

## Control de la 2ª Evaluación. Solución

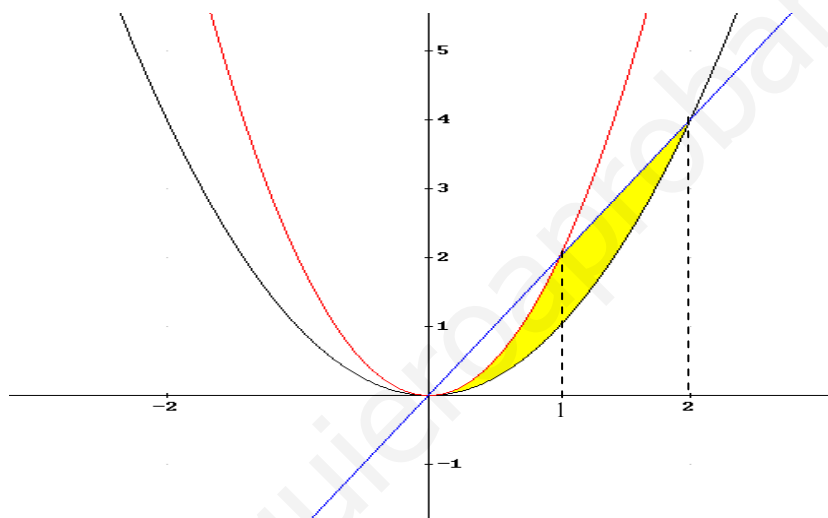
Resolver los siguientes problemas y cuestiones. Se valorará no sólo el resultado sino también el *desarrollo del problema* y el *uso correcto de la notación matemática*.

**C1.** Calcular el área encerrada por las siguientes tres curvas:  $f(x)=x^2$ ,  $g(x)=2x^2$ ,  $h(x)=2x$ .  
**(1.5 puntos)**

### Solución.

Representamos las funciones:

- las parábolas, las dos tienen el vértice en el origen. La función  $g(x)$  crece más rápido que  $f(x)$  ya que tiene un factor dos.
- La recta pasa por el origen  $(0,0)$  y por  $(2,4)$ .



Las tres funciones se cortan en el origen  $(0,0)$ , veamos los puntos de corte de la recta con las parábolas:

$$x^2=2x \rightarrow x=0, x=2$$

$$2x^2=2x \rightarrow x=0, x=1$$

El área es tal que la dividimos en dos intervalos

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1=\int_0^1 (2x^2 - x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} u^2$$

$$A_2=1 \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} u^2$$

$$A=\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 u^2$$

**C2.** Calcular el área encerrada por la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$  y el eje OX entre las rectas  $x=-1$  y  $x=3$ . **(1.5 puntos)**

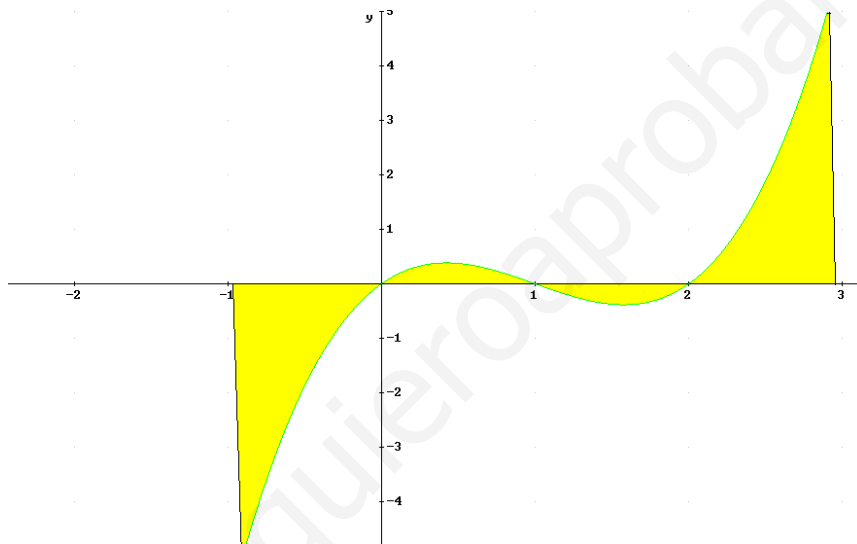
**Solución**

Tenemos que ver los puntos de corte con el eje OX:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x=0, x=1, x=2$$

Veamos en los 4 intervalos si la función por encima o debajo del eje OX

	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$
Signo( $f(x)$ )	-	+	-	+
Area	$A_1 = -\int_{-1}^0 f(x)dx$	$A_2 = \int_0^1 f(x)dx$	$A_3 = -\int_1^2 f(x)dx$	$A_4 = \int_2^3 f(x)dx$



$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$$A_1 = 9/4 \cdot u^2$$

$$A_2 = 1/4 \cdot u^2$$

$$A_3 = 1/4 \cdot u^2$$

$$A_4 = 9/4 \cdot u^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 5 \cdot u^2$$

**C3.** Calcular uno de los siguientes dos determinantes: **(1.5 puntos)**

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 11 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -12 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - 4F_2 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{matrix} = 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -14 & 11 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \\ -12 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-151) = 151$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z+1 & x & 0 \\ z & x & y & 1 \\ 0 & y+1 & x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z+1 & y & z & 1 \\ x+y+z+1 & z+1 & x & 0 \\ x+y+z+1 & x & y & 1 \\ x+y+z+1 & y+1 & x & z \end{vmatrix} = (x+y+z+1) \begin{vmatrix} 1 & y & z & 1 \\ 1 & z+1 & x & 0 \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y+1 & x & z \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} \text{b)} &= (x+y+z+1) \begin{vmatrix} 1 & y & z & 1 \\ 0 & z+1-y & x-z & -1 \\ 0 & x-y & y-z & 0 \\ 0 & 1 & x-z & z-1 \end{vmatrix} = (x+y+z+1) \begin{vmatrix} z+1-y & x-z & -1 \\ x-y & y-z & 0 \\ 1 & x-z & z-1 \end{vmatrix} = \\ &= (x+y+z+1) \cdot [(z+1-y)(y-z)(z-1) - (x-y)(x-z) + (y-z) - (x-y)(x-z)] = \\ &= (x+y+z+1) \cdot [(z+1-y)(y-z)(z-1) - 2(x-y)(x-z) + (y-z)] \end{aligned}$$

**C4.** Calcular la matriz  $X \in M_{3 \times 3}$  que cumple la siguiente igualdad **(1.5 puntos)**:

$$A \cdot X \cdot C = A^2 \cdot C^2 + A$$

$$\text{Siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Ayuda:* antes de operar con matrices simplifica si puedes.

**Solución:**

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} (A^2 \cdot C^2 + A) \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot A^2 \cdot C^2 \cdot C^{-1} + A^{-1} \cdot A \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot C \cdot C \cdot C^{-1} + C^{-1}$$

$$X = A \cdot C + C^{-1}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**C5.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , calcular  $A^2, A^3, A^4, \dots, A^n$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ). ¿Cuánto vale  $A^{67}$ ?

**(1.5 puntos)**

$$A^1 = A$$

$$A^2 = -Id$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = Id$$

$$A^5 = A$$

...

$$A^n = \begin{cases} A & n = 1 + 4k \\ -Id & n = 2 + 4k \\ -A & n = 3 + 4k \\ Id & n = 4k \end{cases}$$

Si el resto de dividir entre 4 el exponente:

- es 1 el resultado es  $A$ ,
- si 2 el resultado es  $-Id$
- si 3 el resultado es  $-A$
- si es 0 el resultado es  $Id$

$$\text{resto}(67/4) = 3 \rightarrow A^{67} = A^3 = -A$$

**C6.** Encontrar las matrices  $A$  triangulares inferiores  $2 \times 2$ , que cumplan  $A \cdot A^t = Id$ , con  $Id$  la matriz identidad. **(1.5 puntos)**

**Solución**

Triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ y } A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 = 1 \\ ab = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a = \pm 1, b = 0, c = \pm 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C7. Se tiene una matriz  $M$  cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  ( $M=(C_1, C_2, C_3)$ ) y cuyo determinante vale  $-4$ . Se considera la matriz  $A$  cuyas columnas son  $A=(-C_2, C_1+3C_2, 2C_3)$ . Calcular razonadamente  $\det(M \cdot A^{-1})$ .

(1 punto)

$$\det(M \cdot A^{-1}) = \det(M) \cdot \det(A^{-1}) = \frac{\det(M)}{\det(A)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(-C_2, C_1+3C_2, 2C_3) = \det(-C_2, C_1, 2C_3) + \det(-C_2, 3C_2, 2C_3) = \\ &= \det(-C_2, C_1, 2C_3) + 0 = -2 \det(C_2, C_1, C_3) = 2 \det(C_1, C_2, C_3) = -8 \end{aligned}$$