4 Vectores en el espacio

ACTIVIDADES INICIALES

4.I. Efectúa las siguientes operaciones en R³

a) $\left(5, -\frac{1}{2}, 4\right) + \left(\frac{1}{3}, -7, 2\right)$ **b)** $3\left(2, -1, \frac{3}{4}\right)$ **c)** $6(2, 3, -1) + 4(1, -5, 2)$

a) $\left(\frac{16}{3}, \frac{-15}{2}, 6\right)$ b) $\left(6, -3, \frac{9}{4}\right)$ c) $(16, -2, 2)$

4.II. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* para que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $(a, b + 2, 7) = (5, 1, 8) - (a, -3, 1)$

b) $\left(4 - b, 3a + b, \frac{2}{5}\right) = 2(a + 2b, -1, c)$

c) $(a + b, b + c, c + a) = (-2, 3, 1)$

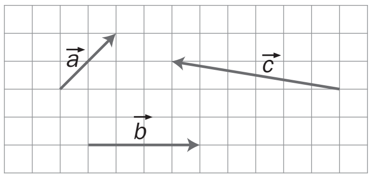
a) $a = \frac{5}{2}$, $b = 2$

b) $a = \frac{-14}{13}$, $b = \frac{16}{13}$, $c = \frac{2}{5}$

c) $a = -2$, $b = 0$, $c = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

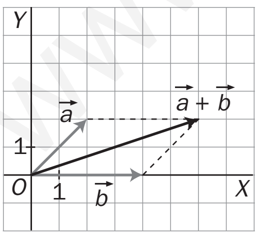
4.1 Dados los vectores de la figura derecha, dibuja los correspondientes a las siguientes operaciones.



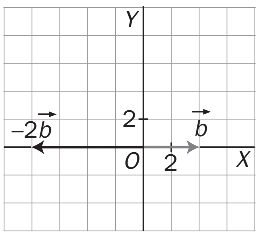
a) $\vec{a} + \vec{b}$ **c)** $-2\vec{b}$ **e)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $3\vec{a}$ **d)** $3\vec{a} - 2\vec{b}$ **f)** $3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$

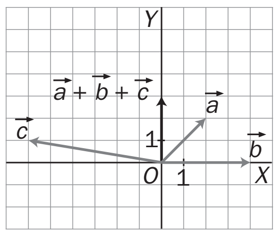
a)



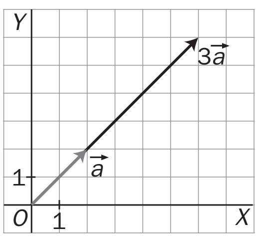
c)



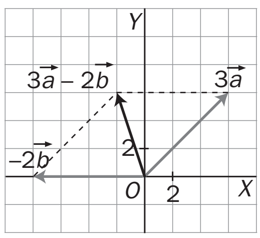
e)



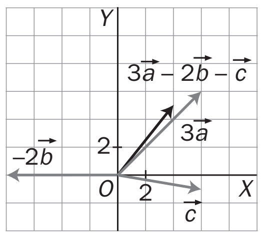
b)



d)



f)



4.2 Estudia la dependencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores, dados por sus coordenadas en una base *B* de V^3.

a) $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (2, 1, 3), $\vec{c}$ = (1, 0, 1)

b) $\vec{a}$ = (2, 0, 1), $\vec{b}$ = (0, 1, 0), $\vec{c}$ = (3, 1, 2)

a) Son linealmente independientes si no es posible expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros dos.

(1, 2, 3) = *a*(2, 1, 3) + *b*(1, 0, 1)

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 2 = a \\ 3 = 3a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 4 + b \\ 2 = a \\ 3 = 6 + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Luego $\vec{a}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ ya que $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

De otro modo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 + 6 – 3 – 4 = 0 $\Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes.

b) $\vec{a}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ ya que su determinante es no nulo, o lo que es lo mismo, queda un sistema incompatible.

4.3 Comprueba si forman base de V^3 los vectores $\vec{u}_1$ = (1, 0, –3); $\vec{u}_2$ = (1, –1, 1); $\vec{u}_3$ = (0, 2, –8) expresados por sus coordenadas en una base de V^3.

No forman base porque no son linealmente independientes, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$.

4.4 a) Comprueba que los vectores $\vec{u}_1$ = (2, 1, 0); $\vec{u}_2$ = (3, –1, 0); $\vec{u}_3$ = (1, 1, 1) expresados en una base *B* de V^3, constituyen a su vez otra base de dicho espacio.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{v}$ = (3, 1, 7), dado en función de la base *B*, respecto de la nueva base *B*' = {$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$}.

a) Tres vectores forman base si son linealmente independientes, y en efecto el determinante es no nulo.

b) (3, 1, 7) = *a*(2, 1, 0) + *b*(3, –1, 0) + *c*(1, 1, 1) y resolviendo el sistema se obtiene que $\vec{v} = \frac{-22}{5}\vec{u}_1 + \frac{8}{5}\vec{u}_2 + 7\vec{u}_3$.

4.5 Sean los vectores $\vec{a}$ = (2, –3, 0), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) y $\vec{c}$ = (0, –5, –2). Haz las siguientes operaciones.

a) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

b) $2\vec{a} - 3\vec{c} + 5\vec{b}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

d) $\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c})$

e) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

f) $(2\vec{a} + 4\vec{c})(\vec{c} - \vec{b})$

g) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$

h) $(\vec{c} - \vec{a})^2 + (\vec{b} - \vec{a})^2$

a) (4, –13, –8)
b) (9, 19, 26)
c) –4
d) 11
e) –8
f) 226
g) –7
h) 54

4.6 Calcula el valor de *m* para que la proyección del vector $\vec{a}$ = (*m*, 1, 1) sobre la dirección del vector $\vec{b}$ = (5, 0 –2) sea igual a 2.

La proyección es $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{5m-2}{\sqrt{29}} = 2$.

Despejando, se comprueba que $m = \dfrac{2+2\sqrt{29}}{5}$.

4.7 Halla, en cada caso, el valor de *b* para que los vectores dados sean perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u}$ = (6, 0, –7); $\vec{v}$ = (*b*, 1 + *b*, 3)

b) $\vec{u}$ = (5 + *b*, –4, 2*b*); $\vec{v}$ = (0, 2 – *b*, 4)

c) $\vec{u}$ = (*b*, –1 + *b*, –3); $\vec{v}$ = (*b*, 2, b)

En todos los casos debe ocurrir que su producto escalar sea nulo, por tanto:

a) $b = \dfrac{7}{2}$

b) $b = \dfrac{2}{3}$

c) $b = 2$, $b = -1$

4.8 Las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de una base ortonormal son las siguientes:

$\vec{u}$ = (0, 3, 1) $\vec{v}$ = (1, 0, –2)

a) Halla $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

b) Halla $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (0, 3, 1)\cdot(1, 0, -2) = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

4.9 Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal son las siguientes:

$\vec{u}$ = (2, 3, 1) $\vec{v}$ = (–2, 1, 4)

Demuestra que $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

$\vec{u}+\vec{v} = (2, 3, 1) + (-2, 1, 4) = (0, 4, 5)$

$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+3^2+1} = \sqrt{14}$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \sqrt{21}$

Por tanto, se verifica que $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}| + |\vec{v}|$ ya que $\sqrt{41} \le \sqrt{14} + \sqrt{21}$

4.10 Se tienen los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 0); $\vec{v}$ = (2, 0, –1); $\vec{w}$ = (2, –1, –1), dados respecto de una base ortonormal *B*. Calcula:

a) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

c) Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

d) Ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ + $\vec{w}$.

a) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\ \dfrac{2}{\sqrt{10}} = 50°\ 46'\ 6{,}53''$

b) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\ \dfrac{1}{\sqrt{12}} = 73°\ 13'\ 16{,}84''$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\ \dfrac{5}{\sqrt{30}} = 24°\ 5'\ 41{,}43''$

d) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}}) = \dfrac{1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2}\sqrt{21}} = \dfrac{3}{\sqrt{42}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}}) = \text{arccos}\ \dfrac{3}{\sqrt{42}} = 62°\ 25'\ 29{,}83''$

4.11 Sean los vectores $\vec{u}$ = (2, 0, 4) y $\vec{v}$ = (*m*, 0, 3) referidos a una base ortonormal *B*.

a) Calcula *m* para que el ángulo que formen los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 60°.

b) Para este valor de *m*, halla $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y los ángulos que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con los vectores de la base.

a) $\cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2m+12}{\sqrt{2^2+4^2}\sqrt{m^2+3^2}} \Rightarrow \sqrt{20}\sqrt{9+m^2} = 4m + 24 \Rightarrow 20\,(9 + m^2) = 16m^2 + 192m + 576 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4m^2 - 192m - 396 = 0 \Rightarrow m = 24 \pm 15\sqrt{3}$

b) Para $m = 24 \pm 15\sqrt{3}$, resulta: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 60 \pm 30\sqrt{3}$, $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{1260 \pm 720\sqrt{3}}$

Los ángulos que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con los vectores de la base son, respectivamente:

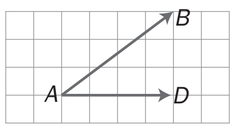
$\alpha_u = 63°\,26'\,5{,}82''$, $\beta_u = 0$, $\gamma_u = 26°\,33'\,54{,}18''$

$\alpha_v = 3°\,26'\,5{,}82''$, $\beta_v = 0$, $\gamma_v = 86°\,33'\,54{,}18''$; $\alpha'_v = 123°\,26'\,5{,}82''$, $\beta'_v = 0$, $\gamma'_v = 33°\ 26'5{,}82''$

4.12 Encuentra un vector ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal son $\vec{u}$ = (–1, 3, 5) y $\vec{v}$ = (4, 0 –5).

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15\,\vec{i} + 15\,\vec{j} - 12\,\vec{k}$, es decir, el vector (–15, 15, –12) y todos sus proporcionales.

4.13 Halla el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ de la figura, sabiendo que $\overrightarrow{AD}$ = 4 cm.



$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12\,\vec{k}$

Calculando el módulo del producto vectorial, el área pedida es 12 cm^2.

4.14 Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección:

a) ¿Cómo será su producto escalar? **b) ¿Cómo será su producto vectorial?**

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mismo sentido: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 0° = |\vec{u}||\vec{v}|$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ sentido opuesto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 180° = -|\vec{u}||\vec{v}|$

b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el misma dirección, sus coordenadas son proporcionales. Entonces $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$.

4.15 Calcula las coordenadas de un vector $\vec{a}$ de módulo 5 que sea perpendicular al mismo tiempo a los vectores $\vec{b} = (2, -3, 0)$ y $\vec{c} = (1, -4, 1)$, expresados respecto de la misma base ortonormal que el vector $\vec{a}$.

$$\vec{a} = \pm 5 \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\pm 5\sqrt{38}}{38}(3, 2, 5)$$

4.16 Halla el volumen de paralelepípedo formado sobre los vectores $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (1, 1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 2)$.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{matrix} \right\| = 29 \text{ u}^3$$

4.17 a) Determina el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (2, 5, 6)$; $\vec{v} = (1, 3, 4)$ y $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

b) Halla el volumen del paralelepípedo de lados $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 1 \text{ u}^3$

4.18 Halla el producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal son $\vec{u} = (7, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2, 5)$ y $\vec{w} = (2, 2, 4)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20$$

4.19 a) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 6)$ y $\vec{w} = (7, 8, 9)$.

b) A partir del resultado obtenido anteriormente ¿se puede afirmar algo sobre la dependencia e independencia lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

b) Son linealmente dependientes.

EJERCICIOS

Operaciones con vectores

4.20 Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal son las siguientes: $\vec{u}$ = (1, 3, 4); $\vec{v}$ = (5, 1, 3); $\vec{w}$ = (0, 1, 2), calcula la expresión de los siguientes vectores referida a la misma base:

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ y $\vec{v} + \vec{w}$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $5\vec{w}$

d) $2\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w}$

e) $3\vec{u} - 6(2\vec{v} - 3\vec{w})$

a) $\vec{u} + \vec{v}$ = (1, 3, 4) + (5, 1, 3) = (6, 4, 7)

$\vec{u} + \vec{w}$ = (1, 3, 4) + (0, 1, 2) = (1, 4, 6)

$\vec{v} + \vec{w}$ = (5, 1, 3) + (0, 1, 2) = (5, 2, 5)

b) $\vec{u} + \vec{v}$ = (1, 3, 4) + (5, 1, 3) = (6, 4, 7)

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ = (6, 4, 7) + (0, 1, 2) = (6, 5, 9)

c) $2\vec{u}$ = 2(1, 3, 4) = (2, 6, 8)

$3\vec{v}$ = 3(5, 1, 3) = (15, 3, 9)

$5\vec{w}$ = 5(0, 1, 2) = (0, 5, 10)

d) $2\vec{u} + 3\vec{v} + 5\vec{w}$ = (2, 6, 8) + (15, 3, 9) + (0, 5, 10) = (17, 14, 27)

e) Primero se calcula $2\vec{v} - 3\vec{w}$ = (10, 2, 6) – (0, 3, 6) = (10, –1, 0)

$3\vec{u} - 6(2\vec{v} - 3\vec{w})$ = (3, 9, 12) – 6(10, –1, 0) = (3, 9, 12) – (60, –6, 0) = (–57, 15, 12)

4.21 Con los vectores del ejercicio anterior completa la propiedad asociativa de la suma de vectores.

Hay que calcular las coordenadas del vector $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ y las del vector $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ y comprobar que son las mismas.

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ = [(1, 3, 4) + (5, 1, 3)] + (0, 1, 2) = (6, 4, 7) + (0, 1, 2) = (6, 5, 9)

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ = (1, 3, 4) + [(5, 1, 3) + (0, 1, 2) = (1, 3, 4) + (5, 2, 5) = (6, 5, 9)

Luego, en efecto, se verifica la propiedad asociativa de la suma $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

4.22 Halla las coordenadas *m* y *n* del vector $\vec{u}$ = (2, *m*, *n*) de manera que $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$, siendo $\vec{v}$ = (1, 1, 5) y $\vec{w}$ = (–1, 0, 1).

$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} \Rightarrow (2, m, n) = (1, 1, 5) - (-1, 0, 1)$

Igualando componente a componente, se obtienen las siguientes igualdades.

$$\begin{cases} 2 = 1 + 1 \\ m = 1 + 0 \\ n = 5 - 1 \end{cases} \Rightarrow m = 1;\ n = 4$$

Dependencia e independencia lineal. Bases y coordenadas

4.23 Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores {(1, 2, 3); (2, 1, 3); (1, 0, 1)}.

Escribe un vector como combinación lineal de los restantes: (1, 2, 3) = k(2, 1, 3) + h(1, 0, 1)

Identificando las componentes, se obtiene el sistema: $\begin{cases} 1 = 2k + h \\ 2 = \ \ k \\ 3 = 3k + h \end{cases}$

El sistema tiene solución, ya que k = 2 y h = –3. Luego el vector (1, 2, 3) es combinación lineal de los otros dos; en consecuencia, los vectores dados son linealmente dependientes.

4.24 Demuestra que el conjunto de vectores {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)} es linealmente independiente.

Si k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0), entonces $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Por consiguiente, son linealmente independientes.

4.25 (PAU) a) Determina los valores de *a* para los que resulten linealmente dependientes los vectores (–2, *a*, *a*), (*a*, –2, *a*) y (*a*, *a*, –2).

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = -8 + 2a^3 + 6a^2 = 2(a-1)(a+2)^2$

Cuando a = 1 ó a = –2 los vectores son linealmente dependientes.

b) Si a = 1: (–2, 1, 1) = x(1, –2, 1) + y(1, 1, –2)

$\begin{cases} x + y = -2 \\ -2x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. Por tanto: (–2, 1, 1) = –1 (1, –2, 1) –1 (1, 1, –2)

Si a = –2: La dependencia lineal es obvia, pues los tres son el mismo vector (–2, –2, –2).

4.26 Si tres vectores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ son linealmente independientes:

a) ¿También serán independientes los vectores $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$?

b) ¿Y los vectores $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$?

a) Si $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ son linealmente independientes, se pueden tomar como base. Por tanto, para ver si:

$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$; $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

son linealmente independientes, se calcula el determinante de la matriz formada con sus coordenadas respecto de la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\begin{matrix} \vec{v}_1 = (1, 1, -2) \\ \vec{v}_2 = (1, 2, -1) \\ \vec{v}_3 = (1, 1, 0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes.

b) Los vectores $\vec{w}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ y $\vec{w}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ tienen las siguientes coordenadas respecto de la base B:

$\vec{w}_1$ = (1, 1, 0); $\vec{w}_2$ = (1, –2, 0). Son linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales.

4.27 Dada la base del espacio vectorial V^3, B = $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}$, referida a una base ortonormal, comprueba si es normada, ortogonal u ortonormal.

$|\vec{u}_1| = \sqrt{\frac{1}{5}+0+\frac{4}{5}} = 1$; $|\vec{u}_2| = \sqrt{0+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = 1$; $|\vec{u}_3| = \sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+0} = 1$

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 + 0 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ no son ortogonales.

Luego los vectores dados no son ortogonales y sí unitarios. En consecuencia, la base B es normada.

4.28 Encuentra una base ortonormal de V^3 que contenga un vector proporcional a (1, –1, 2).

Se busca un vector ortogonal al dado, por ejemplo, $\vec{v}$ = (1, 1, 0) ya que (1, 1, 0) · (1, –1, 2) = 1 – 1 = 0.

Para obtener un vector ortogonal a $\vec{u}$ = (1, –1, 2) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0) basta con hallar el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 2) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2).$

Luego los vectores $\vec{u}$ = (1, –1, 2), $\vec{v}$ = (1, 1, 0), $\vec{w}$ = (–2, 2, 2) constituyen una base ortogonal. Para que sea ortonormal se dividen las coordenadas de cada vector por su módulo.

$|\vec{u}| = |(1, -1, 2)| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$|\vec{v}| = |(1, 1, 0)| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$|\vec{w}| = |(-2, 2, 2)| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \vec{u}_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

La base buscada es $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

4.29 Si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ constituyen una base de V^3, ¿formarán base los siguientes conjuntos de vectores?

a) $\vec{v}_1 - \vec{v}_2, -\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1, \vec{v}_3 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

b) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3, 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$

a) Las coordenadas de $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, $-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1$ y $\vec{v}_3 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ respecto de la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ = (1, –1, 0); $-\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1$ = (2, –1, 0) y $\vec{v}_3 - \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ = (–1, 1, 1).

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de V^3.

b) Del mismo modo: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ = (1, 1, –1); $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ = (1, –1, 1) y $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$ = (2, 3, –3).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$, estos tres vectores son linealmente dependientes. Por tanto, no constituyen una base.

4.30 Siendo $\vec{b}_1 = \dfrac{(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})}{2}$, $\vec{b}_2 = \dfrac{(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})}{2}$ y $\vec{b}_3 = \vec{k}$:

a) Comprueba que forman una base ortonormal de V^3, siendo $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ la base canónica de V^3.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecto de la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

a) La base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es ortonormal ya que $|\vec{b}_1| = 1$; $|\vec{b}_2| = 1$; $|\vec{b}_3| = 1$.

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right) = 0$; $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$; $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$

b) Si las coordenadas del vector $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecto de B son (a, b, c) entonces:

$(1, 1, 1) = a\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + b\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right) + c(0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{1}{2}b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{3}{2}b = \sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a - \dfrac{1}{2}b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas del vector $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ son: $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, 1\right)$

4.31 (PAU) Se consideran los vectores de V^3, $\vec{u} = (0, 0, 1)$ y $\vec{v} = (\text{sen}\, t, \cos t, 0)$ (t es un número real arbitrario). Encuentra, si es posible, un tercer vector que forme junto con ellos una base ortonormal.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son unitarios y ortogonales. Por tanto, el tercer vector puede ser $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \text{sen}\,t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = -\cos t\,\vec{i} + \text{sen}\,t\,\vec{j} = (-\cos t, \text{sen}\,t, 0).$$

Este vector es unitario, por consiguiente la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es ortonormal. También lo es $B' = \{\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w}\}$.

4.32 (PAU) En un espacio vectorial E sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vectores linealmente independientes. Comprueba si los vectores: $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ y $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \vec{u}_1$ son linealmente dependientes o independientes y, en caso de dependencia lineal, encuentra la relación entre ellos. Razona la respuesta.

$\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$ respecto de la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes.

Para hallar la relación que existe entre ellos, se expresa uno como combinación lineal de los otros dos.

$(1, -1, 0) = a(0, 1, -1) + b(-1, 0, 1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = -b \\ -1 = a \\ 0 = -a + b \end{cases}$. Por tanto, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ o $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = 0$

4.33 (PAU) Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 1, 1); $\vec{v}$ = (0, 1, –1) y $\vec{w}$ = (1, 1, 0) de V^3

a) ¿Son linealmente independientes?

b) Halla un vector $\vec{z}$ tal que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$ sean linealmente dependientes.

c) Halla, si es posible, un vector $\vec{t}$ tal que {$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$} sea una base de V^3.

a) Como det($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) $\neq$ 0 entonces $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son linealmente independientes.

b) Basta que $\vec{z}$ sea un vector cualquiera que se obtenga como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como por ejemplo: $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, para que este vector sea linealmente dependiente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Nota: Dado que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son linealmente independientes, cualquier vector que se añada de **R³** dependerá linealmente de ellos.

c) $\vec{t}$ será cualquier vector cuyas coordenadas hagan que det($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$) $\neq$ 0. Sea, por ejemplo:

$\vec{t}$ = (0, 0, 1) ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

4.34 (PAU) a) Estudia si los vectores $\vec{v}_1$ = (2, 1, –1) y $\vec{v}_2$ = (1, –1, 1) son linealmente independientes.

b) Escribe la relación que deben verificar las coordenadas de un vector $\vec{v}$ = (*a*, *b*, *c*) para que sea combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

a) Son linealmente independientes al ser sus coordenadas no proporcionales.

b) Sea la combinación lineal: (*a*, *b*, *c*) = λ (2, 1, –1) + μ (1, –1, 1). Operando e igualando se obtiene:

$a = 2\lambda + \mu$; $b = \lambda - \mu$; $c = -\lambda + \mu$.

Resolviendo el sistema se obtiene: $\lambda = \dfrac{a+b}{3}$ y $\mu = \dfrac{a+2c}{3}$.

De tal manera que: $(a, b, c) = \dfrac{a+b}{3}(2, 1, -1) + \dfrac{a+2c}{3}(1, -1, 1)$.

4.35 (PAU) ¿Son $\vec{a}$ = (1, 2, 3) y $\vec{b}$ = (3, 2, 1) linealmente independientes? Da un vector, $\vec{c}$, de modo que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ sea una base de V^3.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes ya que sus coordenadas no son proporcionales.

Para hallar un vector $\vec{c}$ que junto con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean una base de V^3, basta con que $\vec{c}$ sea un vector tal que $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sean linealmente independientes o, lo que es lo mismo, que det($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) $\neq$ 0. Por ejemplo, el vector $\vec{c}$ = (0, 0, 1) hace que *B* = {$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$} sea una base de V^3.

Producto escalar

4.36 Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{f}$ = (2, 3, 1) N al producir en un móvil un desplazamiento dado por el vector $\vec{d}$ = (3, 4, 5) m, estando los vectores referidos a una base ortonormal.

T = $\vec{f} \cdot \vec{d}$ = (2 N, 3 N, 1 N) (3 m, 4 m, 5 m) = 2 · 3 J + 3 · 4 J + 1 · 5 J = 23 J

4.37 Dos fuerzas $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$ tienen 5 y 2 Newton de intensidad, respectivamente; el ángulo que forman es igual a 60°. Halla el producto escalar de ambas fuerzas.

$\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = |\vec{f}_1|\,|\vec{f}_2| \cos(\widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2}) = |\vec{f}_1|\,|\vec{f}_2| \cos 60° = 5 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 5$

4.38 Halla el ángulo que forman las fuerzas $\vec{f}_1$ = (2, 3, 4) N y $\vec{f}_2$ = (1, 5, 2) N. Calcula el trabajo que realiza la fuerza $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$ al producir en un cuerpo un desplazamiento dado por el vector $\vec{d}$ = (2, 3, 6) m.

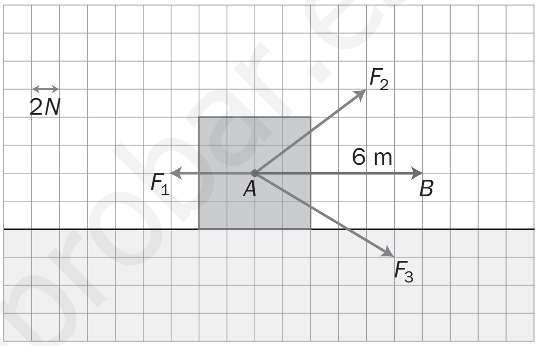
$$\cos(\widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2}) = \frac{\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2}{|\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2|} = \frac{2+15+8}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{1^2+5^2+2^2}} = \frac{25}{\sqrt{870}}$$

$$(\widehat{\vec{f}_1, \vec{f}_2}) = \arccos\frac{25}{\sqrt{870}} = 32° \, 3' \, 2{,}3''$$

$\vec{f}_1 + \vec{f}_2$ = (2, 3, 4) + (1, 5, 2) = (3, 8, 6)

$T = (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \cdot \vec{d}$ = (3, 8, 6) · (2, 3, 6) = (3 · 2 + 8 · 3 + 6 · 6) Nm = 66 J

4.39 Calcula el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el punto *A* de la figura, cuando provocan un desplazamiento dado por el vector $\overrightarrow{AB}$.



Teniendo en cuenta que cada cuadrado equivale a 2 N y 1 m:
((–6, 0)+ (8, 6)+ (10, –6))·(6, 0) = (12, 0)·(6, 0) = 72 Nm = 72 J

4.40 En una base ortonormal los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen las siguientes coordenadas: $\vec{u}$ = (1, 2, 3) y $\vec{v}$ = (2, –1, 4). Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de cada vector.

c) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) El valor de *m* para que el vector $\vec{w}$ = (0, 3, *m*) sea ortogonal al vector $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = (1, 2, 3) · (2, –1, 4) = 1 · 2 + 2 (–1) + 3 · 4 = 12

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(1,2,3)\cdot(1,2,3)} = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(2,-1,4)\cdot(2,-1,4)} = \sqrt{2^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{21}$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{12}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$ = 0,699 de donde $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ = arccos 0,699 = 45° 39' 11''

d) Para que los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales su producto escalar tiene que ser cero:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (2, -1, 4) \cdot (0, 3, m) = 0 \Rightarrow -3 + 4m = 0 \Rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

4.41 Halla los valores *x* e *y* para que el vector (*x*, *y*, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, –1).

$(x, y, 1) \perp (3, 2, 0) \Rightarrow 3x + 2y = 0$; $(x, y, 1) \perp (2, 1, -1) \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$
Resolviendo el sistema, se obtiene: $x = 2$; $y = -3$.

4.42 Comprueba si son unitarios los vectores, $\vec{a} = \left(0, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ y $\vec{b}$ = (2, 1, 3), estando referidos a una base ortonormal.

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{-3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = 1 \Rightarrow \vec{a}$ es unitario. $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14} \neq 1 \Rightarrow \vec{b}$ no es unitario.

4.43 Halla la proyección del vector $\vec{u}$ = (2, 1, 3) sobre el vector $\vec{v}$ = (–3, 4, 2), dados respecto de una base ortonormal.

Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ = $\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{2(-3)+1\cdot 4+3\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+4^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$

4.44 Sea $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ una base tal que $|\vec{u}_1| = 2$, $|\vec{u}_2| = 3$, $|\vec{u}_3| = 1$ y $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = 4$, $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3 = 3$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 = 12$. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = 11\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ y $\vec{v} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ sean ortogonales.

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow (11\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3)\cdot(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = 0 \Leftrightarrow$

$11\vec{u}_1^2 + 22\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + 11\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3 + m\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 + 2m\vec{u}_2^2 + m\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 + 3\vec{u}_3\cdot\vec{u}_1 + 6\vec{u}_3\cdot\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3^2 =$

$= 11\vec{u}_1^2 + 2m\vec{u}_2^2 + 3\vec{u}_3^2 + (22 + m)\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + 14\vec{u}_1\cdot\vec{u}_3 + (m + 6)\vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 =$

$= 11\cdot 2^2 + 2m\cdot 3^2 + 3 + (22 + m)\cdot 4 + 14\cdot 3 + (m + 6)\cdot 12 = 249 + 34m = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{249}{34}$

4.45 Dados los vectores $\vec{u}_1$ = (2, 0, 0); $\vec{u}_2$ = (0, 1, –3) y $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ ¿qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de $\vec{u}_3$ sea la unidad?

$\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, 0, 0) + (0, b, -3b) = (2a, b, -3b)$

$|\vec{u}_3| = \sqrt{(2a)^2 + b^2 + (-3b)^2} = 1 \Rightarrow 4a^2 + b^2 + 9b^2 = 1 \Rightarrow 4a^2 + 10b^2 = 1$

Para que $\vec{u}_3$ sea unitario, los parámetros a y b deben satisfacer la siguiente relación: $4a^2 + 10b^2 = 1$.

4.46 Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 10\sqrt{3}$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ determinan un triángulo, y por el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \Rightarrow 400 = 100 + 300 - 2\cdot 10\sqrt{3}\cos\hat{C} \Rightarrow 0 = \cos\hat{C} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 90°$

4.47 Pon un contraejemplo para demostrar que de la igualdad $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ no se deduce que $\vec{v} = \vec{w}$.

Sean $\vec{u}$ = (4, –1, 2); $\vec{v}$ = (1, 2, –1) y $\vec{w}$ = (0, 2, 1). Se cumple que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ y, en cambio, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

4.48 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$ y $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$. Calcula el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Desarrollando los cuadrados:

$$\begin{cases} 25 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ 9 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{cases}$$

Restando ambas igualdades, se obtiene que $16 = 4\,\vec{u}\cdot\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

4.49 (PAU) Demuestra que si $\vec{e}$ y $\vec{e}'$ son dos vectores del mismo módulo, los vectores $\vec{e} + \vec{e}'$ y $\vec{e} - \vec{e}'$ son ortogonales.

Para que los vectores $\vec{u} = \vec{e} + \vec{e}'$ y $\vec{v} = \vec{e} - \vec{e}'$ sean ortogonales, su producto escalar tiene que ser nulo:

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{e} + \vec{e}') \cdot (\vec{e} - \vec{e}') = \vec{e} \cdot \vec{e} - \vec{e} \cdot \vec{e}' + \vec{e}' \cdot \vec{e} - \vec{e}' \cdot \vec{e}' = 0$

$\Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{e} - \vec{e}' \cdot \vec{e}' = |\vec{e}|^2 - |\vec{e}'|^2 = 0$

Por tanto, es cierto que los vectores $\vec{e} + \vec{e}'$ y $\vec{e} - \vec{e}'$ son ortogonales.

4.50 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\vec{u} - \vec{v})^2$

b) $2\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

d) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

a) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

b) $2\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 6\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\vec{u}^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v}$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} + 3\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\vec{u}^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v}^2$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

4.51 Dados los vectores $\vec{u} = (2, 4, 5)$ y $\vec{v} = (3, 1, 2)$, halla el módulo del vector $\vec{u} - \vec{v}$.

$\vec{u} - \vec{v} = (2, 4, 5) - (3, 1, 2) = (-1, 3, 3) \Rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$

4.52 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = 9$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$. Calcula el módulo del vector $\vec{v}$.

$17 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \Rightarrow |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 17 = 9^2 - 17 = 64;\ |\vec{v}| = \sqrt{64} = 8$

4.53 Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 2$ y $\left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}\right) = \left(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_3}\right) = \left(\widehat{\vec{u}_2, \vec{u}_3}\right) = 60°$. Calcula el módulo del vector $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \vec{u}_1^2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_2^2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 + \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_3^2 =$

$= \vec{u}_1^2 + \vec{u}_2^2 + \vec{u}_3^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 + 2\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 4 + 4 - 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 24$

Por tanto: $|\vec{u}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

4.54 (PAU) a)¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?

b) ¿Qué se puede decir del ángulo de dos vectores que verifican $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}|$? Justifica las respuestas.

a) Sustituyendo los valores dados por el enunciado en la igualdad $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, se tiene:

$-3 = 1 \cdot 2 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

No es posible ya que el coseno de un ángulo está acotado entre –1 y 1. Luego no existen vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que cumplan esas condiciones.

b) Se sabe que $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ tomando valores absolutos resulta: $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}||\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})|$

Como $\vec{x}$ e $\vec{y}$ verifican $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}|$, entonces se deduce que $|\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})| = 1$.

Por lo que el ángulo que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ será 0° ó 180°.

4.55 (PAU) Dados los vectores $\vec a$, $\vec b$ y $\vec c$ tales que $|\vec a| = 3$, $|\vec b| = 1$ y $|\vec c| = 4$ y $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$, calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec a \cdot \vec b + \vec b \cdot \vec c + \vec a \cdot \vec c$.

$$(\vec a + \vec b + \vec c) \cdot (\vec a + \vec b + \vec c) = \vec a \cdot \vec a + \vec b \cdot \vec b + \vec c \cdot \vec c + 2\vec a \cdot \vec b + 2\vec a \cdot \vec c + 2\vec b \cdot \vec c =$$
$$= |\vec a|^2 + |\vec b|^2 + |\vec c|^2 + 2\vec a \cdot \vec b + 2\vec a \cdot \vec c + 2\vec b \cdot \vec c$$

Ahora bien, como $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$, el producto anterior es cero. Además, $|\vec a|^2 = 9$, $|\vec b|^2 = 1$ y $|\vec c|^2 = 16$.

Sustituyendo estos resultados en la igualdad anterior, se obtiene $0 = 9 + 1 + 16 + 2\,(\vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c + \vec b \cdot \vec c)$.

Despejando, se obtiene: $\vec a \cdot \vec b + \vec a \cdot \vec c + \vec b \cdot \vec c = -13$.

4.56 ¿Puede ser el módulo de la suma de dos vectores de módulos 10 y 5 mayor que 15? ¿Y menor que 4?

Sean $|\vec a| = 5$ y $|\vec b| = 10$ y $|\vec c| = |\vec a + \vec b|$.

Aplicando el teorema del coseno, se tiene:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \hat C = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos \hat C = 125 - 100\cos \hat C$

Si $\hat C = 180° \Rightarrow c^2 = 225 \Rightarrow |\vec c| = 15$. Si $\hat C = 0° \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow |\vec c| = 5$.

Por tanto, el módulo del vector suma, $\vec a + \vec b$, tomará valores en el intervalo [5, 15]. Luego, no puede ser mayor que 15 ni menor que 5.

4.57 Demuestra las siguientes igualdades entre vectores:

a) $(\vec u + \vec v - \vec w) \cdot (\vec u + \vec v + \vec w) = (\vec u + \vec v)^2 - \vec w^2$ **b) $(\vec u - \vec v - \vec w) \cdot (\vec u + \vec v + \vec w) = \vec u^2 - (\vec v + \vec w)^2$**

a) $(\vec u + \vec v - \vec w) \cdot (\vec u + \vec v + \vec w) = (\vec u + \vec v)^2 + (\vec u + \vec v) \cdot \vec w - \vec w \cdot (\vec u + \vec v) - \vec w^2 = (\vec u + \vec v)^2 - \vec w^2$

b) $(\vec u - \vec v - \vec w) \cdot (\vec u + \vec v + \vec w) = \vec u^2 + \vec u \cdot (\vec v + \vec w) + (-\vec v - \vec w) \cdot \vec u + (-\vec v - \vec w) \cdot (\vec v + \vec w) = \vec u^2 - (\vec v + \vec w)^2$

4.58 Demuestra que el vector $\vec a = (\vec b \cdot \vec c)\vec d - (\vec b \cdot \vec d)\vec c$ es ortogonal al vector $\vec b$.

$\vec a \perp \vec b \Leftrightarrow \vec a \cdot \vec b = 0 \Leftrightarrow [(\vec b \cdot \vec c)\vec d - (\vec b \cdot \vec d)\vec c] \cdot \vec b = 0$

$(\vec b \cdot \vec c)\vec d \cdot \vec b - (\vec b \cdot \vec d)\vec c \cdot \vec b = (\vec c \cdot \vec b)(\vec d \cdot \vec b) - (\vec d \cdot \vec b)(\vec c \cdot \vec b) = 0$

4.59 Dados $\vec u = (2, -3, 5)$ y $\vec v = (6, -1, 0)$, halla:

a) Los módulos de $\vec u$ y $\vec v$.

b) El producto escalar de $\vec u$ y $\vec v$.

c) El ángulo que forman.

d) La proyección del vector $\vec u$ sobre $\vec v$.

e) La proyección del vector $\vec v$ sobre $\vec u$.

f) El valor de *m* para que el vector (*m*, 2, 3) sea ortogonal a $\vec u$.

a) $|\vec u| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$; $|\vec v| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$

b) $\vec u \cdot \vec v = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 15$

c) $\cos(\widehat{\vec u, \vec v}) = \dfrac{15}{\sqrt{38}\sqrt{37}} = 0{,}4 \Rightarrow (\widehat{\vec u, \vec v}) = 66°\ 25'\ 11''$

d) Proyección de $\vec u$ sobre $\vec v$ $= \dfrac{\vec u \cdot \vec v}{|\vec v|} = \dfrac{15}{\sqrt{37}}$

e) Proyección de $\vec v$ sobre $\vec u$ $= \dfrac{\vec u \cdot \vec v}{|\vec u|} = \dfrac{15}{\sqrt{38}}$

f) $2m - 6 + 15 = 0 \Rightarrow m = -4{,}5$

Producto vectorial y producto mixto

4.60 Dados los vectores $\vec{u}$ = (3, 1, –1) y $\vec{v}$ = (2, 3, 4), determina:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{11}$, $|\vec{v}| = \sqrt{29}$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$

c) $\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \left(\dfrac{7}{\sqrt{294}}, \dfrac{-14}{\sqrt{294}}, \dfrac{7}{\sqrt{294}}\right)$

d) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{294}$ u^2

4.61 Dados los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 3), $\vec{v}$ = (2, 0, 1) y $\vec{w}$ = (–1, 3, 0), halla:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}$, $\vec{v}\cdot\vec{u}$

b) $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{u}$, $\vec{u}\times\vec{w}$, $\vec{v}\times\vec{w}$

c) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$, $(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}$

d) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$

e) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = (1, 2, 3) · (2, 0, 1) = 1 · 2 + 2 · 0 + 3 · 1 = 5

$\vec{u}\cdot\vec{w}$ = (1, 2, 3) · (–1, 3, 0) = 1 (–1) + 2 · 3 + 3 · 0 = 5

$\vec{v}\cdot\vec{w}$ = (2, 0, 1) · (–1, 3, 0) = 2 (–1) + 0 · 3 + 1 · 0 = –2

$\vec{v}\cdot\vec{u}$ = (2, 0, 1) · (1, 2, 3) = 2 · 1 + 0· 2 + 1 · 3 = 5

b) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 5, -4)$, $\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -5, 4)$,

$\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-9, -3, 5)$, $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, 6)$

c) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ = (2, 5, –4) (–1, 3, 0) = 13, $(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}$ = (–3, –1, 6) (1, 2, 3) = 13

d) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, $|\vec{w}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

e) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = 0{,}6$; $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -0{,}28$

4.62 Calcula razonadamente un vector unitario en el espacio euclídeo, que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{v}$ = (1, 2, 3), $\vec{w}$ = (1, 1, –2) y $\vec{u}$ = (0, 1, 5).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{u}$ son coplanarios.

Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

$\vec{m} = \vec{v}\times\vec{w} = (1, 2, 3) \times (1, 1, -2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-7, 5, -1)$.

Este vector es ortogonal a $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, por serlo a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y ser $\vec{u}$ coplanario con estos.

Como $|\vec{m}| = \sqrt{75}$, los vectores buscados son $\left(-\dfrac{7}{\sqrt{75}}, \dfrac{5}{\sqrt{75}}, -\dfrac{1}{\sqrt{75}}\right)$ y $\left(\dfrac{7}{\sqrt{75}}, -\dfrac{5}{\sqrt{75}}, \dfrac{1}{\sqrt{75}}\right)$.

4.63 Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, halla su producto vectorial y comprueba que el vector hallado es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, ya que (–2, –2, 4) · (3, –1, 1) = –6 + 2 + 4 = 0

$\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$, ya que (–2, –2, 4) · (1, 1, 1) = –2 – 2 + 4 = 0

4.64 Determina dos vectores de módulo la unidad y ortogonales a (2, –2, 3) y (3, –3, 2).

$$\vec{w} = (2, -2, 3) \times (3, -3, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j}\ ;\ |\vec{w}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Los vectores pedidos son $\vec{u} = \left(\frac{5}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v} = \left(\frac{-5}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

4.65 Halla un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ y que tenga por módulo 5.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -27\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 9\,\vec{k}\ ;\ |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{27^2 + 6^2 + 9^2} = \sqrt{846}$$

El vector pedido es: $5\left(\frac{-27}{\sqrt{846}}, \frac{6}{\sqrt{846}}, \frac{9}{\sqrt{846}}\right)$

4.66 Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$, halla el producto $\vec{u} \times \vec{v}$ y comprueba que este vector es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. Halla el vector $\vec{v} \times \vec{u}$ y compáralo con $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}$$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ (2, –1, –7) · (3, –1, 1) = 6 + 1 – 7 = 0

$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ (2, –1, –7) · (2, –3, 1) = 4 + 3 – 7 = 0

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,\vec{i} + \vec{j} + 7\,\vec{k}$$

$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$. Los vectores $\vec{v} \times \vec{u}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ son opuestos.

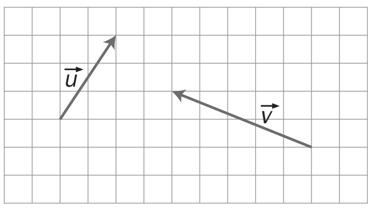
4.67 Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \times \vec{v}$

c) $\vec{v} \times \vec{u}$

d) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}]$



Las coordenadas de los vectores son: $\vec{u} = (2, 3, 0)$, $\vec{v} = (-5, 2, 0)$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = -4$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 19)$

c) $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, -19)$

d) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} = 19 \cdot 19 = 361$

4.68 Dados los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 3), $\vec{v}$ = (1, 2, 3) y $\vec{w}$ = (–1, –1, 0), calcula el producto mixto [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$]. Halla el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6$

El volumen del paralelepípedo de aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el valor absoluto de su producto mixto. Entonces $V = |6| = \text{u}^3$

4.69 Dados los vectores $\vec{i}$ = (1, 0, 0), $\vec{j}$ = (0, 1, 0) y $\vec{k}$ = (0, 0, 1), halla el producto mixto [$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$].

$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

De otra forma, $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

4.70 Halla el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores

$\vec{u}$ = (2, 1, 0), $\vec{j}$ = (0, 1, 0) y $\vec{v}$ = (3, 2, 1).

El volumen del paralelepípedo de aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{j}$ y $\vec{v}$ es el valor absoluto de su producto mixto.

$|[\vec{u}, \vec{j}, \vec{v}]| = |\det(\vec{u}, \vec{j}, \vec{v})| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = 2 \text{ u}^3$

4.71 Si los módulos de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 3, 4 y 5, respectivamente, ¿entre qué valores estará comprendido el valor absoluto de su producto mixto?

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \operatorname{sen}(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}})$

El valor máximo absoluto del producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ se obtiene cuando $\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ y $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}})$ toman su valor absoluto máximo, es decir, cuando $\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pm 1$ y $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}}) = \pm 1$:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$

El valor mínimo absoluto se obtiene cuando $\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$ ó bien cuando $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}\times\vec{w}}) = 0$:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

4.72 Dados dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, calcula los siguientes vectores:

a) $\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{v} + \vec{u})$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

a) $\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$, pues $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = -2\vec{u} \times \vec{v}$, pues $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

PROBLEMAS

4.73 (PAU) Considera los vectores de R^3: $\vec{u}$ = (1, 0, –1), $\vec{v}$ = (λ, –1, 0), $\vec{w}$ = (0, λ, –1)

a) ¿Para qué valores de λ son linealmente dependientes?

b) Determina, en este caso, *x* e *y* de forma que sea $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

a) Son linealmente dependientes si $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

b) • Si $\lambda = 1 \Rightarrow (0, 1, -1) = x(1, 0, -1) + y(1, -1, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

• Si $\lambda = -1 \Rightarrow (0, -1, -1) = x(1, 0, -1) + y(-1, -1, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

4.74 (PAU) En un vértice de un cubo se aplican tres fuerzas dirigidas según las diagonales de las tres caras que pasan por dichos vértices. Los módulos o magnitudes de estas fuerzas son 1, 2 y 3.

Halla el módulo de la fuerza resultante de aquellas tres.

Se toman vectores unitarios en las direcciones de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w}$

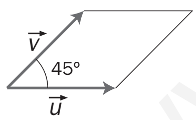
La suma de las tres fuerzas es:

Sea $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u} + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v} + 3\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2, 0, 2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 3, 3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

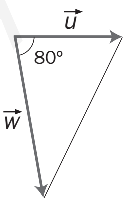
Entonces, su módulo es: $|\vec{m}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9+16+25} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5$

4.75 Determina el área de las siguientes figuras, teniendo en cuenta que, en todos los casos, los módulos de los vectores son: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$; $|\vec{w}| = 3$.

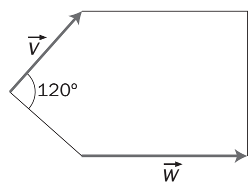
a)



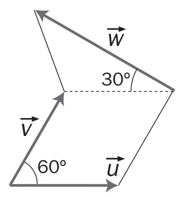
b)



c)



d)



a) $|\vec{u} \times \vec{v}| = 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 45º = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \text{u}^2$

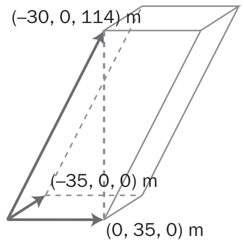
b) $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{w}| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{sen } 80º = 3\text{sen } 80º \approx 2{,}95\ \text{u}^2$

c) Sea $\vec{a}$ el vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$. $\vec{a} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{\mathbf{2 \cdot 3 \cos 120º}}{\mathbf{3^2}}\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{w} \Rightarrow |\vec{a}| = 1$

$2|\vec{v} \times \vec{w}| + |\vec{v} \times \vec{a}| = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{sen } 120º + 2 \cdot 1 \cdot \text{sen } 120º = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}\ \text{u}^2$

d) $|\vec{u} \times \vec{v}| + \frac{1}{2}|\vec{w} \times (-\vec{u})| = 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 60º + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{sen } 30º = 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \left(2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)\text{u}^2$

4.76 Las torres de la llamada Puerta de Europa en Madrid tienen forma de prisma cuadrangular oblicuo. Calcula el volumen y la altura de cada torre teniendo en cuenta los datos de la figura.

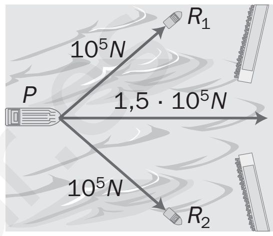


El volumen del paralelepípedo será |[(–35, 0, 0), (0, 35, 0), (–30, 0, 114)]| = 139 650 m^3.

La altura será el cociente entre el volumen y el área de la base, esto es

$$\frac{139650}{|(-35,0,0)\times(0,35,0)|}=\frac{139650}{35^2}=114 \text{ m}$$

4.77 Dos remolcadores arrastran hacia puerto un petrolero según el esquema de la figura. Si cada uno tira del barco remolcado con una fuerza de 10^5 N, calcula el ángulo que forman los dos cables entre sí si la resultante tiene un valor de $1{,}5 \cdot 10^5$ N.



Llamando α al ángulo formado por la resultante y uno de los dos remolcadores, y utilizando el teorema del coseno, se obtiene $10^{10}=10^{10}+1.5^2\cdot 10^{10}-2\cdot 10^5\cdot 1.5\cdot 10^5\cdot\cos\alpha$, operando resulta $\cos\alpha=0{,}75$, esto es, $\alpha=41º24'$ y multiplicando por 2 se obtiene el ángulo entre los dos remolcadores: 82º48'.

PROFUNDIZACIÓN

4.78 (PAU) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0.

a) $[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}-\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$ b) $[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}]$ c) $[\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c},\ \vec{c}-\vec{a}]$

En cada caso, razona tu respuesta.

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores linealmente independientes constituyen una base. Los vectores de los productos mixtos respecto de esta base tienen las siguientes coordenadas:

$[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}-\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]$ = [(1, 0, 1), (1, 0, –1), (1, 1, 1)]

$[\vec{a}+\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}]$ = [(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)]

$[\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c},\ \vec{c}-\vec{a}]$ = [(1, 0, –1), (0, 1, –1), (–1, 0, 1)]

Se calculan los productos mixtos pedidos:

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0 \quad \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad \begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=0$$, pues las filas primera y tercera son proporcionales.

Solo el tercero de los productos mixtos indicados es nulo.

4.79 Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos arbitrarios del espacio que son coplanarios. Demuestra que se verifica:

$$[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{CD}]+[\overrightarrow{AC}]\cdot[\overrightarrow{DB}]+[\overrightarrow{AD}]\cdot[\overrightarrow{BC}]=0$$

Llamamos $\vec{u}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v}=[\overrightarrow{AC}]$ y $\vec{w}=[\overrightarrow{AD}]$. Entonces, $[\overrightarrow{CD}]=\vec{w}-\vec{v}$, $[\overrightarrow{DB}]=\vec{u}-\vec{w}$ y $[\overrightarrow{BC}]=\vec{v}-\vec{u}$.

$[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{CD}]+[\overrightarrow{AC}]\cdot[\overrightarrow{DB}]+[\overrightarrow{AD}]\cdot[\overrightarrow{BC}]=\vec{u}\cdot(\vec{w}-\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{w})+\vec{w}\cdot(\vec{v}-\vec{u})=$

$=\vec{u}\cdot\vec{w}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{v}-\vec{w}\cdot\vec{u}=0$

4.80 Demuestra vectorialmente que las tres alturas de un triángulo concurren en un punto.

Sea H el punto de intersección de las alturas que parten de los vértices A y B.
Por lo expuesto en el ejercicio anterior, se cumple:

$[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{CH}] + [\overrightarrow{AC}] \cdot [\overrightarrow{HB}] + [\overrightarrow{AH}] \cdot [\overrightarrow{BC}] = 0$

Por ser ortogonales los vectores $\overrightarrow{AH}$ y $\overrightarrow{BC}$ y los vectores $\overrightarrow{HB}$ y $\overrightarrow{AC}$, resulta $[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{CH}] = 0$, lo que indica que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CH}$ son también ortogonales; es decir, la altura del vértice C pasa también por el punto H (ortocentro del triángulo).

4.81 Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos lados no paralelos del rombo.

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$, ya que un rombo tiene sus cuatro lados iguales.

Los vectores de las diagonales son $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.

Para ver que son ortogonales, se calcula su producto escalar: $\vec{m} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$

Luego las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

4.82 Demuestra vectorialmente que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Sea O el centro de la circunferencia y sean A, B y C tres puntos distintos de la misma, de modo que A y C sean extremos de un mismo diámetro. Entonces el ángulo ABC está inscrito en la circunferencia.

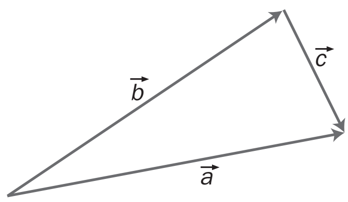
Sean $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, entonces:

$\overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{v} + \vec{u})(\vec{v} - \vec{u}) = |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 = r^2 - r^2 = 0$, donde r es el radio.

Luego los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son ortogonales.

4.83 Demuestra el teorema del coseno utilizando el producto escalar y la relación entre los vectores asociados al triángulo de la figura, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cos(\vec{a}, \vec{b})$

4.84 (PAU) Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que siendo perpendiculares a $\vec{u}$ se pueden escribir como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Sea $\vec{w} = (x, y, z)$ un vector cualquiera perpendicular a $\vec{u}$. Entonces $\vec{w} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$.

Por otra parte, el plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el conjunto de vectores que son combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, son vectores de la forma $a\vec{u} + b\vec{v} = a(1, -1, 2) + b(3, 1, -1) = (a + 3b, -a + b, 2a - b)$.

Para que $\vec{w}$ pertenezca al plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se tiene que verificar que

$a + 3b - (-a + b) + 2(2a - b) = 0 \Rightarrow 6a = 0 \Rightarrow a = 0$

Luego los vectores pedidos son de la forma $(3b, b, -b)$ con $b \in \mathbf{R}$.

4.85 (PAU) Dados los vectores del espacio vectorial V^3 $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$ y $\vec{c} = (2, -2, -1)$.

a) Halla una base del espacio *S* engendrado por $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Encuentra, si existe, el valor de α para que el vector $(\alpha, \alpha, -6)$ pertenezca a *S*.

c) Halla un vector de V^3 que, junto con la base de *S* obtenida anteriormente, sea una base de $\mathbf{R}^3$. Razona la respuesta.

a) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes ya que $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes, pues sus coordenadas no son proporcionales.

El espacio *S* engendrado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir, $S = \{k(1, 0, -1) + h(0, 2, -1) \ / \ k, h \in \mathbf{R}\}$

Una base de *S* puede ser la formada por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ ya que son linealmente independientes y además generan *S*.

Por tanto, $B(S) = \{\vec{a}, \vec{b}\} = \{(1, 0, -1), (0, 2, -1)\}$

b) $(\alpha, \alpha, -6) = k(1, 0, -1) + h(0, 2, -1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \alpha = 2h \\ -6 = -k - h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2h \\ -6 = -k - h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ h = 2 \end{cases}$

Por tanto, $\alpha = 4$.

c) Hay que añadir un vector $\vec{d}$ que sea linealmente independiente con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que sea una base de V^3.

Servirá cualquier vector que cumpla que $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \neq 0$

Sea, por ejemplo, $\vec{d} = (0, 0, 1)$. Entonces, $B' = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ es una base de V^3.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

4.1 Los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, 5, 6)$ están referidos a una base ortonormal. El ángulo que forman es:

A) 136º 58' 5,16''

B) 43º 1' 54,8''

C) 223º 1' 54,8''

D) 46º 58' 5,16''

E) Ninguna de las anteriores.

B) $|\vec{u}| = \sqrt{14}$; $|\vec{v}| = \sqrt{77}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 24 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{24}{\sqrt{14 \cdot 77}} = 0{,}731 \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 43º\ 1'\ 54{,}8''$

4.2 Dado el vector $\vec{u} = (2, -3, 4)$, un vector unitario en la dirección de $\vec{u}$ será:

A) $(-2, 3, -4)$

B) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{10}}, \dfrac{-3}{\sqrt{10}}, \dfrac{4}{\sqrt{10}}\right)$

C) $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{29}}, \dfrac{3}{\sqrt{29}}, \dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$

D) $\left(\dfrac{\sqrt{29}}{2}, \dfrac{-\sqrt{29}}{3}, \dfrac{\sqrt{29}}{4}\right)$

E) Ninguna de las anteriores.

E) $|\vec{u}| = \sqrt{29}$, por tanto, el vector pedido es $\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}, \dfrac{-3}{\sqrt{29}}, \dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$, es decir, ninguno de los anteriores.

4.3 El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ = (–1, 0, 2) y $\vec{v}$ = (3, 1, 4) es:

A) S = 5 unidades cuadradas.

B) $S = \sqrt{105}$ unidades cuadradas.

C) $S = \sqrt{124}$ unidades cuadradas.

D) $S = \sqrt{107}$ unidades cuadradas.

E) Con los datos dados no se puede hallar el área.

B) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 10\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 1^2} = \sqrt{105}\ \text{u}^2$

4.4 El volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{u}$ = (1, –1, 3), $\vec{v}$ = (2, 0, 1) y $\vec{w}$ = (0, 0, 3) es:

A) V = 2 unidades cúbicas.

B) V = 5 unidades cúbicas.

C) V = 7 unidades cúbicas.

D) V = 4 unidades cúbicas.

E) Ninguna de las anteriores.

E) $V = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = 6\ \text{u}^3$

4.5 Halla las coordenadas del vector $\vec{u}$ = (2, 4, 5) respecto de la base B = {(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)}.

A) Los vectores de B no forman base.

B) $\left(\frac{-7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

C) $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D) (7, 1, 3)

E) Ninguna de las anteriores.

C) (2, 4, 5) = a (0, 1, 1) + b (1, 1, 0) + c (1, 0, 1) $\Rightarrow \begin{cases} 2 = b + c \\ 4 = a + b \\ 5 = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Por tanto, las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la nueva base son $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

4.6 Los vectores $\vec{u}$ = (2, –1, 4), $\vec{v}$ = (0, 0, 1) y $\vec{w}$ = (–4, 2, –8):

A) Forman una base.

B) Son linealmente dependientes.

C) Son linealmente independientes.

D) El vector $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

E) det ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) = 0

Son correctas las respuestas B, D y E.

4.7 Las propiedades del producto escalar son:

A) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{u}$

B) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

C) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

D) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

E) $t\vec{u} \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (t\vec{v})$

Son correctas las respuestas B, C y E.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

4.8 Para que tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ formen una base se ha de cumplir:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ han de ser no nulos y no coplanarios.

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b son excluyentes entre sí.

E) Nada de lo anterior.

A) Las dos afirmaciones son equivalentes.

Señala el dato innecesario para contestar:

4.9 Tres vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base ortogonal.

a) Si los vectores son ortogonales dos a dos.

b) Si los vectores son unitarios y perpendiculares.

c) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

d) Si $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 90°$; $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 90°$; $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = 90°$

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

B) No es necesario que los vectores sean unitarios.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

4.10 Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores referidos a una base ortonormal. Su producto escalar es nulo si:

a) Son ortogonales.

b) Si uno de los dos es el vector nulo.

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola para que el producto escalar sea nulo.