**Problemas. Todos ellos valen 2.5 puntos**

**1.** Dado el sistema: $\begin{cases} kx - 2y + z = 1 \\ 2x + (k+1)y - 2z = 2 \\ (k+4)x + 2ky - 3z = 5 \end{cases}$

a) Discutir las soluciones del sistema según los valores de k. (1.75 puntos)
b) Resolver cuando k=0. (0.75 puntos)

**Solución**

**a)**

$$A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & -2 & 2 \\ k+4 & 2k & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 2 & k+1 & -2 \\ k+4 & 2k & -3 \end{pmatrix}$$

Rango de A:

|A|=0

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2k - 2 = 0 \quad si \ k = -1$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ k+1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - k = 0 \quad si \ \ k = 3$$

Independientemente del valor de k el rango es 2, pues si k=-1 el segundo menor de orden 2 es distinto de cero, y si k=3 es el primero el que es distinto de cero.

Rang(A)=2 $\forall k \in R$

Rango de $A^*$

$$\begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 2 & k+1 & 2 \\ k+4 & 2k & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ k+4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ k+1 & -2 & 2 \\ 2k & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rang($A^*$)=2 $\forall k \in R$

Solución: $\forall k \in R$ se cumple que rang(A)=rang($A^*$)=2 → SCI ($\infty$ soluciones con un parámetro libre)

b) Si k=0 → SCI (2 ecuaciones con 3 incógnitas):

$$\begin{cases} -2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 3z = 5 \end{cases}$$

Cojamos la 1ª y 3ª ecuación y la z como parámetro libre:

$$\begin{cases} -2y = 1 - z \\ 4x = 5 + 3z \end{cases} \rightarrow \ Solucion: \begin{cases} x = \dfrac{3t+5}{4} \\ y = \dfrac{t-1}{2} \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**2.** Sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 2 \\ x + my = 0 \\ x + y - z = m + 2 \end{cases}:$$

a) Discute según los valores del parámetro a (1.5ptos)
b) Resuelve el sistema cuando m=1 y cuando a=2 (1 pto)

**Solución**

**a)**

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix}$$

- Estudiemos el rango de A: $|A| = -m^2 + m = 0$ si m=0, m=1
  1. $\forall m \in \mathbb{R} - \{0,1\} \rightarrow$ rang(A)=3
  2. Para m=1:

     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A(m=1)=2$$

  3. Para m=0:

     $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A(m=0)=2$$

- Estudiemos el rango de A*:
  1. Para $m \in \mathbb{R} - \{1,0\}$ rang($A^*$)=3, pues rang(A)=3.
  2. Para m=1

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$, tenemos que el menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ rang($A^*$)=3

3. Para m=0

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Todos los menores de  de orden 3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → ran($A^*$)=2 pues

Resumamos los resultados en la siguiente tabla

| | m=1 | m=0 | m∈R-{1,0} |
|---|---|---|---|
| rang(A) | 2 | 2 | 3 |
| rang($A^*$) | 3 | 2 | 3 |
| | Inc | C.I. | C. D. |

**Conclusión:**

- *∀m∈R-{1,0}, sistema compatible determinado,*
- *si m=0, sistema compatible indeterminado, y si m=1, sistema incompatible.*

**b)** m=1→ Sistema incompatible no solución.

m=2→ $\left.\begin{array}{l} (1)\; 2x + y - z = 2 \\ (2)\; x + 2y = 0 \\ (3)\; x + y - z = 4 \end{array}\right\}(S)$ Compatible determinado, resolvemos por Cramer:

|A|=-2

x=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -2$ , y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1$ , z=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -5$

**3.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular $A^n$ para cualquier $n \in N$. Concretar para n=6. (0.75 puntos)

b) Resolver la ecuación matricial: $A \cdot X = -2 \cdot B \cdot X + B$ (1 punto)

c) Sea $D \in M_{3x3}(R)$ formada por las columnas $c_1$, $c_2$, $c_3$, y tal que $|D|=3$. Dada la matriz $C=(c_1+c_2, -2c_3, c_3+2c_1)$. Calcular el determinante de $C^{-1}$. (0.75 puntos)

**Solución**

**a)** $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} -(-2)^{n-1} & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -(-2)^{n-1} & 0 & -(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$

$A^6 = \begin{pmatrix} -(-2)^5 & 0 & (-2)^5 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -(-2)^5 & 0 & -(-2)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 0 \\ -32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$

**b)** $A \cdot X = -2 \cdot B \cdot X + B \rightarrow (A + 2 \cdot B)X = B \rightarrow X = (A+2B)^{-1} \cdot B$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A+2B)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = (A+2B)^{-1} \cdot B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**c)** $\det(C) = \det(c_1+c_2, -2c_3, c_3+2c_1) = \det(c_1, -2c_3, c_3+2c_1) + \det(c_2, -2c_3, c_3+2c_1)$
$= 0 + \det(c_2, -2c_3, c_3) + \det(c_2, -2c_3, 2c_1) = \det(c_2, -2c_3, 2c_1) = -4\det(c_2, c_3, c_1) =$
$= -4(-1)(-1)\det(c_1, c_2, c_3) = -4 \cdot 3 = -12$
$\det(C^{-1}) = -1/12$

**4.** Sea $f(x)=x^3/(x^2+1)$.

a) Hallar dominio, simetría, asíntotas y monotonía. Representar. (1.5 puntos)

b) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$

**<u>Solución</u>**

a)

Dom(f(x))=R

$f(-x)=-x^3/(x^2+1)=-f(x) \rightarrow$ Simetría impar

Asíntotas

AV: No tiene

AH: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. No tiene

AO: y=x

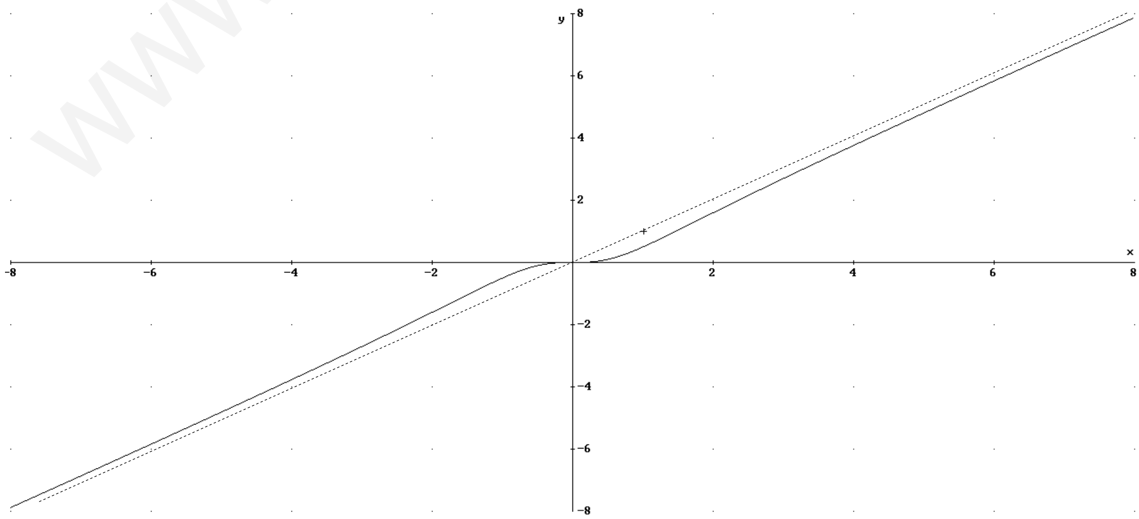
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=0.$$

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow x=0$$

| | (-∞,0) | 0 | (0,∞) |
|---|---|---|---|
| Sig(f'(x)) | + | 0 | + |
| Monotonía | Crece | (0,0) | Crece |

La función crece en R-{0}. Al ser x=0 una raíz doble será un punto de inflexión



b)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 + \ln(x^2+1)\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\ln(2))$$

$$\begin{array}{lll} x^3 & & |\ \underline{x^2+1} \\ \underline{-x^3} & \underline{-x} & \underline{\quad x} \\ & \underbrace{-x} & \end{array}$$