Ejercicios de matrices y sistemas

1. Justifica por qué no es cierta la igualdad: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ cuando *A* y *B* son dos matrices cuadradas cualesquiera.

2. Sea A una matriz de dimensión 3×2. ***(a)*** ¿Existe una matriz B tal que $A\cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

(b) ¿Y para $B\cdot A$? Pon un ejemplo para cada caso, siendo la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

3. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, ¿lo será también su producto $A\cdot B$? Si la respuesta es afirmativa, justifícala y, si es negativa, pon un contraejemplo. (Una matriz es simétrica si coincide con su traspuesta)

4. Si A es una matriz tal que $A^2=A$ y $B=2A-I$, demuestra que $B^2=I$.

5. Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

6. Una matriz de 3 filas y tres columnas tiene rango 3. ***(a)*** ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna? ***(b)*** Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

7. Si $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ x & x\end{pmatrix}$, estudia si existe algún valor de *x* tal que $B^2=B$.

8. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij}=0 \quad si \quad i\neq j$ (*A es una matriz diagonal*). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

9. ***(a)*** Considerar una matriz A de orden $m\times n$ con $m\neq n$. Razonar si se puede calcular la expresión $A\cdot A'-A'\cdot A$ siendo A' la matriz traspuesta de A.

(b) Considerar la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, resolver por el método de Gauss:

(b1) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A'\cdot A$

(b2) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A\cdot A'$

9. Sea la matriz A, con b un parámetro real. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b^2\end{pmatrix}$. Se pide:

(a) ¿Para qué valores del parámetro b el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene sólo la solución x = y = z = 0 ? Justifica la respuesta.

(b) Para b = -1, resolver si es posible el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) Determinar una matriz X que verifique: $A^2 \cdot X = \frac{1}{2} \cdot B \cdot C$

(b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(C \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo por el método de Gauss.

11. ¿Cuánto ha de valer *a* para que

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

12. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

efectúa todos los posibles productos entre ellas. (Incluyendo D x D, hay 6 posibles multiplicaciones).

13. Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula

(a) A + B; ***(b)***B + A; ***(c)*** A - B; ***(d)*** 3A - 2B; ***(e)*** A . B

14. Dadas las matrices

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Efectúa los productos A . B, B . A, A'.B, A.B', B'.A, (A.B)'.

A la vista de los resultados, ¿qué propiedades se te ocurren sobre el producto de matrices y sus traspuestas?

15. Sean tres matrices cuadradas A, B, y C, con

B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ y A . B = C.

(a) ¿Cómo ha de ser la primera fila de A para que la primera fila de B y la primera de C sean iguales?

(b) ¿Cómo ha de ser la segunda fila de A para que la segunda de C sea igual a la segunda de B multiplicada por 4?

(c) Si queremos que la primera fila de B quede multiplicada por 3, la segunda por 4 y la tercera por -2, ¿cómo ha de ser A?

(d) ¿Y si queremos multiplicar a las tres filas por 1?

16. Calcula el valor de las incógnitas para que se verifique:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

17. Calcula la matriz inversa de : $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

18. Resuelve en forma matricial los sistemas:

(a) $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=6 \\ y-z=1 \\ z=1 \end{array} \right.$ ***(b)*** $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 4x+6y+8z=2 \\ 7x-4y-z=-11 \end{array} \right.$ ***(c)*** $\left\{ \begin{array}{c} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{array} \right.$

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^{-1} y A^{n}.

20. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla A^3 y A^{50}.

21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. ***(a)*** Calcula los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$. ***(b)*** Para a= 1 y b = 0, resuelve la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

22. Se considera el sistema: $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ 2y+kz=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

(a) Discute el sistema para los diferentes valores de k.

(b) Resuelve el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

(c) Resuelve el sistema para k = 3.

23. Sea la igualdad $A\cdot X+B=A,$ donde A, X y B son matrices cuadradas del mismo orden.

(a) Despeja la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

(b) Obtén la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $y\ B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

24. Analiza la existencia de solución del sistema siguiente, según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ 2x+4y+z=5 \\ 2x+2y+(a^2-10)z=a \end{cases}$$

25. ***(a)*** Despeja la matriz X en la ecuación: $2\cdot X+A\cdot X=I.$

(b) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $y\ I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot B\cdot X=C\cdot X+I_2$. Justifica la respuesta.

27. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $y\ E=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de los números reales x, y y z para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices:

$$x\cdot A^{-1}\cdot B=E+y\cdot C+z\cdot D$$

Ejercicios resueltos

- **Ejercicio 1**

Encuentra, si existen, matrices cuadradas A, de orden 2, distintas de la matriz identidad, tales que $A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot A$. ¿Cuántas matrices A hay con esa condición? Razona tu respuesta. *Solución: Todas las matrices de la forma* $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$, *con a y c* $\in$ *R.*

Ejercicio 2

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$, calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X tal que $X\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. *Solución: X=*$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

b) Una matriz Y tal que $A\cdot Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. *Solución: No existe, porque A.Y daría una matriz de 3 filas.*

Ejercicio 3

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 0 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$. a) Encuentra los valores de m para los que existe matriz inversa. b) Si m = 1 es uno de esos valores, halla A^{-1}.

Solución: a) Si $m\neq 2$*, A posee inversa. b)* $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{6}\\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6}\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Ejercicio 4

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, halla la inversa de A-B y la matriz X tal que $X\cdot(A-B)=A+B$.

Solución: $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. $X=\begin{pmatrix}7 & -10\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

Ejercicio 5

Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X+N=P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\ y\ P=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución: $P-N=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 2 & 0\end{pmatrix},\ M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}-4 & 5 & -2\\ -5 & 6 & -5\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix}$

Ejercicio 6

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Resuelve por el método de Gauss:

a) El sistema de ecs. lineales homogéneo cuya matriz de los coeficientes es $A^t\cdot A$.

b) El sistema de ecs. lineales homogéneo cuya matriz de los coeficientes es $A\cdot A^t$.

Solución: a) y=-3x, z=x   b) x=y=0

Ejercicio 7

Discute, según los valores de m, los sistemas: a) $\left\{\begin{array}{c} x-2y+3z=5 \\ 2x+my-z=0 \\ 3x-y+2z=5m \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{c} 2x+y=2m \\ x-my=-3 \\ x+y=3 \end{array}\right.$

Solución: a) Si m=1 Compatible e indeterminado b) Si m≠1 Compatible y determinado.

Ejercicio 8

Discute, según los valores de m, y resuelve los sistemas: a) $\left\{\begin{array}{c} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{c} x+my+z=2 \\ mx+2z=4 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=6 \\ -x-y+(m-4)z=7 \\ x+y+2z=11 \end{array}\right.$

Solución: a) Si m=1 Incompatible; Si m=0 C. e Indeterminado z=0, x=1-y; Si m≠ $0,1$ C. y Determinado.
b) El sistema siempre es compatible. Si m=1 C e indeterminado, Si m≠1 C y Determinado.
c) Si m=2 Incompatible. Si m≠2 C. y Determ.

Ejercicio 9

¿Es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$, siendo A y B matrices cuadradas?
Solución: No, pues el producto no es conmutativo, $A\cdot B \neq B\cdot A$, *y por lo tanto* $A\cdot B + B\cdot A \neq 2\cdot A\cdot B$.

Ejercicio 10

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y\ B=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.Averigua los valores de a y b para que conmuten.
Solución: a=-3, b=-2.

Ejercicio 11

Calcula inversa de $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *Solución:* $A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 12

La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta en 198 unidades. Calcula dicho número. *Solución: 567*

Ejercicio 13

En una competición deportiva participaron 50 atletas, distribuidos en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles. El doble del número de atletas infantiles, por una parte, excede en una unidad al número de atletas cadetes y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de atletas juveniles. Determina el número de atletas que hubo en cada categoría. *Solución: 15 infantiles, 29 cadetes y 6 juveniles.*

- ## Ejercicio 14

En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplean leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche el doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios por cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0’8 €; cacao, 4 €; almendras, 13 €. En un día se fabrican 9000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25800 €. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada ingrediente? *Solución: 2000 kg de cacao, 1000 kg de almendras y 6000 kg de leche.*

- ## Ejercicio 15

En una empresa trabajan 160 personas y todas ellas deben someterse a un reconocimiento médico en el plazo de 3 días. El primer día lo hacen la tercera parte de los que los hacen durante los otros dos días. El segundo día y el tercero lo hacen el mismo número de personas. Calcula el número de trabajadores que acuden cada día. *Solución: El primer día acuden 40, el segundo y el tercero 60 trabajadores.*