P_{75} = 40,4; P_{50} = 35$

110º.- Las calificaciones de cierta asignatura en un curso de 280 alumnos siguen una distribución normal $N(5,5;1,8)$. Si el aprobado se consigue con una calificación mayor o igual que 5, calcula el número de aprobados que ha habido en ese curso en dicha asignatura.

Solución: $p(x \ge 5) = p\left(z \ge \frac{5-5,5}{1,8}\right) = p(z \ge -0,28) = p(z \le 0,28) = 0,6103 \Rightarrow 61,03\%$

$\Rightarrow 61,03\% de 280 = \frac{61,03}{100} \cdot 280 = 170,8 \Rightarrow 170 alumnos$

111º.- Las calificaciones de los estudiantes de un curso siguen una distribución normal. Si las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y -0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, ¿cuál es la media y la desviación típica de las puntuaciones? ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante saque una calificación comprendida entre 75 y 90 puntos?

Solución: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow 0,8 = \frac{88-\mu}{\sigma}; -0,4 = \frac{64-\mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \mu + 0,8\sigma = 88 \\ \mu - 0,4\sigma = 64 \end{cases} \Rightarrow \mu = 72; \sigma = 20$

$p(75 \le x \le 90) = p\left(\frac{75-72}{20} \le \frac{x-72}{20} \le \frac{90-75}{20}\right) = p(0,15 \le z \le 0,75) =$

$= p(z \le 0,75) - p(z \le 0,15) = 0,7734 - 0,5596 = 0,2138$

112º.- La duración media de un lavavajillas es de 15 años con una desviación típica igual a 0,5 años. Si la vida útil del electrodoméstico se distribuye normalmente, halla la probabilidad de que al comprar un lavavajillas éste dure más de 16 años.

Solución: $p(x>16)=p\left(z>\dfrac{16-15}{0{,}5}\right)=p(z>2)=1-p(z\le 2)=1-0{,}9772=0{,}0228$

113º.- Considera la siguiente tabla de frecuencias:

Intervalo	$[3{,}5-6{,}5)$	$[6{,}5-9{,}5)$	$[9{,}5-12{,}5)$	$[12{,}5-15{,}5)$	$[15{,}5-18{,}5)$
Frecuencia	3	5	9	6	2

a) Calcula la media y la desviación típica

b) Calcula la probabilidad de que una variable normal de media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado a sea mayor que 12,5.

Solución:

intervalo	x_i	F	x·f	$x_i^2 \cdot f_i$
$[3{,}5-6{,}5)$	5	3	15	75
$[6{,}5-9{,}5)$	8	5	40	320
$[9{,}5-12{,}5)$	11	9	99	1089
$[12{,}5-15{,}5)$	14	6	84	1176
$[15{,}5-18{,}5)$	17	2	34	578
Σ		25	272	3230

A) $\mu=\dfrac{272}{25}=10{,}88;\ \sigma=\sqrt{\dfrac{3238}{25}-10{,}88^2}=3{,}338$

B) $p(x>12{,}5)=p\left(z>\dfrac{12{,}5-10{,}88}{3{,}338}\right)=p(z>0{,}49)=1-p(z\le 0{,}49)=1-F(0{,}49)=$

$=1-0{,}6879=0{,}3121$

114º.- Las precipitaciones anuales de una ciudad son, en media, de 2000 ml/m^2, con una desviación típica de 300 ml/m^2. Calcula, suponiendo distribución normal, la probabilidad de que un año determinado la lluvia:

a) No supere los 1200 ml/m^2.
b) Supere los 1500 ml.
c) Esté entre los 1700 y los 2300 ml.

Solución: A) $p(x\le 1200)=p\left(z\le\dfrac{1200-2000}{300}\right)=p(z\le -2{,}67)=p(z\ge 2{,}67)=1-p(z\le 2{,}67)=$

$=1-0{,}9962=0{,}0038$

B) $p(x\ge 1500)=p\left(z\ge\dfrac{1500-2000}{300}\right)=p(z\ge -1{,}67)=p(z\le 1{,}67)=0{,}9525$

C) $p(1700\le x\le 2300)=p\left(\dfrac{1700-2000}{300}\le z\le\dfrac{2300-2000}{300}\right)=p(-1\le z\le 1)=$

$=p(z\le 1)-p(z\le -1)=p(z\le 1)-[1-p(z<1)]=2\cdot p(z\le 1)-1=2\cdot 0{,}8413-1=0{,}6826$

115º.- Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm y una desviación típica de 5. Calcula cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm.

Solución: $p(65 \le x \le 70) = p\left(\frac{65-66}{5} \le z \le \frac{70-66}{5}\right) = p(-0{,}2 \le z \le 0{,}8) =$

$= p(z \le 0{,}8) - p(z \le -0{,}2) = p(z \le 0{,}8) - p(z \ge 0{,}2) = p(z \le 0{,}8) - [1 - p(z < 0{,}2)] =$

$= 0{,}7881 - 1 + 0{,}5793 = 0{,}3674 \Rightarrow 36{,}74\% de 800 = \frac{36{,}74}{100} \cdot 800 \approx 293 \textit{ recién nacidos}$

116º.- En un examen a un gran número de estudiantes, se comprobó que las calificaciones obtenidas correspondían razonablemente a una distribución normal con calificación media de 6 y desviación típica de 1. Elegido al azar un estudiante, calcula cuál es la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 7,1.

Solución: $p(6{,}7 \le x \le 7{,}1) = p\left(\frac{6{,}7-6}{1} \le z \le \frac{7{,}1-6}{1}\right) = p(0{,}7 \le z \le 1{,}1) =$

$= p(z \le 1{,}1) - p(z \le 0{,}7) = 0{,}8643 - 0{,}7580 = 0{,}1063$

117º.- Los ingresos diarios en una empresa tienen una distribución normal, con media 35560 y desviación típica 2530 euros. Justifica si es razonable o no el esperar obtener un día unas ventas superiores a 55000 euros. Calcula cuántos días en un año se espera obtener unas ventas superiores a 40620 euros.

Solución: $p(x > 55000) = p\left(z > \frac{55000-35560}{2530}\right) = p(z > 7{,}68) = 1 - p(z \le 7{,}68) = 0$

$p(x > 40620) = p\left(z > \frac{40620-35560}{2530}\right) = p(z > 2) = 1 - p(z \le 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 \Rightarrow 2{,}28\%$

$\Rightarrow 2{,}28\% de 365 = \frac{2{,}28}{100} \cdot 365 = 8{,}32 \Rightarrow 8 \textit{ días}$

118º.- El peso de las truchas en una piscifactoría sigue una ley N(200,50). Se extrae una al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso exceda los 230 gramos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?

Solución: A) $p(x \le 175) = p\left(z \le \frac{175-200}{50}\right) = p(z \le -0{,}5) = p(z \ge 0{,}5) = 1 - p(z > 0{,}5) = 0{,}3085$

B) $p(x > 230) = p\left(z > \frac{230-200}{50}\right) = p(z > 0{,}6) = 1 - p(z \le 0{,}6) = 0{,}2743$

C) $p(225 \le x \le 275) = p\left(\frac{225-200}{50} \le z \le \frac{275-200}{50}\right) = p(0{,}5 \le z \le 1{,}5) =$

$= p(z \le 1{,}5) - p(z \le 0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$

119º.- El peso de los toros de una determinada ganadería se distribuye como una distribución normal de 500 kg de media y 45 kg de desviación típica. Si la ganadería tiene 100 toros:

a) ¿Cuántos pesarán más de 500 kg?
b) ¿Cuántos pesarán menos de 480 kg?
c) ¿Cuántos pesarán entre 490 y 510 kg?

Solución: A) $p(x > 500) = p(z > 0) = 1 - p(z \leq 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow 50 toros$

B) $p(x < 4800) = p\left(z < \frac{-20}{45}\right) = p(z < -0{,}44) = p(z > 0{,}44) = 1 - p(z \leq 0{,}44) = 0{,}3300$

$\Rightarrow 100 \cdot 0{,}33 = 33 toros$

C) $p(490 \leq x \leq 510) = p\left(\frac{490-500}{45} \leq z \leq \frac{510-500}{45}\right) = p(-0{,}22 \leq z \leq 0{,}22) =$

$= p(z \leq 0{,}22) - p(z \leq -0{,}22) = p(z \leq 0{,}22) - p(z \geq 0{,}22) = p(z \leq 0{,}22) - [1 - p(z \leq 0{,}22)] =$

$= 0{,}5871 - 1 + 0{,}5871 = 0{,}1742 \Rightarrow 17 toros$

120º.- Sea x una variable aleatoria que mide la estatura de los individuos de una población y que se distribuye según una normal de media 1,74 y desviación típica σ.

a) Calcula la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga una estatura inferior o igual a la media.

b) Si la desviación estándar es 0,05, calcula la probabilidad de que la estatura de un individuo elegido al azar esté comprendida entre 1,64 y 1,84.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga una estatura inferior a 1,84?

Solución: A) $N(1{,}74;\sigma) \Rightarrow p(x \leq 1{,}74) = p\left(z \leq \frac{1{,}74 - 1{,}74}{\sigma}\right) = p(z \leq 0) = 0{,}5000$

B) $N(1{,}74;0{,}05) \Rightarrow p(1{,}64 \leq x \leq 1{,}84) = p\left(\frac{1{,}64-1{,}74}{0{,}05} \leq z \leq \frac{1{,}84-1{,}74}{0{,}05}\right) = p(-2 \leq z \leq 2) =$

$= p(z \leq 2) - p(z \leq -2) = p(z \leq 2) - p(z \geq 2) = p(z \leq 2) - [1 - p(z \leq 2)] =$

$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}9544$

C) $p(x \leq 1{,}84) = p\left(z \leq \frac{1{,}84 - 1{,}74}{0{,}05}\right) = p(z \leq 2) = 0{,}9772$

121º.- La compañía aérea "Avión" sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una ley normal, con una retraso medio de 10 minutos y desviación típica de 5 minutos. Calcula:

a) Probabilidad de que un vuelo no tenga retraso.

b) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 10 minutos de retraso.

c) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.

Solución: A) $N(10{,}5) \Rightarrow p(x \leq 0) = p\left(z \leq \frac{0-10}{5}\right) = p(z \leq -2) = p(z \geq 2) = 1 - p(z < 2) =$

$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

B) $p(x \leq 10) = p\left(z \leq \frac{10-10}{5}\right) = p(z \leq 0) = 0{,}5000$

C) $p(x \leq 20) = p\left(z \leq \frac{20-10}{5}\right) = p(z \leq 2) = 0{,}9772$

122º.- Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

a) Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.
b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50 % de la población?
c) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

Solución: A) $N(100{,}15)\Rightarrow p(95\le x\le 110)=p\left(\frac{95-100}{15}\le z\le\frac{110-100}{15}\right)=p(-0{,}332\le z\le 0{,}67)=$

$=p(z\le 0{,}67)-p(z\le -0{,}33)=p(z\le 0{,}67)-p(z>0{,}33)=p(z\le 0{,}67)-[1-p(z\le 0{,}33)]=$

$=0{,}7486-1+0{,}6293=0{,}3779$

B) $50\%\Rightarrow 0{,}5000;\Rightarrow p(-a\le z\le a)=0{,}5\Rightarrow p(0\le z\le a)=0{,}25\Rightarrow p(z\le a)-p(z\le 0)=0{,}25\Rightarrow$

$\Rightarrow p(z\le a)=0{,}25+0{,}5=0{,}75\Rightarrow a=0{,}675\Rightarrow\frac{x-100}{15}=0{,}675\Rightarrow x\approx 110\Rightarrow(90{,}110)$

C) $p(x>125)=p\left(z>\frac{125-100}{15}\right)=p(z>1{,}67)=1-p(z\le 1{,}67)=1-0{,}9525=0{,}0475$

$\Rightarrow 2500\cdot 0{,}0475=119 con CI>125$

123º.- Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal N(65,18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura) de modo que haya en el primero un 20 % de la población, un 65 % en el segundo y un 15 % en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Solución: **A)** $N(65{,}18);20\% baja\Rightarrow p(x\le a)=p\left(z\le\frac{a-65}{18}\right)=(negativo)=0{,}18\Rightarrow$

$\Rightarrow p\left(z\ge\frac{-a+65}{18}\right)=0{,}80;Tabla\Rightarrow\frac{-a+65}{18}=\frac{0{,}84+0{,}85}{2}=0{,}845\Rightarrow a=49{,}79$

B) $15\% excelente\Rightarrow p(x\ge a)=0{,}15\Rightarrow p\left(z\ge\frac{a-65}{18}\right)=1-p\left(z<\frac{a-65}{18}\right)=0{,}15\Rightarrow$

$\Rightarrow p\left(z<\frac{a-65}{18}\right)=0{,}85;Tabla\Rightarrow p(z<1{,}04)=0{,}85\Rightarrow\frac{a-65}{18}=1{,}04\Rightarrow a=83{,}72$

REPARTO: $x\le 49{,}79\Rightarrow baja;\quad 49{,}79<x<83{,}72\Rightarrow aceptable;\quad 83{,}72\le x\Rightarrow excelente$

124º.- Aplicando un test a un grupo de 300 personas, se ha obtenido una distribución normal de media 50 y desviación 5. Se pide:

a) Calcula las puntuaciones que delimitan el 30 % central de la distribución.

b) Calcula el número de personas que obtiene en el test más de 56 puntos o menos de 47.

Solución: **A)** Puntuación que limita 30 % central: 70 % fuera; es decir, 35 % por encima y 35 % por debajo.

$p(x\le a)=p\left(z\le\frac{a-50}{5}\right)=(negativo)=0{,}35\Rightarrow$

$\Rightarrow p\left(z\ge\frac{-a+50}{5}\right)=1-p\left(z<\frac{-a+50}{5}\right)=0{,}35\Rightarrow p\left(z<\frac{-a+50}{5}\right)=0{,}65\Rightarrow tabla\Rightarrow$

$\Rightarrow p(z<0{,}39)=0{,}65\Rightarrow\frac{-a+50}{5}=0{,}39\Rightarrow a=48{,}05$

B) $p(47\le x\le 56)=p\left(\frac{47-50}{5}\le z\le\frac{56-50}{5}\right)=p(-0{,}6\le z\le 1{,}2)=$

$=p(z\le 1{,}2)-p(z\le -0{,}6)=0{,}8849-(1-0{,}7257)=0{,}6106$

$\Rightarrow p(x>56)+p(x<47)=1-0{,}6106=0{,}3894\Rightarrow 300\cdot 0{,}3894\approx 117 personas$

125º.- Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen normalmente con media 0. Además $p(x \geq 2) = p(y \geq 3) = 0{,}1587$. Calcula sus respectivas varianzas.

Solución: $x : N(0, \sigma_1); \quad y : N(0, \sigma_2)$

$$p(x \geq 2) = 0{,}1587 \Rightarrow p(x < 2) = 0{,}8413 \qquad p\left(z < \frac{2-0}{\sigma_1}\right) = 0{,}8413 \Rightarrow tabla \Rightarrow$$

$$z : N(0{,}1) \Rightarrow p(z \leq 1) = 0{,}8413 \qquad \Rightarrow \frac{2-0}{\sigma_1} = 1 \Rightarrow \sigma_1 = 2$$

Análogamente: $\sigma_2 = 3 \Rightarrow p(y < 3) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413 = p\left(z < \frac{3-0}{\sigma_2}\right)$

Varianzas

126º.- a) Los litros de gasolina distribuidos cada día por una gasolinera es una variable normal de media 15.000 litros y desviación típica de 1000 litros. Determina la cantidad diaria que hay que tener dispuesta a la venta para poder satisfacer la demanda el 95 % de los días.
b) Si la gasolinera compra el litro de gasolina a 75 céntimos de euro y lo vende a 125 céntimos, ¿qué porcentaje de días sus beneficios superarán las 8000 euros?

Solución: **A)** $p(x < a) = 0{,}95 \Rightarrow p\left(z < \frac{a-15000}{1000}\right) = 0{,}95; Tabla \Rightarrow \frac{1{,}64+1{,}65}{2} = 1{,}645 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a-15000}{1000} = 1{,}645 \Rightarrow a = 15000 + 1645 = 16645L$$

B) $\frac{800000}{125-75} = 16000L \Rightarrow p(x > 16000) = 1 - p(x \leq 16000) = 1 - p\left(z \leq \frac{16000-15000}{1000}\right) =$

$$= 1 - p(z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587 \Rightarrow 15{,}87\%$$

127º.- Las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos en un examen de Matemáticas siguen una distribución normal $N(5{,}5;1{,}0)$. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya obtenido una nota:

a) Superior a 7.
b) Comprendida entre 5 y 7.
c) Inferior a 5.

Solución: A) $N(5{,}5;1{,}0) \Rightarrow p(x > 7) = p\left(z > \frac{7-5{,}5}{1{,}0}\right) = p(z > 1{,}5) = 1 - p(z \leq 1{,}5) =$

$$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

B) $p(5 \leq x \leq 7) = p\left(\frac{5-5{,}5}{1{,}0} \leq z \leq \frac{7-5{,}5}{1{,}0}\right) = p(-0{,}5 \leq z \leq 1{,}5) = p(z \leq 1{,}5) - p(z \leq -0{,}5) =$

$$= p(z \leq 1{,}5) - p(z \geq 0{,}5) = p(z \leq 1{,}5) - [1 - p(z < 0{,}5)] = 0{,}9332 - [1 - 0{,}6915] = 0{,}6247$$

C) $p(x < 5) = p\left(z < \frac{5-5{,}5}{1{,}0}\right) = p(z < -0{,}5) = p(z > 0{,}5) = 1 - p(z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

128º.- La tasa de desempleo en una Comunidad Autónoma es del 16 % de la población activa. Se selecciona una muestra de cien personas de esa población. Di cuál es la probabilidad de que esa muestra contenga:

a) Al menos 10 desempleados.
b) No más de 5 desempleados.

c) Exactamente 8 desempleados.

Solución: $\left.\begin{array}{l} 16\%; n = 100; \mu = n\cdot p = 100\cdot 0{,}16 = 16 \\ \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{100\cdot 0{,}16\cdot(1-0{,}16)} = 3{,}67 \end{array}\right\} \Rightarrow N(16;3{,}67)$

A) $p(x \geq 10) = p\left(z \geq \dfrac{10-16}{3{,}67}\right) = p(z \geq -1{,}63) = p(z \leq 1{,}63) = 0{,}9484$

B) $p(x \leq 5) = p\left(z \leq \dfrac{5-16}{3{,}67}\right) = p(z \leq -3{,}00) = p(z \geq 3) = 1 - p(z < 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

C) $p(x = 8) = 0$

129º.- Se ha observado durante un largo periodo de tiempo que la cantidad semanal gastada en mantenimiento y reparaciones de una empresa presenta una distribución normal de media 400 € y desviación típica 20 €. Si el presupuesto para la próxima semana para esa partida es de 450 €, di cuál es la probabilidad de que los costes reales superen lo presupuestado. ¿Y de que el coste real sea inferior a 350 €?

Solución: $N(400{,}20)$

A) $p(x > 450) = p\left(z > \dfrac{450-400}{20}\right) = p(z > 2{,}5) = 1 - p(z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

B) $p(x < 350) = p\left(z < \dfrac{350-400}{20}\right) = p(z < 2{,}5) = p(z > 2{,}5) = 1 - p(z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

130º.- El tiempo que necesitan los alumnos para terminar los exámenes de un profesor es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ = 60 minutos y desviación típica σ = 10 minutos. Si en un examen de dicho profesor se limita el tiempo a 1 hora 15 minutos, ¿qué porcentaje de alumnos terminará el examen?

¿Cuánto tiempo debería durar para que el 90 % de los alumnos finalicen a tiempo?

Solución: $N(60{,}10)$; 1 h 15 min = 75 min

A) $p(x \leq 75) = p\left(z \leq \dfrac{75-60}{10}\right) = p(z \leq 1{,}5) = 0{,}9332$

B) $p(x \leq a) = 0{,}9000 \Rightarrow p\left(z \leq \dfrac{a-60}{10}\right) = 0{,}9000 \Rightarrow \dfrac{1{,}28+1{,}29}{2} = \dfrac{a-60}{10} \Rightarrow a = 66{,}425\,\text{min}$

131º.- Un profesor tiene la costumbre de poner las calificaciones siguiendo una distribución normal. Reserva el Sobresaliente para el 19 % de los alumnos que obtengan las calificaciones más altas. En un examen, la distribución ha resultado ser $N(6{,}2;1{,}5)$. ¿Qué nota se ha debido obtener para conseguir la calificación de Sobresaliente?

Solución: Sobresaliente: 10 %; $N(6{,}2;1{,}5)$;

$$p(x \geq a) = 0{,}10 \Rightarrow p\left(z \geq \frac{a-6{,}2}{1{,}5}\right) = 0{,}10 \Rightarrow 1 - p\left(z < \frac{a-6{,}2}{1{,}5}\right) = 0{,}10 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p\left(z < \dfrac{a-6{,}2}{1{,}5}\right) = 0{,}90 \\ TABLA: p\left(z < \dfrac{1{,}28+1{,}29}{2}\right) = 0{,}90 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-6{,}2}{1{,}5} = 1{,}285 \Rightarrow a = 1{,}5\cdot 1{,}285 + 6{,}2 = 8{,}1275 \Rightarrow a = 8{,}13$$

132º.- Una compañía de seguros estima que la probabilidad de que un asegurado tenga un accidente de motocicleta es del 60 %. De 10 asegurados:

a) ¿Cuál es el número medio de accidentados que se puede esperar?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de accidentados sea superior a 4?

Solución: Accidente motocicleta: 60 %; n = 10 asegurados; B(10;0,6); q = 0,4

A) $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ accidentados

B) $p(x>4) = 1 - p(x \le 4) = 1 - [p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4)] =$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}4^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{9} + \binom{10}{2} \cdot 0{,}6^{2} \cdot 0{,}4^{8} + \binom{10}{3} \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{7} + \binom{10}{4} \cdot 0{,}6^{4} \cdot 0{,}4^{6} \right] =$$

$$= 1 - [0{,}0060 + 0{,}0403 + 0{,}1209 + 0{,}2150 + 0{,}2508] = 0{,}367$$