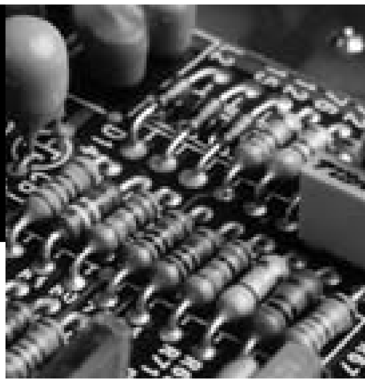
3 Determinantes



1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

Piensa y calcula

Dada la proporción $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, calcula el producto de extremos menos el producto de medios.

Solución:
$3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$

Aplica la teoría

1. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:
a) $|A| = 0$ porque tiene una columna de ceros.
b) $|B| = 0$ porque tiene dos filas iguales, la 1ª y la 3ª

2. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -9 \\ 7 & 5 & -8 \end{vmatrix}$

Solución:
a) $|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2ª es el doble de la 1ª
b) $|B| = 0$ porque tiene una fila que es combinación lineal de las otras dos; la 3ª es la suma de la 1ª y de la 2ª

3. Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:
a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 38$

b) No se puede calcular porque no es cuadrada.

4. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$

Solución:
a) $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 50$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -58$

5. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:
a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ -9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 255$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

6. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 9 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -265$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 867$

7. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 125$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70$

8. Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E^t \cdot E$

Solución:

$E^t = E = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14)$

$|E^t \cdot E| = |14| = 14$

2. Propiedades de los determinantes

Piensa y calcula

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, halla su determinante y el de su traspuesta. ¿Cómo son?

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$|A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2$

Ambos determinantes son iguales.

Aplica la teoría

9. Sean $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 9 \\ -8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -374$ y $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -8 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente |B|. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

|B| = 374

Porque el determinante |B| se obtiene del |A| cambiando la 2ª y 3ª filas.

10. Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales.

La 3ª fila del 2º se ha obtenido sustituyéndola por la suma de las tres del 1º

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

|A| = 245 |B| = 245

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

11. Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -7 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = -180$ $\qquad$ $|A^t| = -180$

12. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & c & b \\ 2e & f & e \\ 2h & i & h \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En el 1er paso hemos descompuesto el determinante en la suma de otros dos que tienen la 2ª y 3ª columna iguales y la suma de las dos primeras columnas coincide con la 1ª columna inicial.

En el 2º paso hemos cambiado en el 1er determinante la 2ª columna con la 3ª y, por tanto, el determinante cambia de signo y el 2º determinante es cero, porque la 1ª columna es el doble de la 3ª

13. Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-1), su determinante queda multiplicado por $(-1)^3 = -1$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

14. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

comprueba que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 87 & 20 \end{vmatrix} = -1\,071$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 51 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -21$$

$|A| \cdot |B| = 51 \cdot (-21) = -1\,071$

www.yoquieroaprobar.es

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

■ Piensa y calcula

Halla una matriz A de orden 3, es decir, de dimensión 3×3, definida por: $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Aplica la teoría

15. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el menor complementario del elemento a_{21}

b) el menor complementario del elemento a_{13}

Solución:

a) $M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 24$

b) $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 46$

16. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el adjunto del elemento a_{12}

b) el adjunto del elemento a_{31}

Solución:

a) $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 35$

b) $A_{31} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -63$

17. Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 23 = 161$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 22 = 176$

18. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ -1 & 9 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} =$

$= -86$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ \\ 7 \cdot 1^a + 4^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 8 & 0 \\ 7 & 0 & 12 & -3 \\ 3 & 0 & 8 & 6 \\ 37 & 0 & 48 & 3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 37 & 48 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 17 & 32 & 0 \\ 44 & 60 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -3\begin{vmatrix} 17 & 32 \\ 44 & 60 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-388) = 1\,164$

19. Halla en función de **a** el valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 3^a \end{matrix} =$

$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} =$

$= -a\,(2-a)^3 = a\,(a-2)^3$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

4. Matriz inversa

Piensa y calcula

Multiplica las siguientes matrices A · B y B · A. ¿Qué matriz se obtiene?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

En ambos casos se obtiene la matriz unidad de orden 2

Aplica la teoría

20. Comprueba que las siguientes matrices son inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

21. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -5$

$A_{12} = -1 \qquad A_{22} = 3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = -3$

$A_{12} = -4 \qquad A_{22} = 7$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

22. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 8$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 12$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 4 & 6 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Solución:

Para comprobar que es ortogonal hallamos la traspuesta y la inversa y veremos que son iguales.

$$A^t = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left.\begin{matrix} A_{11} = \text{sen } x & A_{21} = -\cos x \\ A_{12} = \cos x & A_{22} = \text{sen } x \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = A^t$$

24. Dadas las siguientes matrices, determina si son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución:

Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto, A es invertible.

$A_{11} = 4$ $\quad A_{21} = -2$

$A_{12} = -3$ $\quad A_{22} = 1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

b) La matriz B no es cuadrada. Por tanto, no es invertible.

25. Considera la matriz A que depende de un parámetro **a**

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de **a** tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para a = 0 halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 2a & a+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

La matriz A tiene inversa para $a \neq 1$

b) Para a = 0 se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

5. Ecuaciones con matrices y determinantes

Piensa y calcula

Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplica la teoría

26. Determina la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}$$

27. Halla todas las matrices X tales que XA = AX, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4a + 2c & 4b + 2d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b & 2b \\ c + 4d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= a + 4b \\ b &= 2b \\ 4a + 2c &= c + 4d \\ 4b + 2d &= 2d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 0 \\ c &= 4d - 4a \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$$

28. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1 - x & x + 1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1 - x & x + 1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 + 4x + 6$$

$-2x^2 + 4x + 6 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = 3,\ x = -1$

29. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existe alguna matriz Y, cuadrada de orden 2, tal que $AY = B^t$? (B^t es la matriz tranpuesta de B). Justifica la respuesta.

Solución:

Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$B^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AY = B^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a - c & b - d \\ 2c - 2a & 2d - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 3 \\ a - c &= 2 \\ b - d &= -1 \\ 2c - 2a &= 0 \\ 2d - 2b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

De las cuatro primeras ecuaciones se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -4 \\ d = 4 \end{array}\right\}$$

Que no verifican las otras dos ecuaciones; por tanto, no existe ninguna matriz Y, cuadrada de orden 2, que verifique la ecuación pedida.

30. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación matricial XA – B = 2I, siendo I la matriz identidad de orden tres.

Solución:

$XA - B = 2I$

$XA = B + 2I$

$X = (B + 2I)A^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

31. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 \Rightarrow -2x^2 = 0$$

$x = 0$

32. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Calcula la matriz X tal que AX = B

Solución:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Rango de una matriz

Piensa y calcula

De los siguientes vectores, ¿cuáles son proporcionales?: $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4)$

Solución:

Son proporcionales: $\vec{u}(1, -3, 2)$ y $\vec{w}(-2, 6, -4)$ $\Rightarrow \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{2}{-4}$

Aplica la teoría

33. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 2

Porque las filas no son proporcionales.

b) R(A) = 1

Porque las filas son proporcionales.

34. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -9 & 15 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1

Porque las filas son proporcionales.

b) R(A) = 2

Porque las columnas no son proporcionales.

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

35. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 241 \neq 0$

$R(A) = 3$

Porque el determinante es distinto de cero.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$R(A) = 2$

Porque el determinante es cero y las tres filas no son proporcionales.

36. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 7 & 6 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \\ 3 \cdot 1^a + 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 7 & 10 \end{pmatrix} = 2$

b) $R(B) = R\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3 \cdot 1^a - 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 20 \end{pmatrix} = 3$

37. Comprueba que los vectores

$\vec{a} = (1, 1, 3)$ $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ $\vec{c} = (1, 3, 5)$

son linealmente dependientes.

Solución:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto, son linealmente dependientes.

38. Calcula el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real **a:**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

$R(A) = R\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 12 & a+4 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{matrix} =$

$= R\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 8 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 2a+8 & -3a-12 \end{pmatrix}$

Si $a = -4 \Rightarrow R(A) = 2$

Si $a \neq -4 \Rightarrow R(A) = 3$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Indica qué igualdad es falsa:

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

☒ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

☐ $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

2 La matriz inversa de una matriz regular A es igual a:

☐ el producto del inverso del determinante de A por la matriz adjunta de A.

☐ la adjunta de su matriz traspuesta.

☒ el producto del inverso del determinante de A por la traspuesta de la matriz adjunta de A.

☐ la traspuesta de la matriz adjunta.

3 Si el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

el determinante

$$\begin{vmatrix} 5a & -5b & 5c \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

vale

☐ 1 ☐ 5 ☒ –1 ☐ –5

4 La matriz adjunta es:

☐ la matriz cuyo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ es el menor complementario del elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A

☐ la matriz inversa de A

☐ la matriz que se obtiene de eliminar la fila **i** y la columna **j** de la matriz A

☒ la matriz cuyo elemento $\mathbf{a_{ij}}$ es el adjunto del elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A

5 Si $|A| = 3$ y $|B| = -3$, $|AB|$ es igual a:

☐ 0 ☒ –9 ☐ 9 ☐ –1

6 Despeja **X** en función de A en

$$(X + A)^2 = X^2 + XA + I$$

☐ $X = A - A^{-1}$

☒ $X = A^{-1} - A$

☐ $X = A^2 - A^{-1}$

☐ $X = A^{-1} - A^2$

7 Las soluciones de la siguiente ecuación son:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

☐ $a = -1$

☒ $a = 1$

☐ $a = 1, a = -1$

☐ No tiene solución real.

8 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

los valores de m para los que el rango de la matriz A es menor que 3 son:

☒ $m = 1, m = 0$ ☐ $m = 0$

☐ $m \neq 0; m \neq 1$ ☐ $m = 1$

9 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ Si $a = 4$, $R(A) = 3$

☐ Si $a \neq 4$, $R(A) = 3$

☒ Si $a = 4$, $R(A) = 1$

☐ Si $a \neq 4$, $R(A) = 4$

10 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ m \in \mathbb{R}$$

determina qué valores de m hacen a la matriz A regular.

☐ $m = -1; m = -3$

☒ $m \neq -1; m \neq -3$

☐ $m = 1; m = 3$

☐ Para cualquier valor de **m**

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios y problemas

1. Determinantes de orden 2 y 3 por Sarrus

39. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene las filas opuestas.

b) $|B| = 0$ porque tiene una columna de ceros.

40. Calcula mentalmente los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 0$ porque tiene dos filas proporcionales; la 2ª es el quíntuplo de la 1ª cambiada de signo.

b) $|B| = 0$ porque tiene una columna que es combinación de las otras dos; la 3ª es la suma de la 1ª y la 2ª

41. Halla los determinantes que se puedan calcular de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) No se puede calcular porque no es cuadrada.

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35$

42. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 6$

43. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ b) $|B| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 103$

44. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -200$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -87$

45. Halla los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 42$

46. Siendo $E^t = (1 \quad 2 \quad 3)$ la traspuesta de la matriz E, calcula el determinante de la matriz $E \cdot E^t$

Solución:

$E \cdot E^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$|E \cdot E^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Porque tiene las tres filas proporcionales, la 2ª es el doble de la 1ª, y la 3ª es el triple de la 1ª

2. Propiedades de los determinantes

47. Sea: $|A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 8 \\ -7 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 219$ y $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Halla mentalmente |B|. ¿Qué propiedad has utilizado?

Solución:

$|B| = -219$

Porque el determinante |B| se obtiene del |A| cambiando la 1ª y 3ª columnas.

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

48. Halla el valor de los siguientes determinantes y comprueba que son iguales. La 3ª fila del 2º se ha obtenido sustituyéndola por la suma del doble de la 2ª más la 3ª

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 9$

$|B| = 9$

49. Comprueba la identidad $|A| = |A^t|$ siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 238$

$|A^t| = 238$

50. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula el siguiente determinante y enuncia las propiedades que utilices:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$$

En el 1er paso hemos sacado factor común el 3 en la 1ª fila, y en el 2º paso hemos sacado factor común el 5 en la 3ª columna.

51. Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?

Solución:

Si todos los elementos de una matriz de orden 3×3 se multiplican por (-2), su determinante queda multiplicado por $(-2)^3 = -8$

La propiedad que se ha utilizado dice que para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Como se multiplican las tres líneas, se eleva al cubo.

52. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

comprueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 15 & 16 \\ -47 & -58 \end{vmatrix} = -118$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 59$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -2$$

$|A| \cdot |B| = 59 \cdot (-2) = -118$

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

53. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el menor complementario del elemento a_{12}

b) el menor complementario del elemento a_{31}

Solución:

a) $M_{12} = \begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 57$ b) $M_{31} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 24$

54. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & 7 & -8 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

halla:

a) el adjunto del elemento a_{22}

b) el adjunto del elemento a_{23}

Solución:

a) $A_{22} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -11$ b) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 3$

55. Calcula el valor de los siguientes determinantes por los adjuntos de la línea más sencilla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -9\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -9 \cdot 24 = -216$

b) $\begin{vmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$

56. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 170 = 340$

b) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -9 & 2 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 3 \cdot 2^a + 3^a \\ 2 \cdot 2^a + 4^a \end{array} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & -7 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 8 & 0 & 17 \\ 10 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 9 & 8 & 17 \\ 10 & -5 & 5 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -12 & -7 & -3 \\ 25 & 8 & 25 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -12 & -3 \\ 25 & 25 \end{vmatrix} =$

$= 5 \cdot (-225) = -1\,125$

57. Comprueba que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a - 4^a \\ \end{array} =$

$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 2^a - 1^a & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{array} =$

$= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -a & -b & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} =$

$= -a^2\begin{vmatrix} b & b \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = -a^2(b - b^2 - b) = a^2b^2$

$|B| = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2$

4. Matriz inversa

58. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprueba que B es la inversa de A

Solución:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

59. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A_{11} = 4$ $A_{21} = 2$

$A_{12} = 5$ $A_{22} = 3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$

$A_{11} = -3$ $A_{21} = 7$

$A_{12} = -2$ $A_{22} = 5$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

60. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

61. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, la matriz A no tiene inversa.

62. De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y, en los casos en que exista, calcula la matriz inversa y el determinante de dicha inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

a) La matriz A es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, la matriz A no es invertible.

b) La matriz B es cuadrada.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de la inversa es el inverso del determinante.

$$|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = 1$$

63. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determina si es invertible y, en su caso, calcula la matriz inversa.

Solución:

Para que una matriz sea invertible, tiene que ser cuadrada y su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, la matriz A no tiene inversa.

64. Considera la matriz A que depende de un parámetro **k:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

a) ¿Para qué valores de **k** tiene A inversa? Justifica la respuesta.

b) Para k = −5, halla la inversa de A

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada, para que tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = k + 8$$

$$k + 8 = 0 \Rightarrow k = -8$$

La matriz B tiene inversa para $k \neq 8$

b) Para k = –5 se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -7/3 & 5/3 & 3 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ecuaciones con matrices y determinantes

65. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

razona si posee solución la ecuación matricial $A \cdot X = B$ y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

66. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X que verifique:

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ABX = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

67. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = 1,\ x = -1$$

68. Determina la matriz X de dimensión 2 × 2 tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 27 & -11 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

69. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentra todas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

tales que XA = I; donde I es la matriz identidad de orden 2

Solución:

$$XA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-2c & 2c-b \\ d+e-2f & 2f-e \end{pmatrix}$$

$XA = I$

$$\begin{pmatrix} a+b-2c & 2c-b \\ d+e-2f & 2f-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} a+b-2c = 1 \\ 2c-b = 0 \\ d+e-2f = 0 \\ 2f-e = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2c \\ d = 1 \\ e = 2f-1 \end{array}\right.$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2c & c \\ 1 & 2f-1 & f \end{pmatrix}$$

70. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^2(x^2-4)$$

$x^2(x^2-4) = 0$

$x = 0,\ x = 2,\ x = -2$

6. Rango de una matriz

71. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1

Porque las dos filas son proporcionales.

b) R(B) = 2

Porque las dos filas no son proporcionales.

72. Halla mentalmente el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) R(A) = 1

Porque las dos columnas son proporcionales.

b) R(B) = 2

Porque las dos filas no son proporcionales.

73. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

R(A) = 2

Porque el determinante es cero y no todas las filas son proporcionales.

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = -477$

R(B) = 3

Porque el determinante es distinto de cero.

74. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 3^a \\ \\ \end{array} =$

$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array} =$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 0 \\ -2 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = -20$$

R (A) = 4

Porque el determinante es distinto de cero.

b) $R(B) = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2 \cdot 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} =$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} = 2$$

75. Determina los valores del parámetro **a** para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$(1, 1, a), (a, 3, 2) \text{ y } (0, 0, a)$$

sean linealmente independientes. Justifica la respuesta.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a$$

$-a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(a - 3) = 0$

$a = 0, \ a = 3$

Para que los tres vectores sean linealmente independientes, tiene que ser $a \neq 0$ y $a \neq 3$

Para ampliar

76. Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden **n.** Estudia si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1}en términos de M e I

Solución:

$M^2 - 2M = 3I$

$\frac{1}{3}(M^2 - 2M) = I$

$M\left(\frac{1}{3}(M - 2I)\right) = I$

$M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$

Existirá M^{-1} cuando el determinante de $|M - 2I|$ sea distinto de cero, $|M - 2I| \neq 0$

77. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de **x** existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Solución:

Existirá la matriz inversa cuando su determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz A tiene siempre inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

78. Determina los valores de **x** e **y** que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2x + 3 \\ 3x + 2y &= 3y - 2 \end{aligned}\right\}$$

$x = -\frac{5}{4}, \ y = -\frac{7}{4}$

79. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula |ABC|

Solución:

$$ABC = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |ABC| = -9$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

80. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se cumple la igualdad rang(A · B) = rang (A) · rang (B)? Justifica la respuesta.

Solución:

rang (A) = 2, rang (B) = 2

rang (A) · rang (B) = 2 · 2 = 4

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 10 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

rang (A · B) = 2

Porque la 3ª fila es: –2 · 2ª. Por tanto, no se verifica la igualdad.

También se observa que:

rang (A) · rang (B) = 4

y que la matriz A · B tiene de dimensión 3 × 3; luego nunca puede tener rango 4

www.yoquieroaprobar.es

Problemas

81. Se sabe que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

a) Calcula el valor de:

$$\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix}$$

b) Enuncia una de las propiedades de los determinantes que hayas usado en el apartado anterior.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3a - b & 6a + 2b \\ 3c - d & 6c + 2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a - b & 6a \\ 3c - d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a - b & 2b \\ 3c - d & 2d \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 6a \\ d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{vmatrix} =$

$= 0 - 6 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 0 =$

$= 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$

b) Se han utilizado las propiedades:

- Un determinante se puede descomponer en la suma de otros dos de forma que tenga todas las líneas iguales menos una, cuya suma sea la del primero. Se ha aplicado 3 veces.
- Para multiplicar un determinante por un número se multiplica el número por cada elemento de una línea. Por tanto, en una línea se pueden sacar los factores comunes.
- Si en la matriz se cambian dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.
- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.

82. Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

razona si posee solución la ecuación matricial A · X = B y, en caso afirmativo, resuélvela.

Solución:

Tiene solución si la matriz A tiene inversa, es decir, si |A| ≠ 0

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego tiene inversa y la ecuación matricial tiene solución.

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

83. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de **x** e **y** tales que AX = U

b) Encuentra los posibles valores de **m** para los que los vectores:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Solución:

a) $AX = U \Rightarrow X = A^{-1}U$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+3 \\ 3m+4 \end{pmatrix}$

Para que los vectores $\begin{pmatrix} 2m+3 \\ 3m+4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes, tienen que ser proporcionales.

$$\frac{2m+3}{1} = \frac{3m+4}{m}$$

$2m^2 + 3m = 3m + 4$

$2m^2 = 4$

$m^2 = 2$

$m = \pm\sqrt{2}$

84. Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$A^2 \cdot X = 2B$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$X = (A^2)^{-1}2B$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$$

85. Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula una matriz X tal que $A^2 + AX = I$

Solución:

$A^2 + AX = I$

$AX = I - A^2$

$X = A^{-1}(I - A^2)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$I - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

86. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 12x^3 - 48x^2 + 12x + 72$$

$12x^3 - 48x^2 + 12x + 72 = 0$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$x = -1,\ x = 2,\ x = 3$

87. ¿Para qué valores de **a** y **b** la siguiente matriz es ortogonal?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que sea ortogonal, su inversa tiene que ser igual a su traspuesta.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Se halla la inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{vmatrix} = a(\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b) = a$$

$A_{11} = 1 \qquad A_{21} = 0 \qquad A_{31} = 0$

$A_{12} = 0 \qquad A_{22} = a\cos b \qquad A_{32} = -a\operatorname{sen} b$

$A_{13} = 0 \qquad A_{23} = a\operatorname{sen} b \qquad A_{33} = a\cos b$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

Para que $A^t = A^{-1}$ se tiene que verificar:

$$a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

El valor de **b** puede ser cualquier número.

88. Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} =$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$(b-a)(c-a)(c-b) = 0$

Las raíces son: $b = a,\ c = a,\ b = c$

89. Se sabe que la siguiente matriz M tiene de rango 1

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & a & b \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

¿Pueden determinarse **a, b, c** y **d**? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, hállalos.

Solución:

Si la matriz tiene rango 1, la 2ª fila es proporcional a la 1ª. Por tanto:

$$a = \frac{6}{5} \text{ y } b = \frac{7}{5}$$

Si la matriz tiene rango 1, también la 3ª fila es proporcional a la 1ª. Por tanto:

$$c = \frac{12}{5} \text{ y } d = \frac{14}{5}$$

90. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Explica brevemente el concepto de independencia lineal de vectores en $\mathbb{R}^3$ y enuncia alguna condición equivalente a que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes.

b) Escribe el vector **b** como combinación lineal de los vectores **u, v** y **w,** siendo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si el rango de la matriz correspondiente es 3

Una condición equivalente es que tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si el determinante correspondiente es distinto de cero.

b) $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x \quad\quad - z &= -1 \\ -x + 2y - z &= -7 \\ 2x + 6y + 3z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$x = 2,\ y = -1,\ z = 3$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

91. Dados los vectores $\vec{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v} = (a, 1, a)$ y $\vec{w} = (1, a, 1)$, se pide:

a) determina los valores de **a** para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) estudia si el vector $\vec{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$. Justifica la respuesta.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a$

$a^3 - a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1, a = -1$

Para $a = 0, a = 1, a = -1$ los tres vectores son linealmente dependientes.

b) Para $a = 2$, como $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow$ los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y, como están en $\mathbb{R}^3$, forman una base, luego todo vector es combinación lineal de ellos, en particular $\vec{c} = (3, 3, 0)$

92. Se considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los valores de **x** para los que no existe la inversa de A

b) Para $x = 3$, calcula, si es posible, A^{-1}

Solución:

a) No existe la inversa para los valores de **x** que hagan su determinante cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x$$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0,\ x = 1$

b) Para $x = 3$ se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

Para profundizar

93. Considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$

Solución:

a) La matriz A no tiene inversa cuando su determinante sea cero, $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 1\end{vmatrix} = 1-\lambda^2$$

$1-\lambda^2=0$

$\lambda = 1,\ \lambda = -1$

b) Para $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2/3 & -1/3 & 0\\ -4/3 & -2/3 & 1\end{pmatrix}$$

94. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

calcula $(A^tA^{-1})^2A$

Solución:

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$A^tA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2=\begin{pmatrix}5/2 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}21/4 & -5/4\\ 5 & -1\end{pmatrix}$$

$$(A^tA^{-1})^2A=\begin{pmatrix}21/2 & -5/4\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 11/2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

95. Sean los vectores:

$\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 5, -2)$, $\mathbf{x} = (4, 1, 3)$ y $\mathbf{z} = (4, 1, -8)$

a) ¿Se puede expresar **x** como combinación lineal de **u** y **v**? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

b) ¿Se puede expresar **z** como combinación lineal de **u** y **v**? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica por qué.

c) ¿Son **u**, **v** y **z** linealmente independientes? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix} = -99 \neq 0$$

u, v y **x** son linealmente independientes; por tanto, **x** no es combinación lineal de **u** y **v**

b) $$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 1 & -8\end{vmatrix} = 0$$

u, v y **z** son linealmente dependientes. Como **u** y **v** son independientes por no ser proporcionales, **z** es combinación lineal de **u** y **v**

$a(-1, 2, 3) + b(2, 5, -2) = (4, 1, -8)$

$$\left.\begin{aligned}-a+2b&=4\\ 2a+5b&=1\\ 3a-2b&=-8\end{aligned}\right\}$$

$a = -2,\ b = 1$

Por tanto:

$$-2(-1, 2, 3) + (2, 5, -2) = (4, 1, -8)$$

c) **u, v** y **z** son linealmente dependientes porque el determinante formado por ellos vale cero, como se ha visto en el apartado b).

96. Sea M una matriz real cuadrada de orden **n** que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden **n.** Halla todas las matrices de la forma $M=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

Sea $M=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$

$$M^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2+b^2\end{pmatrix}$$

$$M^2-2M=\begin{pmatrix}a^2+b^2-2a & 2ab-2b\\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2-2a & 2ab-2b\\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a\end{pmatrix}$$

$$3I=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Como $M^2 - 2M = 3I$, se tiene que

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2-2a & 2ab-2b\\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}a^2+b^2-2a&=3\\ 2ab-2b&=0\\ a^2+b^2-2a&=3\\ 2ab-2b&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}a^2+b^2-2a&=3\\ ab-b&=0\end{aligned}\right\}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

$ab - b = 0 \Rightarrow b(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Si $a = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

$a = 1,\ b = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Si $b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 3 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$
$a = -1, a = 3$

$a = -1,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$a = 3,\ b = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

Paso a paso

97. Halla el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98. Halla la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

99. Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

100. Resuelve la ecuación matricial:

$$\mathbf{AX + 2B = C}$$

sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

101. Halla todas las matrices X que permutan con A, es decir, tales que XA = AX, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

102. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

103. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$$

comprueba que:

a) $|A| = |A^t|$ b) $|B| = |B^t|$ c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Solución:

Problema 103

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

a)

$|A| \rightarrow 10$

$|A^T| \rightarrow 10$

b)

$|B| \rightarrow 82$

$|B^T| \rightarrow 82$

c)

$|A \cdot B| \rightarrow 820$

$|A| \cdot |B| \rightarrow 820$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

www.yoquieroaprobar.es

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

104. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

halla una matriz **P** que verifique: **PB = AP**

Solución:

Problema 104

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$P \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$

$A \cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} a+2\cdot c & b+2\cdot d \\ c & d \end{pmatrix}$

$\text{resolver}\begin{bmatrix} a = a + 2c \\ -b = b + 2d \\ c = c \\ -d = d \end{bmatrix} \rightarrow \{\{a=a, b=0, c=0, d=0\}\}$

La matriz es $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

105. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Discute, en función de los valores que pueda tomar **k,** si la matriz:

a) AB tiene inversa.

b) BA tiene inversa.

Solución:

Problema 105

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a)

$|A \cdot B| \rightarrow 0$

A · B no tiene inversa nunca, independiente del valor de k.

a)

$|B \cdot A| \rightarrow k^2+2\cdot k+3$

$\text{resolver}(k^2+2\cdot k+3 = 0) \rightarrow \{\}$

B · A tiene inversa siempre, independiente del valor de k.

106. Resuelve la siguiente ecuación dada por un determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Problema 106

$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & -a & -1 \end{vmatrix} \rightarrow a^6-1$

$\text{resolver}(a^6 - 1 = 0) \rightarrow \{\{a=-1\}, \{a=1\}\}$

107. Halla el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

según los valores de **a**

Solución:

Problema 107

$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A(a)| \rightarrow a^3-3\cdot a+2$

$\text{resolver}(a^3 - 3\cdot a + 2 = 0) \rightarrow \{\{a=-2\}, \{a=1\}\}$

Si $a \neq -2$, $a \neq 1$, Rango (A) = 3

Para a = −2

$A(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(-2)) \rightarrow 2$

Para a = 1

$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 1$

www.yoquieroaprobar.es

© Grupo Editorial Bruño, S.L.

108. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

di cuándo la matriz A es invertible.

Calcula la inversa para a = 1

Solución:

Problema 108

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2\cdot a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A(a)| \rightarrow -2\cdot a^3 - 4\cdot a^2 + 2$$

$$\text{resolver}(-2\cdot a^3 - 4\cdot a^2 + 2 = 0) \rightarrow \left\{\{a=-1\}, \left\{a = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}, \left\{a = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

La matriz A tiene inversa si $a \neq -1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Para a = 1

$$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A(1))^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

109. Calcula la matriz X tal que:

$$XA + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 109

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(C - B)\cdot A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

© Grupo Editorial Bruño, S.L.