Problemas de 2ºBachillerato (ciencias sociales)

Isaac Musat Hervás

27 de mayo de 2007

Índice General

Capítulo 1

Problemas de Álgebra

1.1 Matrices, Exámenes de Ciencias Sociales

Problema 1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcule la matriz P que verifica $B \cdot P - A = C^t$ (C^t, indica transpuesta de C).

2. Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.

3. Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

Solución:

1.

$$B \cdot P - A = C^t \Longrightarrow B \cdot P = C^t + A \Longrightarrow P = B^{-1}(C^t + A)$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = B^{-1}(C^t + A) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A_{2\times 3} \cdot M_{m\times n} \cdot C_{3\times 2} \Longrightarrow m = 3, \ n = 3$$

3.

$$C_{3\times 2} \Longrightarrow C^t_{2\times 3}$$

$$C^t_{2\times 3} \cdot N_{m\times n} \Longrightarrow m = 3, \;\; n = 2$$

Problema 2 Se pide:

1. Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A + A^t = X \cdot B$, siendo A^t la matriz transpuesta de A.

2. Hallar la matriz X sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; \text{y} \;\; B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $X \cdot A + A^t = X \cdot B \Longrightarrow X \cdot A - X \cdot B = -A^t \Longrightarrow X(A-B) = -A^t \Longrightarrow X = -A^t \cdot (A-B)^{-1}$

2.

$$-A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Sea $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

1. Calcular A^2.

2. Calcula todos los valores de x e y para los que se verifica que

$$A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2-1 = x+1 \\ -x-y=-2 \\ x+y=2 \\ y^2-1=-1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array} \right.$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica $AXB = 2C$.

Solución:

$$AXB = 2C \Longrightarrow X = A^{-1}2CB^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad 2C = A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Determinar la matriz X que verifica la ecuación $B \cdot X - A = 2X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

Solución:

$$B \cdot X - A = 2X \Longrightarrow B \cdot X - 2X = A \Longrightarrow (B-2I)X = A \Longrightarrow X = (B-2I)^{-1}A$$

$$B - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (B-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 6 Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. Una matriz cualquiera, ¿siempre se puede multiplicar por su transpuesta?

2. Todo sistema con más ecuaciones que incógnitas es incompatible, ¿verdadero o falso?

3. La probabilidad de que un cierto equipo de futbol gane un partido es 0,4 y la de que pierda es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que empate?

4. ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una función $g(x)$ si se sabe que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 0$?

Solución:

1.
$$Dim(C) = m \times n,\ Dim(C^T) = n \times m \Longrightarrow Dim(C \cdot C^T) = m \times M$$

   Si C es una matriz cualquiera, siempre se podrá multiplicar por su transpuesta y nos dará una matriz cuadrada de orden igual al número de filas de C.

2. Es falso, tenemos que estudiar el rango de la matriz asociada al sistema y compararlo con el rango de la ampliada. Es trivial pensarlo con un contraejemplo: Cuatro ecuaciones iguales, o combinaciones de una de ellas, y con tres incógnitas nos da un sistema compatible indeterminado.

3.
$$P(\text{Empate}) = 1 - 0,4 - 0,3 = 0,3$$

4. Que $g(0) = 0 \Longrightarrow$ la gráfica de esta función pasa por el punto $(0,0)$. Que $g'(0) = 0$ quiere decir que, la gráfica presenta un punto crítico en el punto $(0,0)$.

Problema 7 Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 8 Sabiendo que $2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y que $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

1. ¿Cuáles son las dimensiones de A y B?
2. Calcula las matrices A y B.

Solución:

1. Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener la misma dimensión, y si tenemos en cuenta que la dimensión de una matriz no varia al mutiplicarla por una constante, podemos concluir con que $dim\, A = dim\, B = 2 \times 3$.
2. $$\left\{ \begin{array}{l} 2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Problema 9 Hallar la matriz X que cumple $AXA = 2BA$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AXA = 2BA \Longrightarrow AX = 2B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot 2 \cdot B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Problema 10 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
2. Discutir si existe solución al sistema $AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.

Solución:

1.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 2 \\ -3 & -8 & -10 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow [c_2 \longleftrightarrow c_1] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ -8 & -3 & -10 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} f_2 + 8f_1 \\ f_3 - 7f_1 \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -42 & 21 \\ 0 & 2 & 28 & -14 \end{array}\right) \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} f_2/3 \\ f_3/2 \end{array}\right] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -14 & 7 \\ 0 & -1 & -14 & 7 \end{array}\right)$$

Como tiene dos filas iguales, mientras que las dos primeras son independientes, podemos asegurar que el sistema es compatible indeterminado. El sistema asociado será:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & - & 4z = & 2 \\ & -y- & & 14z = & 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -7 - 14t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{array} \right.$$

Problema 11 Hallar todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in R$$

que satisfacen la ecuación matricial

$$X^2 = 2X$$

Solución:

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + cb & c^2 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

Igualando las expresiones

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+cb & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 2a \\ ab+cb = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0, \quad a=2 \\ ab+cb=2b \\ c=0, \quad c=2 \end{cases}$$

Tendremos las siguientes posibles soluciones:

- Si $a=0,\ c=0 \Longrightarrow 2b=0 \Longrightarrow b=0$, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a=2,\ c=0 \Longrightarrow b=b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$
- Si $a=0,\ c=2 \Longrightarrow b=b \Longrightarrow b$ puede ser cualquier valor, luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$
- Si $a=2,\ c=2 \Longrightarrow 2b+2b=2b \Longrightarrow b=0$, luego $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.2 Sistemas de Ecuaciones, Exámenes de Ciencias Sociales

Problema 12 Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} mx+ & y- & 3z = & 5 \\ -x+ & y+ & z = & -4 \\ x+ & my- & mz = & 1 \end{cases}$$

1. Discútase el sitema según los diferentes valores del parámetro m.
2. Resuélvase el sitema para $m=2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2m^2+2m+4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

- Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $m=-1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
Tenemos que $|A|=0$ y que $\left|\begin{array}{rr} -1 & -3\\ -1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=$ 2. Y tenemos que $\left|\begin{array}{rrr} 1 & -3 & 5\\ 1 & 1 & -4\\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right|=6\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3.$
Luego en este caso $\text{Rango}(A)\neq\text{Rango}(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
- Si $m=2$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 5\\ -1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
Observamos que la tercera fila es la suma de las dos primeras y por tanto $\text{Rango}(\overline{A})=2$. Como $|A|=0$ y que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 1\\ -1 & 1 \end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow$ $\text{Rango}(A)=2$. Luego en este caso $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(\overline{A})<$n° de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2. Cuando $m=2$ el sistema es Compatible Indeterminado, luego tendrá infinitas soluciones. Para resolverlo eliminamos la tercera ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 3z= & 5\\ -x+ & y+ & z= & -4 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y= & 5+ & 3z\\ -x+ & y= & -4- & z \end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=3+\dfrac{4}{3}t\\ y=-1+t\\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 13 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y+ & z=0\\ x- & ky- & 3z=0\\ 5x+ & 2y- & z=0 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. Discutir el sistema para los distintos valores de k.

2. Resolver el sistema en los casos en los que sea posible.

Solución:

1. Se trata de un sistema homogeneo
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & -k & -3\\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad |A|=7k+56=0\Longrightarrow k=-8$$
Si $k\neq -8\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3\Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

   Si $k=8$:
$$A=\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 1 & -8 \end{vmatrix}=-13\neq 0$$
Luego el Rango$(A)=2\Longrightarrow$ el sistema sería compatible indeterminado.

2. Cuando $k\neq 0$ el sistema era compatible determonado, y como se trata de un sistema homogeneo, la única solución sería $x=y=z=0$, es decir, la solución trivial.

   Cuando $k=-8$ el sistema será compatible indeterminado con un grado de libertad, es decir, tendrá infinitas soluciones que depen derán de como varie un parámetro.

   Por el menor que escogimos en el apartado anterior para el estudio del rango, en este caso, podemos despreciar la tercera ecuación con lo que nos queda el siguiente sistema:
$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y+ & z=0\\ x+ & 8y- & 3z=0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrr} 2x- & 3y= & -z\\ x+ & 8y= & 3z \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{19}t\\ \\ y=\dfrac{5}{19}t\\ \\ z=t \end{array}\right.$$

1.2.1 Sistemas con Planteamiento

Problema 14 Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 19152 euros. La última versión del videojuego ha salido a la venta por un importe de 36 euros. Además de la última versión ha vendido, con un descuento del 30% y del 40%, otras dos versiones anteriores del videojuego. El número total de ejemplares vendidos de las dos versiones anteriores ha sido la mitad del de la última versión.

¿Cuántos ejemplares vendió de cada versión?

Solución:

Nombramos a las variables

x es el nº de videojuegos vendidos de la 1ª versión

y es el nº de videojuegos vendidos de la 2ª versión

z es el nº de videojuegos vendidos de la 3ª versión

Tendremos

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 36\cdot 0,7x+36\cdot 0,6y+36z=19152 \\ x+y=\dfrac{z}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=120 \\ y=80 \\ z=400 \end{array}\right.$$

Problema 15 Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=54 \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=54 \\ y=\frac{3}{2}x \\ z=2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=18 \\ z=24 \end{array}\right.$$

Problema 16 La suma de las tres cifras de un número es 18, siendo la cifra de las decenas igual a la media de las otras dos. Si se cambia la cifra de las unidades por la de las centenas, el número aumenta 198 unidades. Calcula dicho número.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ y=\dfrac{x+y}{2} \\ 100x+10y+z+198=100z+10y+x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 18 \\ x- & 2y+ & z= & 0 \\ x- & & z= & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=6 \\ z=7 \end{array}\right.$$

El número buscado es 567.

Problema 17 Juana y Mercedes tienen 20000 euros cada una para invertir. Cada una de ellas hace la misma distribución de dinero en tres partes,

P, Q y R, y las llevan a una entidad financiera. Al cabo de un año, a Juana le han dado un 4% de intereses por la parte P, un 5% por la parte Q y un 4% por la parte R, y a Mercedes le han dado un 5% de intereses por la parte P, un 6% por la parte Q y un 4% por la parte R. Juana ha recibido un total de 850 euros de intereses, mientras que Mercedes ha recibido 950 euros.¿De cuántos euros constaba cada una de las partes P, Q y R?

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} P+ & Q+ & R= & 20000 \\ 0,04P+ & 0,05Q+ & 0,04R= & 850 \\ 0,05P+ & 0,06Q+ & 0,04R= & 950 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P=5000 \\ Q=5000 \\ R=10000 \end{array}\right.$$

Problema 18 Tres hermanos tienen edades diferentes, pero saben que la suma de las edades de los tres hermanos es de 37 años y la suma de la edad del mayor más el doble de la edad del mediano más el triple de la edad del pequeño es de 69 años.

1. Expresa las edades de los tres hermanos en función de la edad del hermano menor.
2. ¿Es posible que el hermano pequeño tenga 5 años? ¿Y 12 años? Razona la respuesta.
3. Calcula la edad de los tres hermanos.

Solución:

1. x : años del mayor, y : años del mediano, z : años del pequeño.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 37 \\ x+ & 2y+ & 3z= & 69 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} x+ & y+ & = & 37-z \\ x+ & 2y+ & = & 69-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & z+5 \\ y= & 32-2z \end{array}\right.$$

2. Si $z=5 \Longrightarrow x=10,\ y=22$, lo cual es posible. Si $z=12 \Longrightarrow x=17,\ y=8$, lo cual es no es posible.
3. El sistema es compatible indeterminado y por tanto tiene infinitas soluciones. No se puede saber la edad de los tres hermanos.

Problema 19 Juan decide invertir una cantidad de 12000 euros en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas, A, B y C. Invierte en A el doble que en la B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432 euros. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12000 \\ x=2(y+z) \\ 0,04x+0,05y-0,02z=432,5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 12000 \\ x- & 2y- & 2z= & 0 \\ 4x+ & 5y- & 2z= & 4325 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=8000 \\ y=2750 \\ z=1250 \end{array}\right.$$

Juan ha invertido 8000 euros en la empresa A, 2750 euros en la B y 1250 euros en la C.

Problema 20 Tres trabajadores, A, B y C, al concluir un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y km de desplazamiento que han realizado cada uno de ellos.

	Horas Trabajo	Dietas	Kms
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores la misma retribución: x euros por hora trabajada, y euros por cada dieta y z euros por km de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924 euros al trabajador A, 1390 euros al B y 646 euros al C, calcular x, y, z.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 40x+ & 10y+ & 150z= & 924 \\ 60x+ & 15y+ & 250z= & 1390 \\ 30x+ & 6y+ & 100z= & 646 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=15 \\ y=30 \\ z=\frac{4}{25} \end{array}\right.$$

Problema 21 Tres familias van a una pizzería. La primera familia toma 1 pizza grande, 2 medianas y 4 pequeñas, la segunda familia toma 1 grande y 1 pequeña, y la tercera familia, 1 mediana y 2 pequeñas.

1. Sea A una matriz 3×3 que expresa el número de pizzas grandes, medianas y pequeñas que toma cada familia. Calcule A^{-1}.

2. Si la primera, la segunda y la tercera familia han gastado en total en pizzas en esta pizzería 51,50; 15,90 y 21 euros respectivamente, calcule el precio de una pizza grande, el de una pizza mediana y el de una pizza pequeña.

Solución:

1.

	grandes	medianas	pequeñas
1ªfamilia	1	2	4
2ªfamilia	1	0	1
3ªfamilia	0	1	2

$$\Longrightarrow A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51,5 \\ 15,90 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^1 B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 51,5 \\ 15,90 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 8,2 \\ 6,4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 9,5 \\ y = 8,2 \\ z = 6,4 \end{cases}$$

Problema 22 Juan, Pedro y Luis corren a la vez en un circuito. Por cada kilómetro que recorre Juan, Pedro recorre 2Km y Luis recorre tres cuartas partes de lo que recorre Pedro. Al finalizar, la suma de las distancias recorridas por los tres fué de 45 Km, ¿cuántos Kilómetrosrecorrió cada uno?

Solución:

Sea x los Kilómetros que recorre Juan, tendremos

$$x + 2x + \frac{3}{4} \cdot 2x = 45 \Longrightarrow x = 10$$

Luego Juan ha recorrido 10 Km, Pedro 20 Km y Luis 15 Km.

Problema 23 Encontrar tres números, A, B y C, tales que su suma sea 210, la mitad de la suma del primero y del último más la cuarta parte del otro sea 95 y la media de los dos últimos sea 80.

Solución:

$$\begin{cases} A + B + C = 210 \\ \frac{A+C}{2} + \frac{C}{4} = 95 \\ \frac{B+C}{2} = 80 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + & B + & C = & 210 \\ 2A + & B + & 2C = & 380 \\ & B + & C = & 1600 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 50 \\ B = 40 \\ C = 120 \end{cases}$$

Problema 24 Una fábrica de helados elabora tres tipos de helado, H_1, H_2 y H_3, a partir de tres ingredientes A, B y C. Se desea saber el precio unitario de cada ingrediente sabiendo que el helado H_1 se elabora con 2 unidades de A, 1 unidad de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0,9 euros. El helado H_2 se elabora con una unidad de A, dos unidades de B y 1 unidad de C y supone un coste de 0,8 euros. El helado H_3 se elabora con 1 unidad de A, 1 unidad de B y dos unidades de C y supone un coste de 0,7 euros.

Solución:

x: precio unitario del ingrediente A

y: precio unitario del ingrediente B

z: precio unitario del ingrediente C

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & y+ & z=0,9 \\ x+ & 2y+ & z=0,8 \\ x+ & y+ & 2z=0,7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0,3 \\ y=0,2 \\ z=0,1 \end{array}\right.$$

Problema 25 Un individuo que realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad a de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.

1. Plantea un sistema de ecuaciones (en función de a) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

2. ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

3. La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

Solución:

1. x: fotos normales

   y: fotos óptimas

$$\left\{\begin{array}{rrr} 0,20x+ & ay= & 9,2 \\ x+ & y= & 24 \end{array}\right.$$

   Tenemos que

$$A=\left(\begin{array}{cc} 0,2 & a \\ 1 & 1 \end{array}\right), \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 0,2 & a & 9,2 \\ 1 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

$$|A|=0,2-a=0 \Longrightarrow a=0,2$$

   Si $a\neq 0,2$ el Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=$nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

   Si $a=0,2$ el Rango$(A)=1\neq$Rango$(\overline{A})=2$ y el sistema es Incompatible.

2. Si cada foto de calidad óptima ocupa 0,20 megabytes, entonces el sistema sería incompatible, no tendría solución.

3. No esposible, ya que cuando $a = 0,2 \Longrightarrow$ el sistema es compatible.

1.3 Matrices en General

Problema 26 Sea A una matriz $m \times n$

1. ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

2. ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila?. Si existe, ¿qué orden tiene?.

3. Busca una matriz B tal que $BA = (0\ \ 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

1. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $p \times n$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante BA tendrá de dimensión $1 \times m$, que sería una matriz fila.

2. Para que B se pueda multiplicar por A tiene que tener por dimensión $m \times p$, y en el caso de que $p = 1$ la matriz resultante AB tendrá de dimensión $m \times 1$, que sería una matriz columna, está claro que no es posible para ningún valor que demos a p, un resultado de matriz fila.

3. Para que $BA = (0, 0)$ es necesario que B tenga de dimensión 1×3, $B = (a\ \ b\ \ c)$ y tenemos:

$$(a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a\ \ \ a+b) = (0\ \ 0) \Longrightarrow a = 0,\ \ b = 0$$

c puede ser cualquier valor por lo que la matriz $B = (0\ \ 0\ \ c)$.

Problema 27 Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Determinantes

Problema 28 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \longrightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \longrightarrow C_3 - C_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Problema 29 Calcula el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x-3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-a)^3(x-3a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^3(x-3a)$$

Problema 30 Halla en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_2) = \begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3-1)$$

Problema 31 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= (F_3 \longrightarrow F_3 - F_2) = a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & c-a & c-a \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(d-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Problema 32 Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \longrightarrow C_1 - xC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-x^2 & -x & 1 & x \\ x & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & x \\ x & -x & 0 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} 1-x^2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (C_1 \longrightarrow C_1 + C_2) =$$

$$= -x^2\begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} 2-x^2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = x^2(x^2-4) = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0, \;\; x = 2, \;\; x = -2$$

Problema 33 Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \longrightarrow C_1 - aC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_3) =$$

$$= a \begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

Problema 34 Halla, en función de a, el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 \\ -a^2+1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1) \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & a^2-a \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a+1)(a-1) = (a^2-1)^2$$

Problema 35 Calcule mediante transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix} = [C_1 : C_1{+}C_2{+}C_3] = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= (2{+}a{+}b{+}c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} = [F_2 : F_2{-}F_1] = (2{+}a{+}b{+}c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & 2+c \end{vmatrix} = 4(2+a+b+c)$$

Problema 36 Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b{-}a)^2\begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a{-}b)^2(a{-}b) = (a{-}b)^3$$

Problema 37 Se pide:

1. Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

2. Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. $|A^2| = |A\cdot A| = |A|\cdot|A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

2.

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2-6k+5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} k^2-6k+5=0 \\ 8(k-1)=0 \\ 2-2k=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k=1$$

1.5 Matrices

1.5.1 Rango de una Matriz

Problema 38 Estudia el rango de esta matriz, según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix} = t^2+4t-12=0 \Longrightarrow t=-6,\ t=2$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2t+2t=0$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & t & -2 \end{vmatrix} = -8+8=0$$

4.

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ t & 4 & 0 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 2(t^2 - 4t - 12) = 0 \Longrightarrow t = -6, \; t = 2$$

En conclusión:

Si $t = -6$ o $t = 2$, los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $t \neq -6$ y $t \neq 2$, alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 39 Determina cuál es el rango de la matriz A, según los valores de λ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de λ que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda^2 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \; \lambda = 1, \; \lambda = -2$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \; \lambda = 2$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2(2-\lambda^2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -2,\ \lambda = 1$$

En conclusión, como no hay ningún valor de λ que anule los cuatro determinantes a la vez $\Longrightarrow Rango(A) = 3$

Problema 40 Estudia el rango de la matriz M según los valores de t:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & t & 3 \\ 1 & 8-3t & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ t & 3 & 2 \\ 8-3t & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión, los cuatro determinantes son cero sea cual sea el valor de t, luego $Rango(M) = 2$.

Problema 41 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(M) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow Rango(M) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2a & 5 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -1$$

2.
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 2a & a \end{vmatrix} = a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -1,\ a = 2$$

3.
$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 - 4a + 3) = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = 3$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 2a & 5 & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 8a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = \frac{5}{3}$$

En conclusión:

Si $a = 1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq 1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 42 Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3,\ a = -1$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión:

Si $a = -3$ o $a = -1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq -3$ y $a \neq -1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.

Problema 43 Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = 8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

1.5.2 Inversa de una Matriz

Problema 44 Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$$

Para los casos en los que $a = 2$ y $a = 0$.

Solución:

Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = -a = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 0$.

- Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 0$ no tiene inversa.

Problema 45 Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla los valores de x para los cuales la matriz M no es inversible. Hallar la inversa de M para $x = 2$.

Solución:

Para que M tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|M| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Es decir, la matriz M tiene inversa siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Para $x = 2$ tendremos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{Adj(M^T)}{|M|} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 46 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.
2. Calcular A^{-1} para $k = 1$.

Solución

1. *Calculamos* $|A| = 2k^2 - k - 3 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{3}{2}$, $k = -1$. *Luego* A *tendrá inversa siempre que* $k \neq 0$.

2. *Sustituimos* $k = 1$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 47 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de a para los que la matriz no es inversible.

2. Calcula A^{-1} para $a = 2$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = (a-1)(3a-2) = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{2}{3}$.

2. Para $a = 2$ tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema 48 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de λ para los que la matriz no es inversible.

2. Calcula A^{-1} para $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = 3\lambda^2 + 6\lambda + 3 = 3(\lambda + 1)^2 = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $\lambda \neq -1$.

2. Para $\lambda = 2$ tendremos:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$
Para $\lambda = 0$ tendremos:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 49 Determinar para que valores de m tiene inversa la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$$
y hállala para $m = 2$.

Solución:

Una matriz A tienen inversa siempre que $|A| \neq 0$, luego
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = 3m^2 - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1,\ \ m = -1$$
La matriz A tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y -1.

Si $m = 2$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/9 & -2/9 & 4/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -8/9 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Problema 50 Se consideran las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;\ B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.
2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$

   Independientemente del valor de k, luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k.

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

   Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k.

Problema 51 Determinar para que valores de x tiene inversa la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{pmatrix}$$

y hallala en función de x

Solución:

- Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de cero, veamos los valores de x que anulan el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & 0 & x \\ -x & 0 & x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  En conclusión, la matriz A tiene inversa siempre que $x \neq 0$.

- Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\left[\begin{pmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}\right]}{-2x^2} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -x & x \\ -2x^2 & x^2 & x^2 \\ 0 & -x & -x \end{pmatrix}}{-2x^2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2x} & -\frac{1}{2x} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2x} & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

1.5.3 Potencia de una Matriz

Problema 52 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Determinar el valor de A^n para cada n y halla $A^{350} - A^{250}$.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdots A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{350} - A^{250} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 53 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Hallar A^n para todo entero positivo n.
2. Calcular, si existe, la inversa de la matrtiz A y la de la matriz $I_3 + A$.

Solución:

1. Calculamos las potencias de A:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Es decir:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 1 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n = 2 \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad n \geq 3 \end{cases}$$

2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A| = 0$, y por tanto A no tiene inversa. Por otro lado:

$$|A + I_3| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Longrightarrow |A + I_3| = 1$$

Es decir, para cualquier valor de a se cumple que $|A + I_3| \neq 0$, y por tanto tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.4 Ecuaciones Matriciales

Problema 54 Halla X tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 55 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $AX - A = B - C$.

Solución:

$$AX - A = B - C \Longrightarrow A(X - I) = B - C \Longrightarrow X - I = A^{-1}(B - C) \Longrightarrow$$
$$X = A^{-1}(B - C) + I$$

Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 56 Halla X tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 57 Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = X - B \Longrightarrow AX - X = -B \Longrightarrow (A - I)X = -B \Longrightarrow$$

$$(A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1}(-B) \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}(-B)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 58

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

   Averiguar si existe algún valor de a de forma que $A^2 - 3A = -2I$ siendo I la matriz identidad.

2. Sea A cualquier matriz cuadrada tal que $A^2 - 3A = -2I$. Probar que A tiene inversa utilizando la ecuación dada para expresar A^{-1} en función de A.

Solución:

1.

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 7 & a & -6 \\ 3 & a & -3 \\ 3a & 2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2I$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 49 - 15a & 7a + a^2 - 12 & -12 - 3a \\ 21 - 6a & 3a + a^2 - 6 & -3 - 3a \\ 6 + 6a & 3a^2 + 2a - 10 & 19 - 18a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 3a & -18 \\ 9 & 3a & -9 \\ 9a & 6 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 28-15a & a^2+4a-12 & 6-3a \\ 12-6a & a^2-6 & 6-3a \\ 6-3a & 3a^2+2a-16 & 34-18a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si igualamos todos los términos tenemos que en todas las condiciones se cumple:

$$28-15a=-2 \Longrightarrow a=2$$

2.

$$A^2-3A=-2I \Longrightarrow (A-3I)A=-2I \Longrightarrow -\frac{1}{2}(A-3I)A=I \Longrightarrow$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I)$$

Es fácil comprobar que la multiplicación de A^{-1} por el otro lado cumple la proiedad de inversa:

$$A(-\frac{1}{2}(A-3I))=-\frac{1}{2}A(A-3I)=-\frac{1}{2}(A^2-3A)=I$$

Problema 59 Resuelve la ecuación matricial $AX-B+C=0$ donde:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$AX-B+C=0 \Longrightarrow AX=B-C \Longrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(B-C) \Longrightarrow$

$$X=A^{-1}(B-C)$$

$$B-C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{(Adj(A))^T}{|A|}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 60 Halla X tal que $AX+B=0$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 61 Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz identidad.

1. Demostrar que A admite inversa, y obtenerla en función de A.
2. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, halla para que valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$, y para esos valores escribir la matriz inversa de B

Solución:

1. Tenemos que $A^2 = 2A + I \Longrightarrow A^2 - 2A = I \Longrightarrow (A - 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A - 2I$
2. Calculamos B^2

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Como $B^2 = 2B + I$ tendremos

$$\begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m) & 2 \\ 2 & 2(1-m) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+m) + 1 & 2 \\ 2 & 2(1-m) + 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+m)^2 + 1 = 2(1+m) + 1 \\ (1-m)^2 + 1 = 2(1-m) + 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} m^2 + 2m + 2 = & 2m + 3 \\ m^2 - 2m + 2 = & -2m + 3 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2 = 1 \\ m^2 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow m = \pm 1$$

Para $m = 1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para $m = -1$ tenemos: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 62 Resuelve si es posible, la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Estamos ante una ecuación matricial de la forma $AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$, esto quiere decir, que podremos encontrar X siempre que exista A^{-1}. Como $|A| = 0$ resulta que A no puede tener inversa y, por tanto, la ecuación matricial no tiene solución.

Problema 63 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Resolver la ecuación matricial $XA - B = XC$.

2. Calcular la matriz X

Solución:

1. $XA - B = XC \Longrightarrow XA - XC = B \Longrightarrow X(A - C) = B \Longrightarrow$

   $X(A - C)(A - C)^{-1} = B(A - C)^{-1} \Longrightarrow X = B(A - C)^{-1}$.

2. $A - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

   $X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 64 Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar x e y para que $MN = NM$

2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

Solución:

1. Determinar x e y para que $MN = NM$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & 0 \\ y = & 1 \end{array} \right.$$

2. Calcular M^{2000} y M^{2001}

   Para calcular estas potencias multiplicamos sucesivamente M hasta que los resultados se repitan:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = I_3 \cdot M = M$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = M \cdot M = M^2 = I_3$$

   En general:

   $M^n = M$ si n es impar $\Longrightarrow M^{2001} = M$.

   $M^n = I_3$ si n es par $\Longrightarrow M^{2000} = I_3$.

Problema 65 Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1} en términos de M e I.

2. Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

3. Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M - 2I)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M - 2I)M = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$

2. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow M^2 = 3I + 2M$
   Por otra parte $M^3 = M^2 \cdot M = (3I + 2M)M = 3I \cdot M + 2M^2$, si volvemos a sustituir M^2 nos queda:

   $$M^3 = 3I \cdot M + 2(3I + 2M) = 3M + 6I + 4M = 7M + 6I$$

3. Primero calculamos M^2:

   $$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

   Sustituimos en la expresión:

   $$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 2ab - 2b & a^2 + b^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a^2 + b^2 - 2a & = 3 \\ 2b(a - 1) & = 0 \end{array} \right.$$

   Si $b = 0$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de a, que serían los resultados de la ecuación $a^2 - 2a - 3 = 0$, es decir, $a = 3$ y $a = -1$. Las matrices M obtenidas serían:

   $$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Si $a = 1$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de b, que serían los resultados de la ecuación $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. Las matrices M obtenidas serían:

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 66 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular $3A \cdot A^t - 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
2. Resolver la siguiente igualdad matricial:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

1. La matriz $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por lo que tenemos lo siguiente:

$$3A \cdot A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. El hecho de que A tenga inversa nos permite resolver la ecuación matricial de la siguiente manera:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 67 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

2. Tomando $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

1. Una matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$ y recíprocamente.
   $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda = -2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1$
   Es decir, para estos dos valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, el determinante de la matriz A es cero y por tanto la matriz A no tiene inversa.

   Para que la matriz A tenga inversa tiene que ser $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

2. Si $\lambda = 1$, por el apartado anterior tendríamos que $|A| = 0$. Calculamos el rango de A que deberá de ser menor de 3.
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
   Por tanto, Rango $A = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, ya que es un sistema homogeneo, y por el menor escogido podemos despreciar la primera ecuación; quedará el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{llll} x+ & y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x+ & y & = & 0 \\ & y & = & -z \end{array} \right.$$

   Si llamamos $z = t$ tenemos $y = -t$ y $x = t$, es decir, la solución sería:

$$\left\{ \begin{array}{lr} x = & t \\ y = & -t \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 68 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular A^{-1}

2. Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $AX = BA \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \Longrightarrow IX = A^{-1}BA \Longrightarrow$ $X = A^{-1}BA$ Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 69 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinar la matriz inversa de B.

2. Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

1. $$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $A = BX \Longrightarrow B^{-1}A = B^{1}BX \Longrightarrow B^{-1}A = X$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 70 Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \Longrightarrow XA = AB \Longrightarrow X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{(Adjt(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

1.5.5 Sistemas de Ecuaciones

Resolución con la Matriz Inversa

Problema 71 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -x+ & 2y- & z = & 1 \\ 3x- & y+ & 2z = & -4 \\ x- & y+ & z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 72 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x+ & 3y+ & z = & 7 \\ x+ & y- & 2z = & 5 \\ & y+ & 2z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2/3 & 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 73 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} 4x+ & 2y- & z = & 6 \\ x+ & & z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & -2 & 5/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 74 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\begin{cases} -3x+ & y- & z = & 5 \\ x+ & 2y+ & z = & 0 \\ 2x+ & & z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 \\ -11 \\ 41 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-19 \\ y=-11 \\ z=41 \end{array}\right.$$

Problema 75 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 6 \\ 2x- & y+ & z= & 8 \\ x- & 2y+ & z= & 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Podríamos ponerlo de la siguiente forma: $AX = B$. Despejando X de esta expresión nos queda

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right.$$

1.6 Sistema de Ecuaciones

1.6.1 Discusión de un Sistema de Ecuaciones

Problema 76 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x- & y+ & 3z= & 1\\ -x+ & y- & z= & 2\\ x+ & y+ & 3z= & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$. Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 77 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y- & z= & 3\\ -x+ & 2y- & z= & 1\\ 2x- & y+ & z= & 2\\ -x+ & 5y- & 5z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -5 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

Problema 78 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x- & 4y & +z= & 1\\ -x+ & 2y & -z= & 3\\ x- & & z= & 7\\ x- & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 3 & -4 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 7\\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $3 - 2 = 1$ grados de libertad.

Problema 79 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y = & 3 \\ -x+ & 3y = & -1 \\ -x+ & 6z = & 2 \\ x- & y = & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 80 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y+ & z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 0 \\ 3x- & 2y & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$ nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1+2t}{5} \\ \\ y = \dfrac{-1+3t}{5} \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 81 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4\\ 2x- & 3y+ & z= & -1\\ x+ & y- & 2z= & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{15}\\ \\ y=\dfrac{23}{15}\\ \\ z=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Problema 82 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & z= & 2\\ x- & 2y- & z= & -1\\ 2x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=3$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{9} \\ \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ \\ z=\dfrac{14}{9} \end{array}\right.$$

Problema 83 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 2z= & 1 \\ x+ & y+ & z= & 2 \\ 2x- & 2y+ & z= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-3t}{4} \\ \\ y=\dfrac{5-t}{4} \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 84 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y- & z= & 0 \\ 2x+ & 2y+ & z= & -1 \\ -x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 85 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 4y- & z= & 1\\ x- & y- & z= & -2\\ 4x+ & 3y- & 2z= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 3 & 4 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 4 & 3 & -2 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -2\\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-7+5t}{7}\\ \\ y=\dfrac{7-2t}{7}\\ \\ z=t \end{array}\right.$$

Problema 86 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y- & z= & 2\\ x+ & 2y- & 3z= & 1\\ 4x+ & 4y- & 4z= & 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 4 & -4 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & 4 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 87 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 5x- & 2y+ & 3z= & 5\\ x+ & y+ & z= & 2\\ 4x- & 3y+ & 2z= & 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{9-5t}{7} \\ \\ y = \dfrac{5-2t}{7} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 88 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x+ & y+ & z = & 4 \\ -x+ & y- & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & z = & 1 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3-2t}{3} \\ \\ y = \dfrac{-3+7t}{3} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 89 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x- & y+ & 3z = & 2 \\ x- & y- & 2z = & -1 \\ 6x- & 3y- & z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 6 & -3 & -1\end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2 & -1\\ 6 & -3 & -1 & 0\end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=2$.

Como $Rango(A)=Rango(\overline{A})<$n^o de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3-5t}{3}\\ \\ y=\dfrac{6-11t}{3}\\ \\ z=t\end{array}\right.$$

Problema 90 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & y- & z= & 2\\ x+ & y+ & z= & 2\\ 3x+ & 2y & = & 1\end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A)=2$ y $Rango(\overline{A})=3$.

Como $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 91 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -2x+ & 5y- & 3z= & 2\\ x+ & 3y+ & z= & 2\\ x- & y+ & 3z= & -1\end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 5 & -3 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3 & -1\end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \\ y = \dfrac{1}{2} \\ \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Problema 92 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x- & 3y- & 2z = & -1 \\ 2x+ & y- & 3z = & 3 \\ 5x- & 4y+ & z = & -4 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 7 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

La solución será:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8 + 11t}{13} \\ \\ y = \dfrac{23 + 17t}{13} \\ \\ z = t \end{cases}$$

Problema 93 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x- & 2y+ & 5z = & 3 \\ x+ & y- & z = & -1 \\ x- & 3y+ & 6z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$ el sistema es incompatible.

Problema 94 Estudia la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x- & y+ & 2z- & t = & 3 \\ 2x+ & y- & z+ & t = & 2 \\ -x+ & y+ & z- & t = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos que $Rango(A) = 3$ y $Rango(\overline{A}) = 3$.

Como $Rango(A) = Rango(\overline{A}) <$nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, de $4 - 3 = 1$ grados de libertad.

Problema 95 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & -1 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \\ x+ & 5y- & z = & -5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$Rango(A) = 2$ y $Rango(\overline{A}) = 2$

Luego $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -2 \neq 0$, luego las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y podemos despreciar la última.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z & =-1\\ x & -y+ & 2z & =1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x & +y= & -1-z\\ x & -y= & 1-2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & -\dfrac{3t}{2}\\ \\ y= & \dfrac{-2+t}{2}\\ \\ z= & t \end{array}\right.$$

Problema 96 Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_2\longrightarrow E_1)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ 3x- & 2y+ & z= & 2\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow[(E_3-7E_1)]{(E_2-3E_1)}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & -10y+ & 8z= & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_3-2E_2)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & & 0= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Vamos a calcularlas:
Despejando y en E_2 y haciendo $z=\lambda$

$$y=\frac{-1-4z}{-5}=\frac{1+4z}{5}=\frac{1+4\lambda}{5}$$

Sustituyendo estos valores en E_1

$$x+\frac{1+4\lambda}{5}-\lambda=1\Longrightarrow x=\frac{\lambda+1}{5}$$

La solución pedida sería:

$$\left\{\begin{array}{rc} x= & \frac{\lambda+4}{5}\\ y= & \frac{4\lambda+1}{5}\\ z= & \lambda \end{array}\right.$$

1.6.2 Regla de Cramer

Problema 97 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & 4y= & -6\\ 2x- & 3y= & 7 \end{array}\right.$$

2.

$$\begin{cases} x- & 2y+ & z = & -3 \\ 2x+ & 3y- & z = & 3 \\ x- & y+ & 3z = & 6 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 7 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = -1$$

2.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 17$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = -\frac{15}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{45}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{17} = \frac{54}{17}$$

Problema 98 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & 3y= & -5\\ x+ & y= & 1\end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 2y- & z= & 0\\ x- & 3y+ & z= & -3\\ 2x+ & y- & z= & 1\end{array}\right.$$

Solución:

1.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A|=-4$$

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rr} -5 & 3\\ 1 & 1\end{array}\right|}{-4}=2 \quad y=\frac{\left|\begin{array}{rr} -1 & -5\\ 1 & 1\end{array}\right|}{-4}=-1$$

2.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A|=-3$$

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 0 & 2 & -1\\ -3 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{array}\right|}{-3}=\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right|}{-3}=3$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0\\ 1 & -3 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{array}\right|}{-3}=\frac{14}{3}$$

Problema 99 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrr} -3x+ & 2y = & 3 \\ 2x- & y = & -1 \end{array}\right.$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z = & 0 \\ -x+ & 2y+ & z = & 1 \\ x- & 3y- & 2z = & -3 \end{array}\right.$$

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 3$$

2.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = 2$$

Problema 100 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.
$$\begin{cases} 2x- & y = & 0 \\ 3x+ & y = & 5 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+ & y- & z = & 2 \\ -x+ & 2y+ & z = & 4 \\ 3x+ & y+ & z = & 6 \end{cases}$$

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 2, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{5} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = 2$$

2.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A})$ =nº de incógnitas= 3, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{12} = 1$$

Problema 101 Resuelve estos sistemas, aplicando la regla de Cramer:

1.

$$\begin{cases} 3x+ & 2y = & -5 \\ 5x+ & y = & 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x+ & 2y- & z = & 1 \\ -3x+ & y+ & z = & -5 \\ x- & y+ & 3z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas$= 2$, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = -7$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -4$$

2.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Comprobamos que el sistema es compatible determinado ya que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) =$nº de incógnitas$= 3$, y aplicando la regla de Cramer:

$$|A| = 22$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{22} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{22} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{22} = 1$$

1.6.3 Sistemas dependientes de un Parámetro

Problema 102 Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y & & = a \\ (a+1)x+ & 2y & +z = & a+3 \\ & 2y & +z = & 2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a \\ a+1 & 2 & 1 & a+3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$.

Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ tendremos

$$A = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right|$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

En conclusión:

Si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Problema 103 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x- & ay+ & z = & 1 \\ 3x- & y+ & z = & a \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = 1:\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  Observamos que la primera y la segunda fila son iguales y además hay un menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & z = & 1 \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\lambda \\ \\ y = & -\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}\lambda \\ \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 104 Discutir el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax & -y & +z & = 0 \\ x & +y & +az & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \end{array}\right.$$

según los valores del parámetro a. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de a que anulan el determinante de A. $|A| = -a^2 + a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$ y $a = 2$.

Luego si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =n^{\text{o}}$ de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $a = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 3$

Tenemos que $Rango(A) \neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y $|A| = 0$

El $Rango(\overline{A}) = 2$

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <n^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos en este último caso:

Por el menor escogido sabemos que las ecuaciones primera y segunda son linealmente independientes, luego podemos despreciar la tercera.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & -y+ & z & = 0 \\ x & +y+ & 2z & = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} 2x & -y = & -z \\ x & +y = & 3 - 2z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 - t \\ y = & 2 - t \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 105 Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} (1+\lambda)x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & (1+\lambda)y+ & z = & \lambda \\ x+ & y+ & (1+\lambda)z = & \lambda^2 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} (1+\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1+\lambda) \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} (1+\lambda) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+\lambda) & 1 & \lambda \\ -1 & 1 & (1+\lambda) & \lambda^2 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A|=\lambda^2(\lambda+3)=0 \Longrightarrow \lambda=0$ y $\lambda=-3$.

Luego si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq -3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow Rango(A)=Rango(\overline{A})=3=$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda=-3$ tendremos

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ y $|A|=0$

El $Rango(\overline{A})=3$

Tenemos que $Rango(A)\neq Rango(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $\lambda=0$ tendremos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=1$, las tres filas son iguales.

El $Rango(\overline{A})=2$

Tenemos que $Rango(A)\neq Rango(\overline{A})$, luego el sistema es incompatible.

Problema 106 Discute y resuelve el siguiente sistema, según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} mx+ & y & + \quad z= & 2 \\ x+ & my & = & 1 \\ x+ & my & + \quad mz= & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 0 & 1 \\ 1 & m & m & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A. $|A| = m(m^2 - 1) = 0 \Longrightarrow m = 0$, $m = 1$ y $m = -1$.

Luego si $m \neq 0, 1, -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado.

Si $m = 0$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

El $Rango(\overline{A}) = 2$ (tiene dos filas iguales)

Tenemos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} & y+ & z = 2 \\ x & & = 1 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{array}\right.$$

Si $m = 1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2 \neq Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
Si $m = -1$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A) = 2 \neq Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$, luego el sistema es incompatible.
En conclusión:

Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1$ el sistema es incompatible.

Si $m = -1$ el sistema es incompatible.

Si $m \neq 0$, $m \neq 1$ y $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado.

Problema 107 Discute el siguiente sistema, y resuélvelo cuando sea posible, en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & y & + & az = & 1 \\ x+ & & & a^2z = & 2a+1 \\ x- & y & + & a(a-1)z = & 2a \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{array}\right) \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de m que anulan el determinante de A.

Resulta que $|A| = 0$ siempre e independientemente del valor que tome a.

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0$ resulta que $Rango(A) = 2$ sea cual sea el valor que tome a.

Ahora estudiamos el $Rango(\overline{A})$:

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{array}\right| = 0 \text{ Para cualquier valor de } a.$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & a(a-1) & 2a) \end{array}\right| = 0 \text{ Para cualquier valor de } a.$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a+1 \\ -1 & a(a-1) & 2a) \end{array}\right| = 0 \text{ Para cualquier valor de } a.$$

Luego $Rango(\overline{A}) = 2$ independientemente del valor de a.

En conclusión:

$Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas y por tanto el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a.

Por el menor escogido podemos despreciar la tercera ecuación y nos quedaría el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & az = & 1 \\ x & + & a^2z = & 2a+1 \end{array}\right.$$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2a+1-a^2t \\ y = 1-at \\ z = t \end{array}\right.$$

Problema 108 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & ay+ & 2z = & 4 \\ & 2y+ & az = & 4 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & 4 \\ 0 & 2 & a & 4 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = -2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y por tanto, el $\text{Rango}(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Concluyendo:
$\text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$

En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

Como conclusión podemos afirmar que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}\overline{A} <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & 2y+ & 2z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 0 \\ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y = & & -z \\ & y = & 2 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 2(1-\lambda) \\ y = & 2-\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 109 Analizar la compatibilidad del sistema de ecuacuiones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 1 \\ 3x+ & ay+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

y resolverlo en el caso de que tenga infinitas soluciones. **Solución**

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 2a(a+1)$, y si hacemos $|A| = 0$ obtenemos los valores $a = -1$ y $a = 0$, que serán los únicos valores que anulan el determinate de A.

Si $a \neq -1$ y $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n^{o} de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = -1$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Buscamos menores de orden 3 y encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Luego si $a = -1 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

Si $a = 0$, como $|A| = 0$ buscamos menores de orden 2, y nos encotramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

Y por otra parte si

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Buscamos menores de orden 3 que sean distintos de cero y comprobamos que

$$|A_1| = |A| = 0, \ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

No hay menores de orden 3 distintos de cero, y si buscamos de orden 2 tenemos el mismo que encontramos anteriormente para A, y el Rango$(\overline{A}) = 2$.

Luego si $a = 0 \Longrightarrow$Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$n^o de incógnitas y el sistema es Compatible Ideterminado.

Resolvemos en este caso:

Por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación del sistema y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & = & 1 \\ 2x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2-\lambda}{3} \\ \\ y = \dfrac{1+\lambda}{3} \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 110 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 2y+ & 6z = & 0 \\ 2x+ & ay+ & 4z = & 2 \\ 2x+ & ay+ & 6z = & a-2 \end{array}\right.$$

1. Discute el sistema según los valores de a.
2. Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \Longrightarrow a = 2 \;\; a = -2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n^o de incógnitas, y en este caso se trata de un sistema Compatible Determinado.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

Sabemos en este caso que $|A| = 0$, y buscando menores, encontramos que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{array}\right| = 20 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Mientras que por otro lado tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -128 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$.

Como Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$), en este caso el sistema sería Incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Como la primera fila y la tercera son iguales, y además $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow$

Tenemos que Rango(A) $= 2 =$Rango($\overline{A}$) $<$n^{o} de incógnitas, luego eneste caso se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

2. Por el menor elegido en el apartado anterior podemos eliminar la tercera ecuación, después de hacer la sustitución $a = 2$, y nos queda:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 3 - \lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 \end{array} \right.$$

Problema 111 Estudia, sgún los valores de m, y resuelve cuando sea posible el sistema de ecuacuiones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ x+ & my+ & 3z = & 3 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array} \right.$$

Solución

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

El rango de A no puede cuatro, ya que sólo hay tres incógnitas. Entre los menores encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3$, independientemente del valor de m.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$; vamos a calcular el determinante de $\overrightarrow{A}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & m & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = [F_2 - F_1] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12m + 58 = 0$$

$$\Longrightarrow m = \frac{29}{6}$$

Si $m \neq \dfrac{29}{6} \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 \neq$Rango$(\overline{A}) = 4$ en este caso se trata de un Sistema Incompatible.

Si $m = \dfrac{29}{6} \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$nº de incógnitas, luego el sistema es Compatible Determinado y, por tanto, tiene solución única.

Por el menor elegido en A, podemos eliminar la segunda ecuación

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 3z = & 1 \\ & y- & 6z = & 0 \\ & 3y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{13}{17} \\ \\ y = \dfrac{12}{17} \\ \\ z = \dfrac{2}{17} \end{array}\right.$$

Problema 112 Discutir la existencia de soluciones del siguiente sistema según valores del parámetro α. Resolver, si es posible, para $\alpha = 10$.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -2y & +z & = 3 \\ 5x & -5y & +2z & = \alpha \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|l} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de α que anulan el determinante de A.

Tenemos que $|A| = 0$, y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$.

Ahora analizamos el rango de $\overline{A}$ para diferentes valores de α. Los determinantes que se pueden obtener, a parte del de A, son los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & \alpha \end{vmatrix} = 50 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha - 30 = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 10 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 10$$

Luego si $\alpha \neq 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow Rango(A) \neq Rango(\overline{A})$, y por tanto, el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 10 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$n^o de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Vamos a resolver el sistema en este caso.

Por el menor elegido sabemos que las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes, y por tanto, se puede despreciar la tercera. El sistema sería el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & y & -z & = 1 \\ x- & 2y & +z & = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} 2x+ & y & = 1 + z \\ x- & 2y & = 3 - z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & \dfrac{5+t}{5} \\ \\ y = & \dfrac{-5+3t}{5} \\ \\ z = & t \end{array} \right.$$

Problema 113 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z = & 2 \\ x+ & y+ & az = & 2 \\ -ax & & -z = & -a \end{array} \right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$
y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A}) = 3.$$

  Concluyendo:
  Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z = & 2 \\ -x & - & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x+ & y+ & z = & 2 \\ x & + & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll} x+ & y = & 2 & -z \\ x & = & 1 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = & 1-\lambda \\ y = & 1 \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 114 Discutir según el valor del parámetro real λ el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 3 \\ 3x+ & 4y+ & \lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 5 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $\lambda = 5$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A| = 0$ y además hay un menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2$.

Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay dos columnas iguales, la última y la penúltima, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Vamos a resolverlo:

Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la tercera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z= & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y= & 1 & -z \\ x+ & 2y= & 3 & -3z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x= & -1+ & h \\ y= & 2- & 2h \\ z= & & h \end{array}\right.$$

Problema 115 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

1. Resolverlo para $m = 1$.
2. Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

1. Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & & z=3 \\ x- & y+ & z=2 \\ x+ & y- & z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ y=1 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m(m+1)$$

$$-m(m+1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}$ = 3 =n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = -1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 116 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.
2. Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.

Solución:

1. $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

   $|B| = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-3) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

2. Si $\lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $x - 3y = 0 \Longrightarrow x = 3y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{\begin{array}{rr} x = & 3t \\ y = & t \end{array}\right.$

3. Si $\lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $3x - 3y = 0 \Longrightarrow x = y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{\begin{array}{rr} x = & t \\ y = & t \end{array}\right.$

Problema 117 Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 20z = & 1 \\ ax+ & 8y+ & 23z = & 1 \\ x- & & az = & 1 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 21 - 20 = 1 - a^2$$

$|A| = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow rango(A) = 3 = rango(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Para $a = 1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

Soluciones para $a = 1$: $z = t$, $y = -3t$, $x = 1 - 7 \cdot (-3t) - 20t = 1 + t$.

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & 1 + t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 118 Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & az = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

2. (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

1. Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\a&1&2\\1&-1&a\end{pmatrix}\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\a&1&2&0\\1&-1&a&1\end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\a&1&2\\1&-1&a\end{vmatrix}=a^2+a=0\Longrightarrow a=0\quad a=-1$$

Es decir, si $a\neq 0$ y $a\neq -1$ tendríamos que $Rango(A)=Rango(\overline{A})=$ $3=$ nº de incognitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a=0$:

- Tenemos $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow Rango(A)=2$$

- Tenemos $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&2&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow Rango(\overline{A})=3$$

- En conclusión si $a=0$ el sistema sería incompatible.

2. Si $a=-1$:

- Tenemos $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix}-1&0\\1&2\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow Rango(A)=2$$

- Tenemos $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\-1&1&2&0\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0\quad \begin{vmatrix}1&0&2\\-1&2&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0\quad \begin{vmatrix}-1&0&2\\1&2&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=0$$

Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

- En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incognitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

3. Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y- & z & = 1 \end{array}\right.$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\left\{\begin{array}{lll} x = & 2+ & \lambda \\ y = & & \lambda \\ z = & 1 & \end{array}\right.$$

4. Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ 2x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y+ & 2z & = 1 \end{array}\right.$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow$

$z = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x- & y = & 2 \\ 2x+ & y = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} x = & 1 \\ y = & -1 \end{array}\right.$ Es decir:

$$\left\{\begin{array}{lr} x = & 1 \\ \\ y = & -1 \\ \\ z = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Problema 119 .

1. Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x+ & 3y+ & z & = \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z & = 1 \\ x+ & y- & z & = 1 \end{array}\right.$$

2. Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \ \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\left|\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1+4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 120 1. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & 3z & = 1 \\ 2x+ & y- & z & = 2 \end{array}\right.$$

2. Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & 3z & = 1 \\ 2x+ & y- & z & = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrl} x+ & 2y & = 1- \quad 3z \\ 2x+ & y & = 2+ \quad z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{5}{3}t \\ \\ y = -\dfrac{7}{3}t \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

2. Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1, 2, 3, 1) + b(2, 1, -1, 2) = (5, 1, \alpha, \beta) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$ $a = -1,\ b = 3 \Longrightarrow \alpha = -6,\ \beta = 5$

Problema 121 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (m-1)x+ & y+ & z = & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z = & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z = & 4 \end{array}\right.$$

1. Discutirlo según los distintos valores de m.

2. Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2,\ m = -1,\ m = 4$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A \neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A \neq$Rango$\overline{A} \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango$A =$Rango$\overline{A} = 2 <$nº incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2. Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z=3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & y= & 3- & z \\ 4x+ & 3y= & 7- & 3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5} \\ \\ y=\dfrac{9}{5}-\lambda \\ \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

1.6.4 Sistemas Homogéneos

Problema 122 Discute el siguiente sistema homogéneo según los diferentes valores del parámetro λ. Resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} \lambda x+ & & & 2z= & 0 \\ & (\lambda-2)y & + & z= & 0 \\ (\lambda-1)x+ & y & - & z= & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Hacemos $|A|=0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A|=(1-\lambda)(3\lambda-4)=0 \Longrightarrow \lambda=1$ y $\lambda=\dfrac{4}{3}$.

Luego si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq\dfrac{4}{3} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow Rango(A)=3=$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x=y=z=0$.

Si $\lambda=1$ tendremos

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El $Rango(A)=2$, ya que $\left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right|=1\neq 0$

Tenemos que $Rango(A)=2<$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} x & + & 2z=0 \\ & -y+ & z=0 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Si $\lambda = \dfrac{4}{3}$ tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2 \\ 0 & -2/3 & 1 \\ 1/3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{vmatrix} = -\dfrac{8}{9} \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido tenemos el sistema $\begin{cases} 4/3x & & + & 2z = 0 \\ & -2/3y+ & & z = 0 \end{cases}$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

Problema 123 Estudia el siguiente sistema homogéneo según los valores de λ y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\begin{cases} \lambda x- & y+ & 2z = & 0 \\ -x+ & \lambda y+ & 2z = & 0 \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos $|A| = 0$ para calcular los valores de λ que anulan el determinante de A. $|A| = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$.

Luego si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 3 =$nº de incógnitas, y por tanto, el sistema es compatible determinado, la solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.

Si $\lambda = -1$ tendremos
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
El $Rango(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Tenemos que $Rango(A) = 2 <$nº de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

Cogemos las dos últimas filas, a la vista del menor elegido anteriormente.

$\left\{\begin{array}{rrr} -x- & y+ & 2z = 0 \\ 2x- & y- & z = 0 \end{array}\right.$ y haciendo $z = t$ nos queda la solución:
$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$$

1.6.5 Planteamientos de Sistemas de Ecuaciones

Problema 124 Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, a 980 ptas/kg; el B, a 875 ptas/kg; y el C, a 950 ptas/kg.

Desea hacer una mezcla con los tres tipos de café, para suministrar un pedido de 1050 kg a un precio de 940 ptas/kg.

¿Cúantos kilos de cada tipo de café debe de mezclar, sabiendo que debe poner del tercer tipo el doble de lo que ponga al primero y del segundo juntos?.

Solución:

Sea x la cantidad de café de tipo A.
Sea x la cantidad de café de tipo B.
Sea x la cantidad de café de tipo C.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1050 \\ z = 2(x + y) \\ 980x + 875y + 950z = 987000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1050 \\ 2x+ & 2y- & z = & 0 \\ 980x+ & 875y+ & 950z = & 987000 \end{array}\right.$$
Sistema que tiene por solución:
$$x = 400, \quad y = 300, \quad z = 350$$

Problema 125 Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{ll} x-14= & 5(y+z-28)\\ x+10= & y+z+20\\ x-42= & y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ x- & y- & z- & 10=0\\ x- & y+ & z- & 42=0 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 2^{a} ecuación por -5 y la sumamos a la 1^{a}:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -4x+176=0 \Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2^{a} y la 3^{a} nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{lr} y+z= & 34\\ y-z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18\\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 126 Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad.

Calcular lo que tienen cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

Solución:

Sean x, y, z el dinero de Luis, Juan y Óscar, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3}=y+\dfrac{x}{3}=z\\ \\ x+y+z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 3y & = & 0\\ 2x- & & 3z= & 0\\ x+ & y & +z= & 60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30\\ y=10\\ z=20 \end{array}\right.$$

Problema 127 Cuatro colegiales llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula los cromos que tienen entre los cuatro.

Solución:
Sea x los cromos de Luis, y los cromos de Javier, z los cromos de Enrique, y h los cromos de Fermín.

$$\left\{\begin{array}{l} h = 5 + x + y \\ z = 2y \\ y + 90 = h + z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & y- & z & -h = & -90 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 3ª ecuación por -2 y la sumamos a la 2ª nos queda

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ - & 2y+ & 2z & +2h = & 180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h = & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & & z & +2h = & 180 \end{array}\right.$$

Y si ahora sumamos la primera y la tercera nos queda $x + y + z + h = 175$ que es lo que nos pedía el problema.

Capítulo 2

Problemas de Programación Lineal

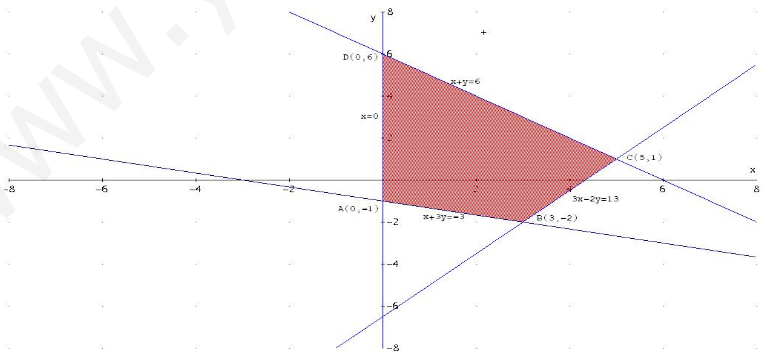
Problema 128 Sea el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 13 \\ x + 3y \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.
2. Halle los puntos del recinto anterior en los que la función $F(x, y) = x - 2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

Solución:

1. El recinto sería el siguiente Para obtenener los vértices hemos resuelto



mediante sistemas de ecuaciones, obteniendo los cortes dos a dos.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \Longrightarrow C(5, 1)$$

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow D(0,6)$$

$$\begin{cases} 3x-2y=13 \\ x+3y=-3 \end{cases} \Longrightarrow B(3,-2)$$

$$\begin{cases} x+3y=-3 \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow A(0,-1)$$

2. Sustituyendo estos valores en la función objetivo obtenemos los siguientes resultados:
$$\begin{array}{l} F(0,-1)=2 \\ F(3,-2)=7 \\ F(5,1)=3 \\ F(0,6)=-12 \end{array}$$
En este recinto tenemos que, $F(x,y)$ alcanza el valor máximo en el punto $B(3,-2)$ y vale 7, mientras que el mínimo lo alcanza en $D(0,6)$ con un valor de -12.

Problema 129 Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9000 euros y el modelo B un tercio más caro. La oferta está límitada: por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 del B y por el deseo de vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir gastos de campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser al menos de 36000 euros.

1. ¿Cuántos coches de cada modelo deberá vender para maximizar sus ingresos?
2. ¿Cuál es el importe de la venta?

Solución:

1. Vamos a nombrar las variables:

   x : nº de coches vendidos del modelo A

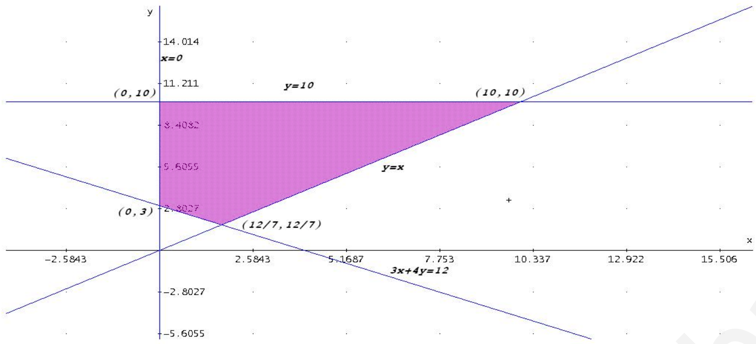
   y : nº de coches vendidos del modelo B

   Las restricciones serán las siguientes:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 10 \\ x \ge y \\ 9000x+12000y \ge 36000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 20 \\ 0 \le y \le 10 \\ x \ge y \\ 3x+4y \ge 12 \end{cases}$$

La función objetivo será: $z(x, y) = 9000x + 12000y$

Vamos a dibujar la región factible: Los puntos de estudio son:



$$(0, 3), \quad \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right), \quad (10, 10), \quad (0, 10)$$

$$\left\{\begin{array}{l} z(0,3) = 36000 \\ z\left(\dfrac{12}{7}, \dfrac{12}{7}\right) = 36000 \\ z(10,10) = 210000 \\ z(0,10) = 120000 \end{array}\right.$$

El máximo se obtiene en $(10, 10)$, lo que significa que tiene que vender 10 coches del tipo A y 10 coches del tipo B.

2. El ingreso máximo es de $z(10, 10) = 210000$ euros.

Problema 130 Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos A y B. El modelo A requiere, para su fabricación, 20 cm^2 de papel, 120 cm^2 de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere, 60 cm^2 de papel, 80 cm^2 de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es 1,20 euros el A y 1,30 euros el B. El precio de venta es de 1,80 euros cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm^2 de papel, 7200 cm^2 de lámina de madera y 70 enganches.

1. Representa la región factible.

2. Determina el número de abanicos de cada modelo que ha de hacer para obtener un beneficio máximo.

3. Calcula cuál es ese beneficio.

Solución:

Vamos a ordenar los datos en una tabla

	A	B	Existencias
Papel	20	60	3000
Madera	120	80	7200
Enganches	1	1	70
Coste	$1,20$	$1,30$	
Venta	$1,80$	$1,80$	

Nombramos las variables:

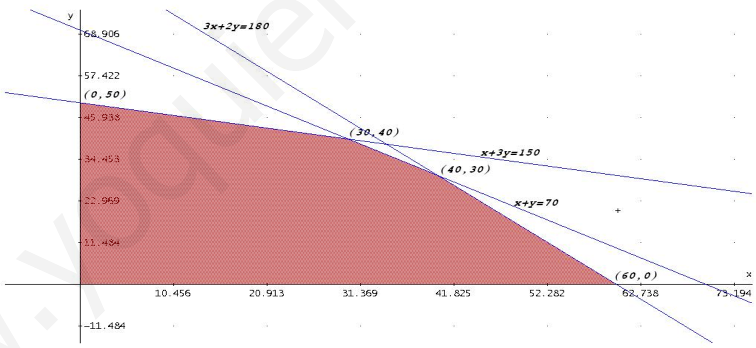
x será el número de abanicos del modelo A

y será el número de abanicos del modelo B

1. Observando la tabla escribimos las restricciones:

$$\begin{cases} 20x + 60y \leq 3000 \\ 120x + 80y \leq 7200 \\ x + y \leq 70 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 150 \\ 3x + 2y \leq 180 \\ x + y \leq 70 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible será



2. El beneficio vendrá determinado por la siguiente función: $z(x,y) = 0,60x + 0,50y$, que en los vértices de la región factible toma los siguientes valores:

$$\begin{cases} z(60,0) = 36 \\ z(40,30) = 39 \\ z(30,40) = 38 \\ z(0,50) = 25 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene fabricando 40 abanicos del modelo A y 30 abanicos del modelo B.

3. El beneficio máximo es de 39 euros.

Problema 131 Sea S la región del plano de coordenadas mayores o iguales que cero y tales que sus puntos cumplen que:

- La media aritmética de las coordenadas es menor o igual que 5.
- El doble de la abcisa más la ordenada es mayor o igual que 5.

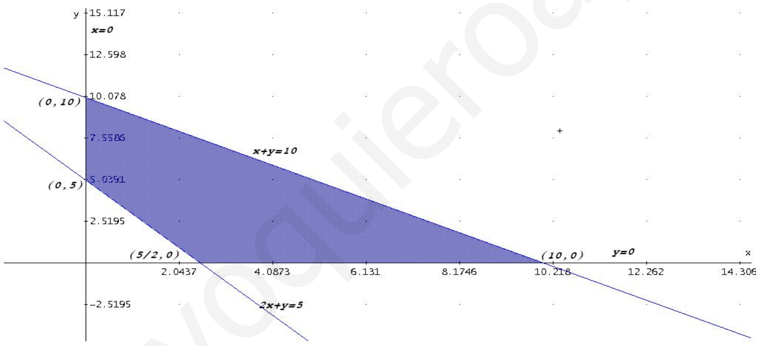
1. Representa gráficamente el conjunto S.
2. Determina en qué puntos de S la función $f(x,y) = 2x + y$ toma el valor máximo.

Solución:

1. Las restricciones del recinto serán las siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} \leq 5 \\ 2x+y \geq 5 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \leq 10 \\ 2x+y \geq 5 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{array}\right.$$

La región factible S es la del siguiente dibujo



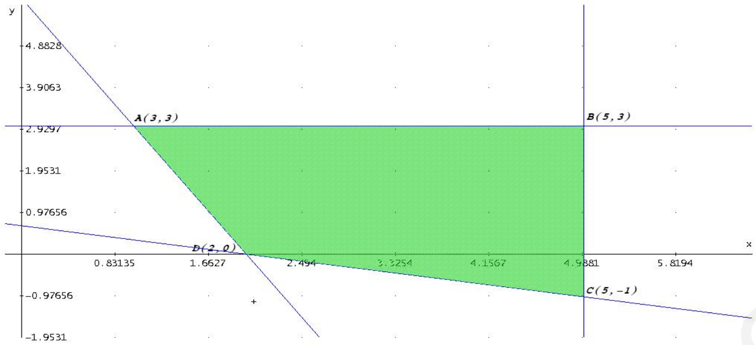
2.

$$\left\{\begin{array}{l} f(2.5,0) = 5 \\ f(10,0) = 20 \\ f(0,5) = 5 \\ f(0,10) = 10 \end{array}\right.$$

El valor máximo es 20 y corresponde al punto $(10,0)$.

Problema 132 El cuadrilátero $ABCD$ es la región solución de un sistema de inecuaciones lineales. Los lados del cuadrilátero también forman parte de la región solución.

1. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x + 3y$ en dicha región.



2. ¿En qué puntos de la región solución la función del apartado anterior alcanza el máximo y el mínimo?

Solución:

$$\begin{cases} f(3,3) = 12 \\ f(5,3) = 14 \\ f(5,-1) = 2 \\ f(2,0) = 2 \end{cases}$$

El valor máximo es 12 y corresponde al punto $(3,3)$.

El valor mínimo es 2 y corresponde a los puntos del segmento $\overline{CD}$.

Problema 133 Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos del 14% y 7%, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe de estar a lo sumo a razón de 4 a 5, determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

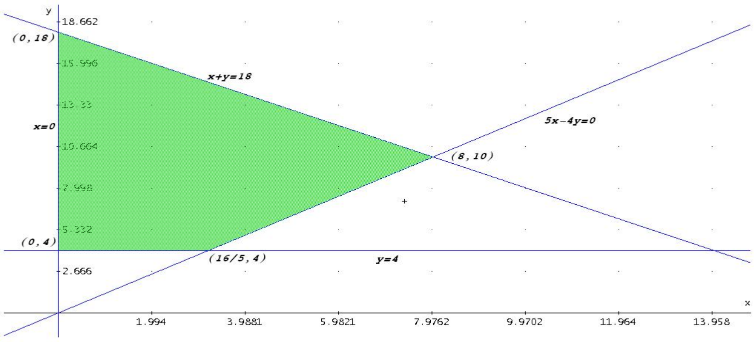
Solución:

x : millones de riego alto

y : millones de riego medio

Las restricciones serán las siguientes:

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ \frac{x}{y} \leq \frac{4}{5} \\ x + y \leq 18 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \geq 4 \\ 5x - 4y \leq 0 \\ x + y \leq 18 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



La región factible será: La función objetivo es $z(x, y) = 0,14x + 0,07y$

$$\begin{cases} z(0,4) = 0,728 \\ z\left(\frac{16}{5},4\right) = 0,728 \\ z(8,10) = 1,82 \\ z(0,18) = 1,26 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 1,82 millones de euros, y se obtiene al prestar 8 millones en riesgo alto y 10 en riego medio.

Problema 134 Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 euros por vagón de coches y 360 euros por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

Solución:

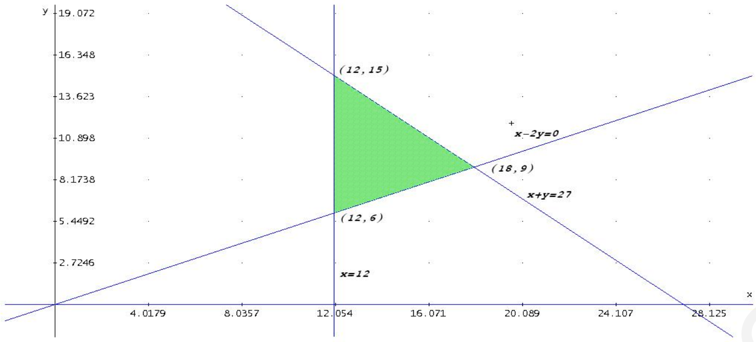
x : n$^{\text{o}}$ de vagones con coches

y : n$^{\text{o}}$ de vagones con motocicletas

Las restricciones serán las siguientes

$$\begin{cases} x + y \le 27 \\ x \ge 12 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 27 \\ x \ge 12 \\ x - 2y \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible será: La función objetivo es $z(x, y) = 540x + 360y$



$$\begin{cases} z(12,6) = 8640 \\ z(18,9) = 12960 \\ z(12,15) = 11880 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 12960 euros y corresponde a 18 vagones de coches y 9 de motocicletas.

Problema 135 Una tienda de ropa deportiva tiene en su almacén 200 balones y 300 camisetas. Para su venta se hacen dos lotes (A y B). El lote A contiene un balón y tres camisetas y el lote B está formado por dos balones y dos camisetas. La ganancia obtenida con la venta de un lote tipo A es de 12 euros y de 9 euros con cada lote tipò B. Sabiendo que el número máximo de lotes del tipo A es de 80, determinar:

1. El número de lotes de cada tipo que deben prepararse para obtener una ganancia máxima.

2. La ganancia máxima.

Justificar la respuesta.

Solución:

1.

	A	B	Cantidad
Balones	1	2	200
Camisetas	3	2	300
Beneficio	12	9	

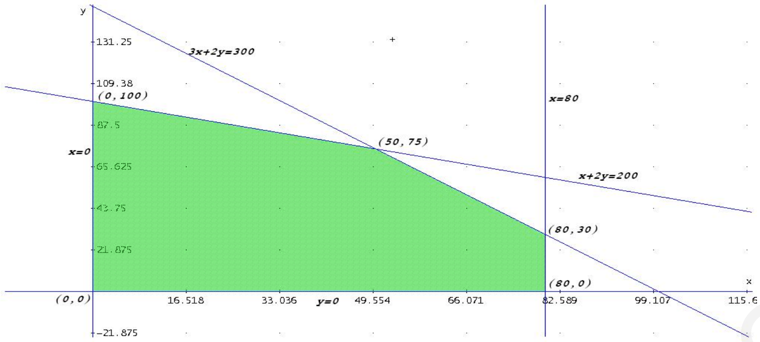
x : número de lotes de tipo A

y : número de lotes de tipo B

A la vista de la tabla tendremos las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 200 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ 0 \leq x \leq 80 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Lo que nos proporciona la siguiente región factible La función objetivo



es $z(x,y) = 12x + 9y$

$$\begin{cases} z(80,0) = 960 \\ z(80,30) = 1230 \\ z(50,75) = 1275 \\ z(0,100) = 900 \end{cases}$$

Para obtener un beneficio máximo hay que preparar 50 lotes de tipo A y 75 lotes tipo B.

2. La ganancia máxima es 1275 euros.

Problema 136 Un concesionario de coches comercializa dos modelos de automóviles: uno de gama alta, con el que gana 1000 euros por cada unidad, y el otro de gama baja cuyos beneficios por unidad vendidad son de 600 euros. Por razones de mercado, la venta anual de estos modelos está sujeta a las siguientes restricciones:

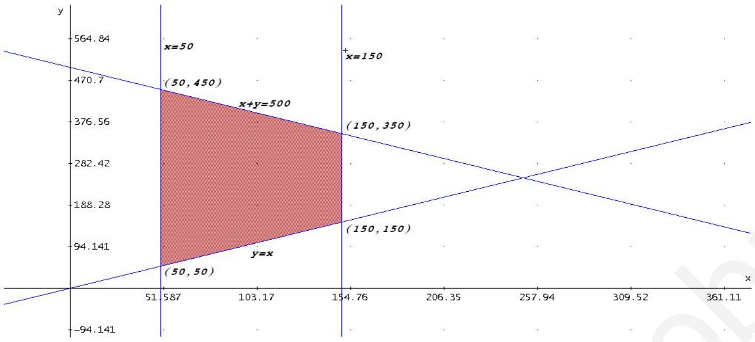
- El número de modelos de gama alta vendidos no será menor de 50 ni mayor de 150 coches.
- El número de modelos de gama baja vendidos ha de ser mayor o igual al de modelos de gama alta vendidos.
- El concesionario puede vender hasta un máximo de 500 automóviles de los dos modelos al año.

1. Plantear las restricciones y representar gráficamente la región factible.
2. ¿Cuántos automóviles de cada modelo debe vender anualmente con el fin de maximizar los beneficios?

Solución:

x n^o gama alta, y n^o gama baja

1. La restricciones:
$$\begin{cases} 50 \le x \le 150 \\ x - y \le 0 \\ x + y \le 500 \end{cases}$$



2. La función objetivo es $z(x, y) = 1000x + 600y$

$$\begin{cases} z(50,50) & = & 80000 \\ z(150,150) & = & 240000 \\ z(150,350) & = & 360000 \\ z(50,450) & = & 320000 \end{cases}$$

   Para que el beneficio sea máximo tiene que vender 150 automóviles de gama alta y 350 de la gama baja.

Problema 137 En la preparación de dos tipos de paquetes de café, C_1 y C_2, se utiliza café brasileño y café colombiano. Cada paquete del tipo C_1 contiene 300 g de café brasileño y 200 g de café colombiano, y cada paquete del tipo C_2 contiene 100 g de café brasileño y 400 de café colombiano. Con cada paquete del tipo C_1 se obtiene un beneficio de 0,90 euros, y con cada paquete del tipo C_2, de 1,2 euros. Se dispone de 900 Kg de café brasileño y de 1600 Kg de café colombiano.

1. ¿Cuántos paquetes de cada tipo se tienen que preparar para obtener un beneficio máximo?

2. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

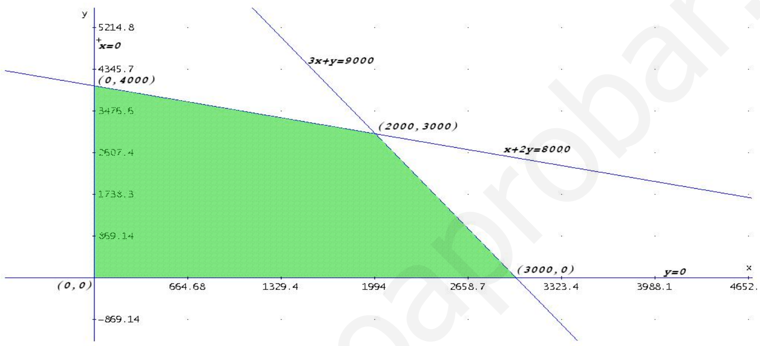
	C_1	C_2	Cantidad
Brasileño	300	100	900000
Colombiano	200	400	1600000
Beneficio	$0,9$	$1,2$	

x paquetes C_1

y paquetes C_2

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 300x + 100y \leq 900000 \\ 200x + 400y \leq 1600000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 9000 \\ x + 2y \leq 8000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



1. La función objetivo es $z(x, y) = 0,90x + 61,20y$

$$\begin{cases} z(3000, 0) & = & 2700 \\ z(2000, 3000) & = & 5400 \\ z(0, 4000) & = & 4800 \end{cases}$$

   Para obtener un beneficio máximo hay que preparar 2000 paquetes del tipo C_1 y 3000 paquetes del tipo C_2.

2. El beneficio máximo será de 5400 euros.

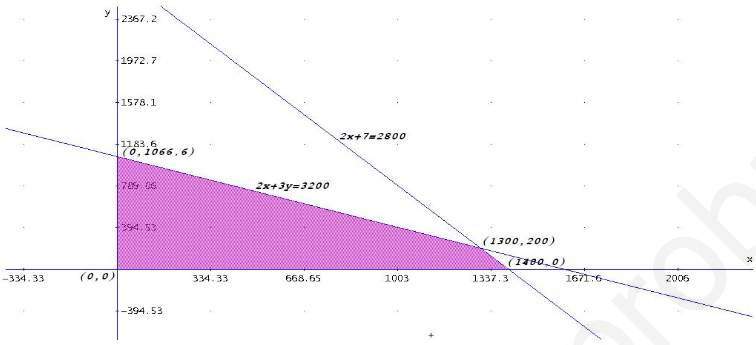
Problema 138 Una tienda de café recibe 700 Kilos de café natural y 800 Kilos de café torrefacto. Envasa paquetes de un kilo con dos tipos de mezclas: el tipo A con medio kilo de café natural y medio kilo de café torrefacto, y el tipo B con un cuarto Kilo de café natural, y tres cuartos kilos de café torrefacto. La ganancia por cada kilo de la mezcla tipo A es de un euro, y por cada kilo del tipo B es de dos euros. Determinar los paquetes de cada tipo de mezcla que deben prepararse para obtener la ganancia máxima.

Solución:

	A	B	Cantidad
Natural	1/2	1/4	700
Torrefacto	1/2	3/4	800
Beneficio	1	2	

Hacemos x a el nº de paquetes del tipo A, e y a los del tipo B. Obtendremos las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y\leq 700\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\leq 800\\ x\geq 0,\ \ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y\leq 2800\\ 2x+3y\leq 3200\\ x\geq 0,\ \ y\geq 0\end{array}\right.$$



La función objetivo es $z(x,y)=x+2y$

$$\left\{\begin{array}{lcr} z(1400,0) & = & 1400\\ z(1300,200) & = & 1700\\ z(0,1066.6) & = & 2133.33\end{array}\right.$$

Está claro que, el número de paquetes tiene que ser entero, y que por las valoraciones que hemos calculado la solución estaría en la tercera. Cogemos por tanto el enetero más próximo dentro de la región factible, que sería $(0,1066)$. (El 1067 no valdría, ya que está fuera de la región).

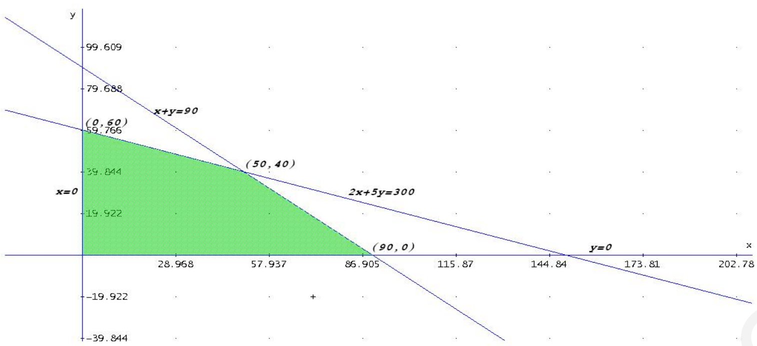
La ganancia máxima sería $z(0,1066)=2133$ euros.

Problema 139 Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 euros y para no fumadores al precio de 60 euros. Al no fumador se le deja llevar 50 Kg de peso y al fumador 20 Kg. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3000 Kg, ¿cuál debe ser la oferta de plazas de la compañía para optimizar el beneficio?

Solución:

Ponemos x fumadores e y no fumadores. Tendremos las siguientes restricciones

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\leq 90\\ 20x+50y\leq 3000\\ x\geq 0,\ \ y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\leq 90\\ 2x+5y\leq 300\\ x\geq 0,\ \ y\geq 0\end{array}\right.$$



La región factible será la zona sombreada La función objetivo $z(x, y) = 100x + 60y$

$$\begin{cases} z(0,60) & = & 3600 \\ z(50,40) & = & 7400 \\ z(90,0) & = & 9000 \end{cases}$$

El beneficio máximo se producirá ofertando 90 plazas para los fumadores.

Problema 140 El jefe de seguridad de un museo estudia combinar 2 nuevos sistemas antirrobo: cámaras de vigilancia en las salas, y alarmas en puntos estratégicos del edificio. Se quiere utilizar un mínimo de 6 cámaras para cubrir con ellas las salas más importantes, y un máximo de 15 cámaras, con las que quedarían todas las salas cubiertas. Igualmente, se necesitan al menos 6 alarmas para cubrir las más importantes entradas y salidas del edificio. Finalmente, se tiene un presupuesto máximo de 36000 euros y cada cámara cuesta 1000 euros mientras que cada alarma cuesta 500 euros.

1. ¿Qué combinaciones de unidades de cada sistema se pueden instalar cumpliendo los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría instalar 7 cámaras y 59 alarmas?

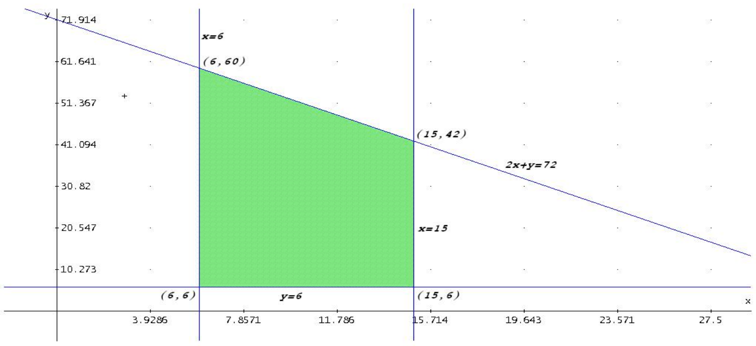
2. Si el objetivo es colocar el mayor número de dispositivos entre cámaras y alarmas ¿cuántos ha de colocar de cada modalidad? En ese caso ¿cuál será el coste total?

Solución:

1. Podemos llamar x nº de cámaras e y nº de alarmas. Tendremos las restricciones:

$$\begin{cases} 6 \le x \le 15 \\ y \ge 6 \\ 1000x + 500y \le 36000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 \le x \le 15 \\ y \ge 6 \\ 2x + y \le 72 \end{cases}$$

La región factible será la zona sombreada Si sustituimos en las restric-



ciones $x = 7$ e $y = 59$, no se cumple la última, ésto quiere decir que, no se pueden instalar 7 cámaras y 59 alarmas.

2. La función objetivo $z(x, y) = x + y$

$$\begin{cases} z(6,6) & = & 12 \\ z(15,6) & = & 21 \\ z(15,42) & = & 57 \\ z(6,60) & = & 66 \end{cases}$$

El valor máximo se encuentra instalando 6 cámaras y 60 alarmas, con un coste total de $6 \cdot 1000 + 60 \cdot 500 = 36000$ euros.

Problema 141 Un camión de 9 Tm debe transportar mercancías de dos tipos: A y B. La cantidad de A no puede ser inferior a 4 TM ni superior al doble de la cantidad de B. Si el transportista gana 0,03 euros por cada Kg de A y 0,02 euros por cada Kg de B, ¿cómo debe cargar el camión para obtener la máxima ganacia posible? ¿A cuánto ascendería esa ganancia?

Solución:

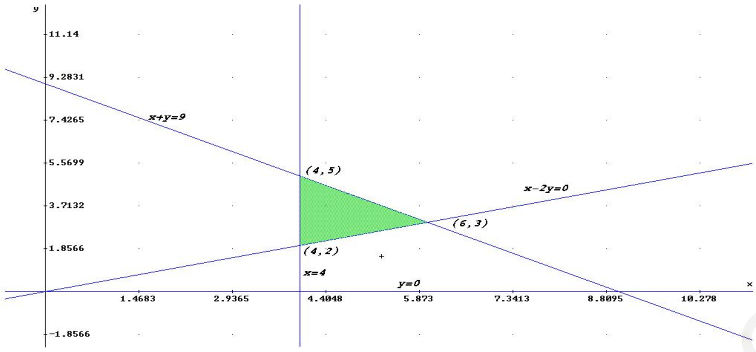
x Tm de A e y Tm de B, las restricciones serían las siguientes:

$$\begin{cases} 4 \le x \le 2y \\ x + y \le 9 \\ x \ge 0, \;\; y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4 \le x \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 9 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $z(x, y) = 30x + 20y$, y tendremos

$$\begin{cases} z(4,2) = 160 \\ z(6,3) = 240 \\ z(4,5) = 220 \end{cases}$$

Según vemos en la región factible.



La ganancia máxima sería de 240 euros cuando transporta 6 Tm del producto A y 3 Tm del producto B.

Problema 142 Se considera la función $f(x, y) = x - y$.

1. Representar el conjunto

$$A = \{(x, y)/3x + y \geq 15,\ y - x \leq -5,\ 2x + 3y \leq 60,\ y \geq 0\}$$

y calcular el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Alguna de las desigualdades que definen al conjunto A se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto?

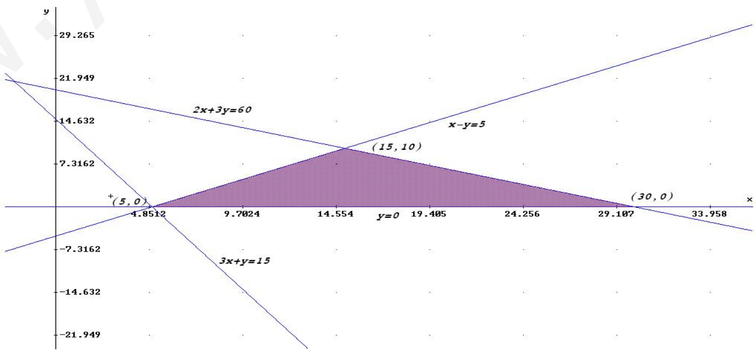
2. Decir si la función $f(x, y)$ alcanza valor máximo en el conjunto

$$B = \{(x, y)/3x + y \leq 15,\ x - y \geq 5,\ x \geq 0\}$$

En caso afirmativo calcular dicho valor.

Solución:

1. El conjunto A es el siguiente:

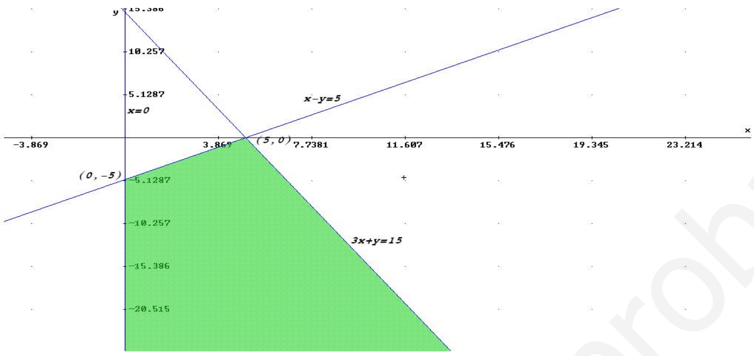


$$\begin{cases} f(5, 0) = 5 \\ f(30, 0) = 30 \\ f(15, 10) = 5 \end{cases}$$

El valor máximo que toma la función corresponde al punto $(30, 0)$ con un valor de 30.

En el gráfico se ve que la inecuación $3x + y \geq 15$ no afecta para nada al recinto A.

2. El conjunto B será el siguiente:



$$\begin{cases} f(0, -5) = 5 \\ f(5, 0) = 5 \end{cases}$$

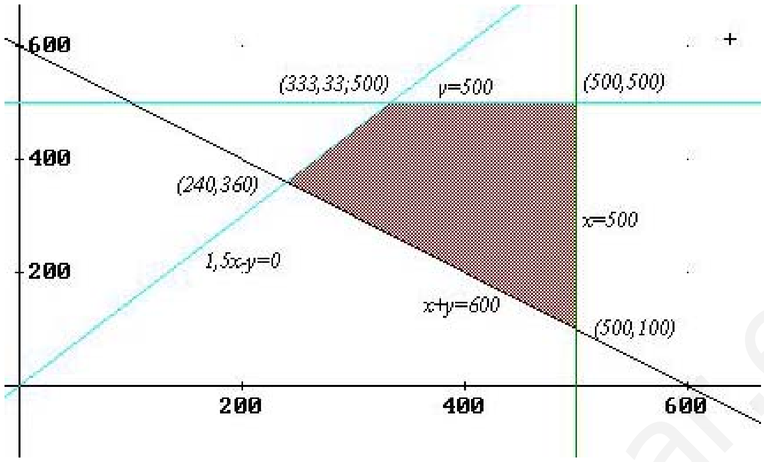
Probamos en cualquier otro punto, que esté dentro del recinto y observamos $f(5, -5) = 5 + 5 = 10$ mayor valor que en los vértices, luego esta función no tiene máximo en B.

Problema 143 Un producto se compone de la mezcla de otros dos A y B. Se tienen $500kg$ de A y $500kg$ de B. En la mezcla, el peso de B debe ser menor o igual que $1,5$ veces el de A. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a $600kg$. Sabiendo que cada kg de A cuesta 5 euros y cada kg de B cuesta 4 euros, calcular los kg de A y B que deben emplearse para hacer una mezcla de coste mínimo, que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.

Solución:

Se trata de un problema de optización. Vamos a llamar x al n^o de kg de A, y vamos a llamar y al n^o de kg de B. El conjunto de restricciones será el siguiente:

$$\begin{cases} x \leq 500 \\ y \leq 500 \\ 1,5x - y \geq 0 \\ x + y \geq 600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$u(x,y) = 5x + 4y \Longrightarrow \begin{cases} u(240,360) & = 2640 \\ u(333,33;500) & = 3666,67 \\ u(500,500) & = 4500 \\ u(500,100) & = 2900 \end{cases}$$

El coste mínimo sería de 2640 euros que correspondería a $240kg$ de A y $360kg$ de B.

Problema 144 Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 100 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 euros, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 euros y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 euros a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

Solución:

	bañadores	gorros	gafas	beneficio
A	1	1	1	8
B	2	0	1	10
	1600	800	1000	

Observando la tabla anterior, si llamamos x al número de lotes vendidos de A y llamamos y al número de lotes vendidos de B, obtenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 1600 \\ x \leq 800 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Y la función beneficio será $u(x,y) = 8x + 10y - 1500$, en la que tendremos que encontrar el valor máximo.

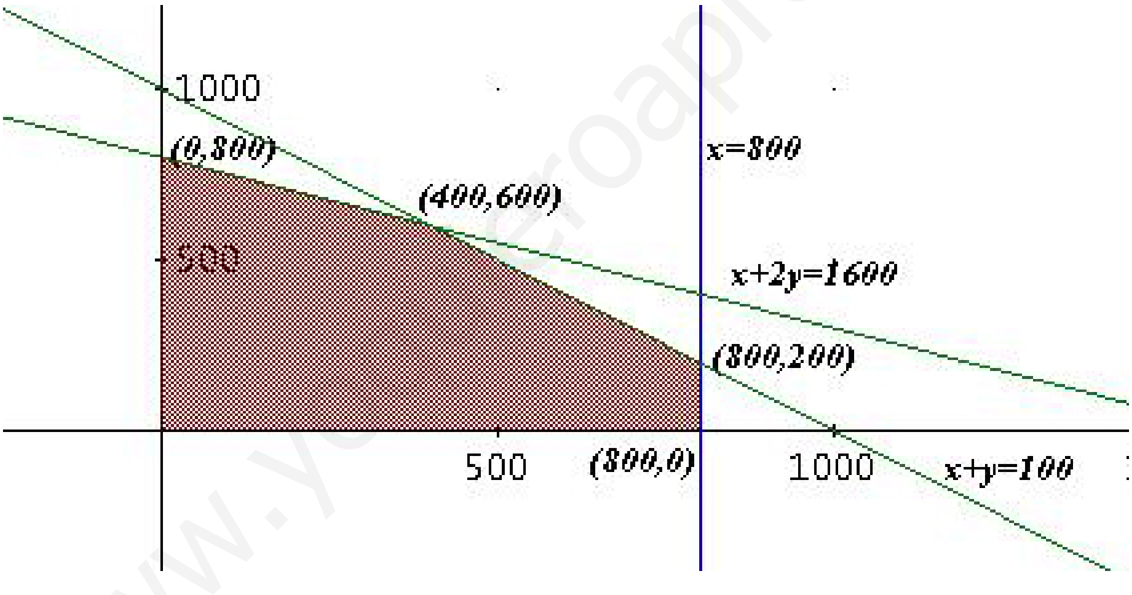
Los puntos de corte de la inecuaciones anteriores son los siguientes:

$$(0, 800)\ \ (400, 600)\ \ (800, 200)\ \ (800, 0)$$

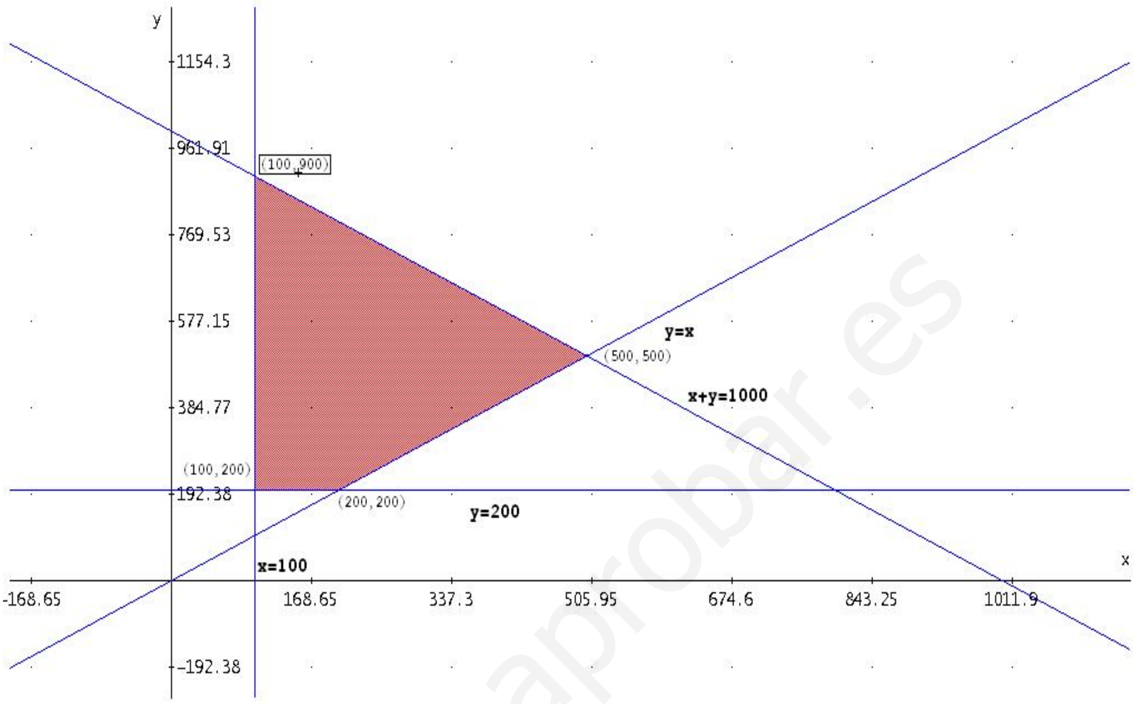
Nos producen los siguientes beneficios:

$$\begin{cases} u(0, 800) = 6500 \\ u(400, 600) = 7700 \\ u(800, 200) = 6900 \\ u(800, 0) = 4900 \end{cases}$$

Para obtener un beneficio máximo se deberán vender 400 lotes A y 600 lotes B.
Gráficamente sería:



Problema 145 Un mayorista vende productos congelados que presenta en dos envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro para cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro para cada envase grande. ¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el gasto mínimo de almacenaje?. Obtener dicho mínimo.



Solución: Si llamamos x al número de envases de tamaño pequeño, y llamamos y al número de envases de tamaño grande, la función objetivo será: $z(x, y) = 10x + 20y$, que tendremos que minimizar con las restricciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \leq 1000 \\ x \geq 100 \\ y \geq 200 \\ y \geq x \end{array}\right.$$

La región factible de esta representada en el gráfico anterior.

$$\left\{\begin{array}{l} z(100, 200) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 200 = 5.000 \\ z(200, 200) = 10 \cdot 200 + 20 \cdot 200 = 6.000 \\ z(500, 500) = 10 \cdot 500 + 20 \cdot 500 = 15.000 \\ z(100, 900) = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 900 = 19.000 \end{array}\right.$$

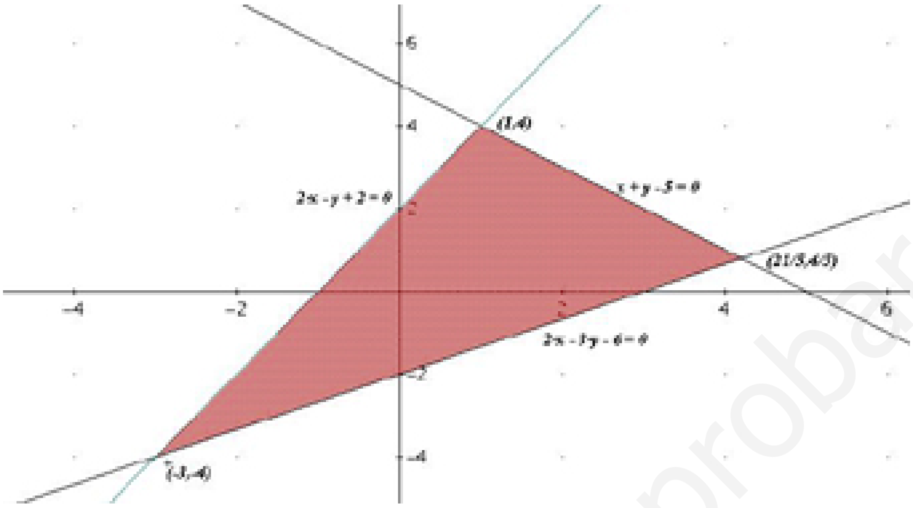
El mínimo gasto de almacenaje corresponde a 100 envases pequeños y 200 grandes y sería de 5.000 centimos de euro.

Problema 146 Calcular el valor máximo y el valor mínimo de la función $z = 35x - 10y + 20$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{array}{rrr} 2x- & y+ & 2 > 0 \\ 2x- & 3y- & 6 < 0 \\ x+ & y- & 5 < 0 \end{array}$$

Solución:

Dibujamos el recinto de restricciones (la región factible):



$$\left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & 3y- & 6=0 \\ 2x & y+ & 2=0 \end{array} \right. \Longrightarrow (-3,-4) \Longrightarrow z_{(-3,-4)} = -45$$

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & 3y & -6=0 \\ x+ & y & -5=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right) \Longrightarrow z_{\left(\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right)} = 159$$

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 2x- & y & +2=0 \\ x+ & y & -5=0 \end{array} \right. \Longrightarrow (1,4) \Longrightarrow z_{(1,4)} = 15$$

El valor mínimo de z está en el punto $(-3,-4)$ y vale -45. El valor máximo está en el punto $\left(\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y vale 159.

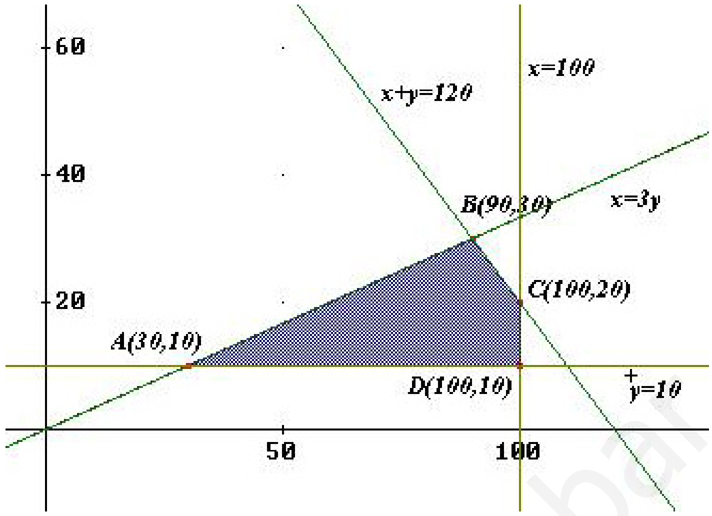
Problema 147 Sea el sistema de inecuaciones siguiente: $x + y \leq 120$; $3y \leq x$; $x \leq 100$; $y \geq 10$.

1. Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
2. ¿En qué punto de sta región, $F(x,y) = 25x + 20y$ alcanza el máximo?

Solución:

1. La región factible tiene la siguiente representación gráfica: Donde A es la intersección de las rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 10 \\ x = 3y \end{array} \right. \Longrightarrow A(30,10)$$



Donde B es la intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 120 \end{cases} \Longrightarrow B(90, 30)$$

Donde C es la intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x = 100 \\ x + y = 120 \end{cases} \Longrightarrow C(100, 20)$$

Donde D es la intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases} \Longrightarrow D(100, 10)$$

2. En estos puntos la función objetivo toma los siguientes valores:

$$F(A) = 950;\ F(B) = 2850;\ F(C) = 2900;\ F(D) = 2700$$

El punto donde la función alcanza el máximo es $C(100, 20)$.

Problema 148 En una pequeña empresa se fabrican sólo dos tipos de aparatos, A y B. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y, obligatorimente, al menos uno del tipo B. Se quieren obtener unas ventas superiores a 600 euros, teniendo en cuenta que los precios a los que vende los artículos A y B son 300 y 100 euros, respectivamente.

Hallar todas las posibilidades de fabricación.

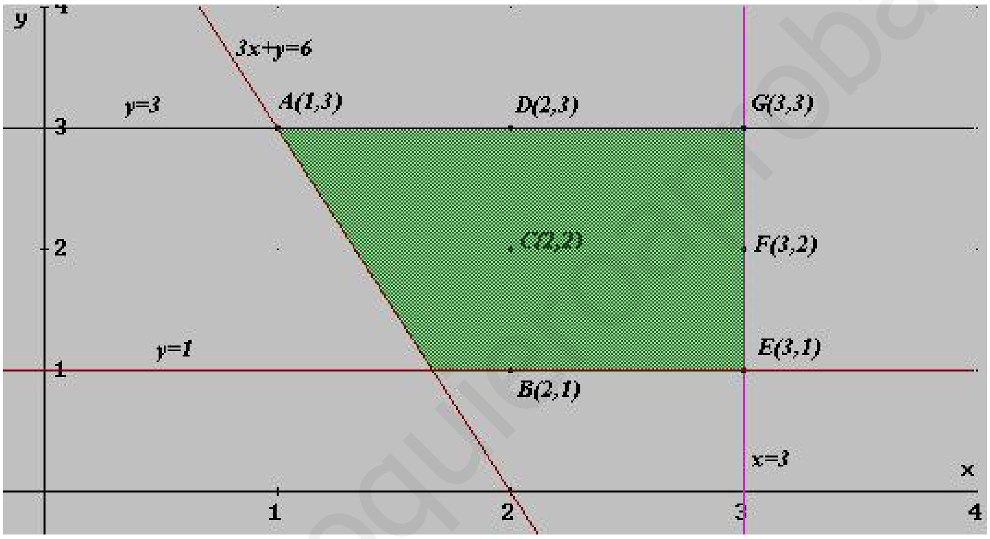
Solución:

Sea x el nº de aparatos de tipo A.

Sea y el nº de aparatos de tipo B.

Calculemos la región factible:

$x \leq 3$
$1 \leq y \leq 3$
$300x + 100y > 600 \Longleftrightarrow 3x + y > 6$
Su representación gráfica es la siguiente:



Las posibilidades de fabricación son los puntos que se encuentran en esta región incluidos sus bordes, las coordenadas tienen que estar formadas sólo por números naturales, es decir, los puntos señalados en la figura.

El resumen lo podemos poner en forma de tabla:

Unidades A	Unidades B
1	3
2	1,2,3
3	1,2,3

Problema 149 En el último Salón del automóvil celebrado en España, un pequeño fabricante presento sus modelos Caaper (precio por unidad: 16000 euros) y Ena (precio por unidad: 15000 euros). El coste de producción por unidad es, respectivamente, 10400 y 9750 euros. Para la fabricación de una unidad del primer modelo se necesitan 3 m^2 de un determinado producto

textil 7,5 kg de pintura, mientras que para el segundo se necesitan 4m^2 y 7 kg, respectivamente. Mensualmente existe en el almacen 96m^2 de producto textil y 195 kg de pintura.

1. Representa la región factible.
2. Halla cuántas unidades de cada modelo interesa fafricar mensualmente para que las ventas de las mismas produzcan el máximo beneficio.
3. Calcula dicho beneficio.

Solución:

1. LLamamos x al nº de coches vendido modelo Caaper
   LLamamos y al nº de coches vendido modelo Ena

	Caaper	Ena	Existencias
tela	3	4	96
pintura	7,5	7	195

   El conjunto de restricciones será el siguiente:
   $3x + 4y \leq 96$
   $7,5x + 7y \leq 195$
   $x \geq 0,\ \ y \geq 0.$
   La función objetivo es $F(x, y) = 5600x + 5250y$.

   Como se ve en la figura obtenemos los puntos A como intersección de las rectas $x = 0$ y $3x+4y = 96$; el B como intersección de las rectas $3x + 4y = 96$ y $7,5x + 7y = 195$; el C como intersección de las rectas $7,5x + 7y = 195$ y $y = 0$. Estos puntos son:

   $$A(0, 24),\ \ B(12, 15),\ \ C(26, 0)$$

2. El beneficio máximo se obtendrá en uno de estos puntos:

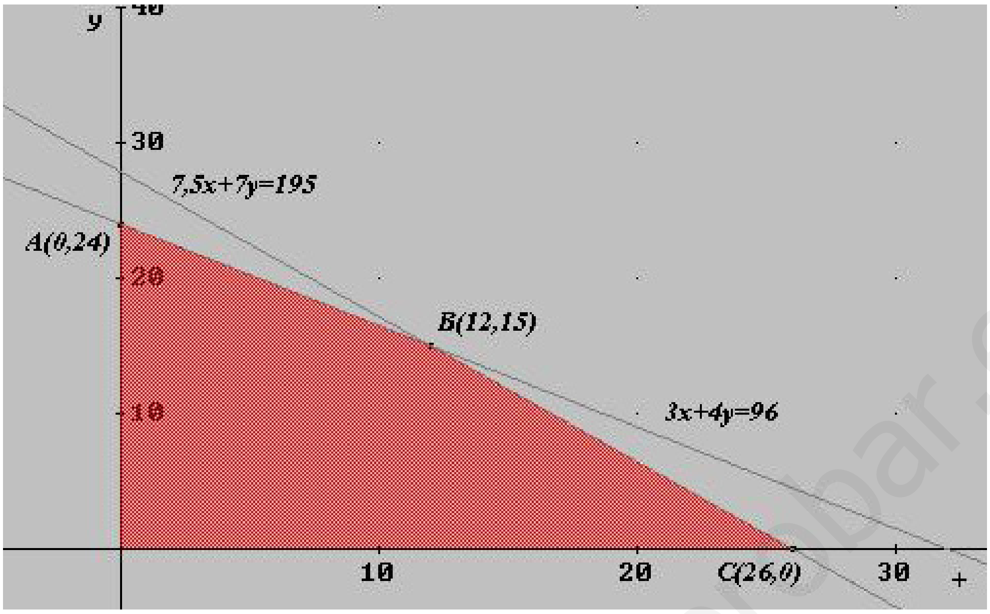
   $F(0, 24) = 5600 \cdot 0 + 5250 \cdot 24 = 126000$

   $F(12, 15) = 5600 \cdot 12 + 5250 \cdot 15 = 145950$

   $F(26, 0) = 5600 \cdot 26 + 5250 \cdot 0 = 145600$

   Luego para que el beneficio sea máximo, tendrá que fabricar 12 unidades del modelo Caaper y 15 del Ena.

3. El beneficio máximo es de 145950 euros.



Problema 150 Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x + y \leq 5$$

$$x + 3y \geq 9$$

$$x \geq 0; \;\; y \geq 0$$

Representar la región factible que determina el sistema de ecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región factible las siguientes funciones alcanzan su máximo o su mínimo:

1. $f(x, y) = 2x + 3y$
2. $f(x, y) = y - x$

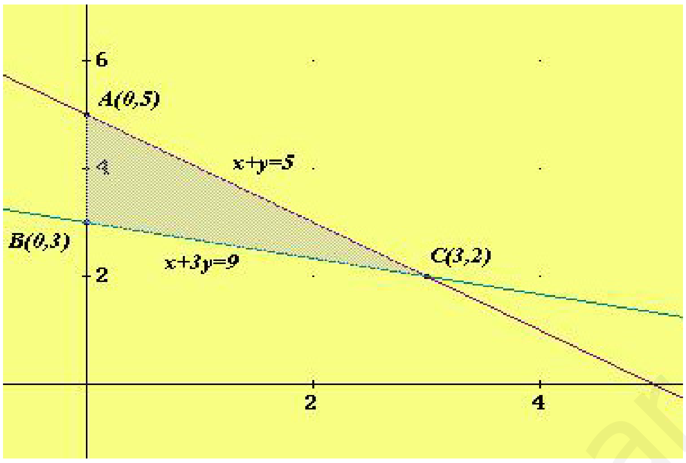
Solución:

Dibujamos el recinto:

1. Como la región está acotada, la función alcanza el máximo y el mínimo en alguno de los vértices de la región:

   Si $f(x, y) = 2x + 3y$ tendríamos:

   $f(0, 5) = 15$



$f(0,3) = 9$
$f(3,2) = 12$

Luego la función $f(x,y)$ alcanza un máximo en el punto $(0,5)$ y un mínimo en el punto $(0,3)$.

2. Como la región está acotada, la función alcanza el máximo y el mínimo en alguno de los vértices de la región:

   Si $f(x,y) = y - x$ tendríamos:

   $f(0,5) = 5$
   $f(0,3) = 3$
   $f(3,2) = -1$

   Luego la función $f(x,y)$ alcanza un máximo en el punto $(0,5)$ y un mínimo en el punto $(3,2)$.

Capítulo 3

Problemas de Análisis

3.1 Límites

3.1.1 Dominio y Recorrido

Problema 151 Hallar el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{|x|}$
5. $f(x) = \frac{|x|}{x}$
6. $f(x) = \sqrt{1-x}$
7. $f(x) = 4 - x^2$
8. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$
9. $f(x) = |x-2|$
10. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

3.1.2 Cocientes Polinómicos, Conjugados y Trigonométricos

Problema 152 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$
2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x-2}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x}{5x}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x\sec x}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x}{x}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} x\sec x$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

23. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$. (Ayuda: $(\frac{\operatorname{sen} t}{t})^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}$)

24. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 3t}{t} = 3(\frac{\operatorname{sen} 3t}{3t})$)

25. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t}$. (Ayuda: $\frac{\operatorname{sen} 2t}{\operatorname{sen} 3t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}\cdot\frac{3t}{\operatorname{sen} 3t}$)

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$

27. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1-\cos h)^2}{h}$

Problema 153 Calcular los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+1}{10x^3-3x^2+7}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{10}-11}{10x^1 1-3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2}{x+3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^2+3x+1}{x^2-3x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} (2x - \dfrac{1}{x^2})$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)^{-2}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{3x}{x+1})$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x^2}{x-1} + \dfrac{3x}{x+1})$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} (x + \sqrt{x^2+3})$

12. $\lim_{x\to\infty}(2x - \sqrt{4x^2+1})$

13. $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2+x})$

14. $\lim_{x\to\infty}(3x + \sqrt{9x^2-x})$

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}}$

18. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-3x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x^4+1x}}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}$

21. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x+\operatorname{sen} x}$

23. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

24. $\lim_{x\to\infty} x \tan\dfrac{1}{x}$

3.1.3 Regla de L'Hôpital

Problema 154 Calcular por la regla de L'Hôpital los límites de las siguientes funciones:

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

2. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$

4. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1-x)}{x}$

6. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - (1+x)}{x}$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$

8. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

9. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

11. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x^2+2x+3}$

12. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x+3}{x-1}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

14. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

15. $\lim_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2})$

16. $\lim_{x\to 2} (\dfrac{8}{x^2-4} - \dfrac{x}{x-2})$

17. $\lim_{x\to 2} (\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4})$

18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

19. $\lim_{x\to 1^+} (\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1})$

20. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

21. $\lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

22. $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

23. $\lim_{x\to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$

24. $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

25. $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\pi}$

26. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}ax}{\operatorname{sen}bx}$

28. $\lim_{x\to 0}x\operatorname{cosec}x$

29. $\lim_{x\to 0}x^2\cot x$

30. $\lim_{x\to\infty}(x\operatorname{sen}\frac{1}{x})$

31. $\lim_{x\to\infty}(x\ \tan\frac{1}{x})$

32. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}x}{x}$

33. $\lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$

3.1.4 Varios

Problema 155 Calcular los siguientes límites:

1. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$$

   Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x\left(1+\frac{1}{5x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$$

   Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}=e^{\frac{3}{5}}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x^2)\left(\frac{x^2+2}{x^2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{3x^2}=e^6$$

Problema 156 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=e^{\frac{7}{3}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1}=10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}=e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]=0$$

Problema 157 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

Problema 158 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

Problema 159 Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$

Problema 160 Calcular los siguientes límites:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 7x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}$$

Luego:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{7x} = e^{\frac{7}{3}}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = [1^{\infty}] = e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(5x^2)\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{10x^2}{x^2+1} = 10$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^{5x^2} = e^{10}$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x^2+1}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right] = 0$$

Problema 161 Calcular los siguientes límites:

Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow -5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -5}\frac{4-\sqrt{x^2-9}}{x+5} = \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{16-(x^2-9)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{25-x^2}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} = \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{(5-x)(5+x)}{(x+5)(4+\sqrt{x^2-9})} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow -5}\frac{5-x}{4+\sqrt{x^2-9}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$
Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9}-4)(\sqrt{x^2-9}+4)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(\sqrt{x^2-9})^2-4^2}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}=\frac{10}{\sqrt{16}+4}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\frac{5}{4}$$
Calcular:
$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$
Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$
Calcular:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$
Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^\infty]=\infty$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$
Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^\infty\right]=0$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{8x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}8x\left(1+\frac{1}{6x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{8x}{6x}=\frac{4}{3}$$

5.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x^3+2x-1}{x^3-1}\right)^{x^3}=[4^{\infty}]=\infty$$

6.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-x+1}{3x^3+2}\right)^{5x}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

7.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{3x^2}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-3}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}3x^2\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-6x^2}{2x^2+1}=-3$$

8.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{\frac{5}{3}}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}5x\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

Problema 162 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+1}=\dfrac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-3x-1}{x^5+x^4+1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{2x^3}=e^{-8}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^4+x-1}{3x^4+1}\right)^{x^3}=e^{1/3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{3x^3+x^2-1}\right)^{2x-1}=0$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{2x^3-1}\right)^{3x}=0$

8. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x} = e^{-2}$

9. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^5+x^4-3x^2+4x-1}{x^4-x^3-2x^2+x+1} = \frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3-2x^2-x}{x^4-3x^2+x} = -1$

11. $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{5}{6}$

12. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{2}{3}$

Por L'Hôpital:

13. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

14. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-\cos x}{\sin x} = 1$

15. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2} = 1$

16. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^2-x}{e^x-1} = -1$

17. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^4-x^3+3x^2-4x+1}{x^4-x^3+3x-3} = \frac{3}{4}$

18. $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{3}{4}$

19. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

20. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = 0$

Problema 163 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3} = 2$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4} \dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \dfrac{4}{3}$

Problema 164 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1} = \infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2/2} = e^{1/2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^5+3x-1}{5x^5+1}\right)^{2x+1} = 0$

4. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x} = e^{-3}$

5. $\lim_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^3+3x^2-6x-16}{x^4+2x^3+x^2+x-2} = \dfrac{6}{11}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{3x^4+x^3-2x^2+x-3}{3x^3+2x^2-4x-1} = \dfrac{4}{3}$

7. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{3x^4+2x^3-2x^2}{x^3+x^2+x} = 0$

8. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5-1}{2x^4-2} = \dfrac{5}{8}$

9. $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3} = \dfrac{9}{4}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2} = -\dfrac{2}{3}$

11. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$

12. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-e^{2x}}{\sin x} = -2$

13. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)} = -1$

14. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x} = 1$

15. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

16. $\lim_{x\longrightarrow \infty} xe^x = \infty, \quad \lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^x = 0$

3.1.5 Selectividad

Problema 165 Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3. Utilizando el cambio de variable $\ln x = t$, calcular:
$$I = \int_1^e \frac{1+\ln x^2 + (\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx$$

Solución:

1. Descomponiendo los polinomios según sus raices tendremos que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ y $x^2-2x+1 = (x-1)^2$. Sustituyendo:
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

2. Para solucionar este límite voy a emplear dos métodos:

   (a) $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = [1^\infty] = e^\lambda$$

   Donde
   $$\lambda = \lim_{x\longrightarrow \infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

   Luego
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^\lambda = e^0 = 1$$

(b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

En esta condiciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Es decir, $\ln A = 0 \Longrightarrow\ A = 1$

3. Primero voy a solucionar la integral sin tener en cuenta los límites de integración y luego los aplicaremos.
   La integral la vamos a resolver por sustitución, haciendo $\ln x = t \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = dt$ y sustituyendo tendremos:

$$\int\frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx = \int\frac{1+2t+t^2}{(1+t)}dt =$$

$$\int\frac{(1+t)^2}{1+t}dt = \int(1+t)dt = t+\frac{t^2}{2}+C = \ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$I = \left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(\ln 1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Problema 166 1. Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{-\cos x} =$$

$= -2.$

2. Determina el valor de a para que
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=e$$

   Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$
$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{x+3}{x}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}ax\left(\frac{3}{x}\right)=3a$$
   Como $\lambda=1\Longrightarrow 3a=1\Longrightarrow a=\frac{1}{3}$.

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :
$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx$$

   Solución:
   Hacemos $u=1-2x^2\Longrightarrow du=-4x\cdot dx\Longrightarrow \frac{du}{-4}=x\cdot dx$ y sustituimos:
$$\int\frac{x}{(1-2x^2)^2}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{1}{4u}+C=\frac{1}{4(1-2x^2)}$$
$$+C$$

Problema 167 Calcular por la regla de L'Hôpital

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$

   Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{e^x}=\frac{0}{1}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}$

   Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x+2x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x+2}{4}=$$
$$=\frac{3}{4}$$

Problema 168 Calcular:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x+2}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{9-(x^2+5)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)(3+\sqrt{x^2+5})}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{2-x}{3+\sqrt{x^2+5}}=\frac{2}{3}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=[3^{\infty}]=\infty$$

3.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+2x-1}{3x^3-1}\right)^{2x}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}\right]=0$$

4.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{2x^3}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}=e^{-4}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}2x^3\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-4x^3}{x^3+1}=-4$$

Problema 169 Calcular:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{4}$$

2.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos^2 x-1}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\cos x-1)}{x}\cdot(\cos x+1)=0$$

Problema 170 Calcular

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{2e^x\sqrt{x+1}}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}=$$
$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)}=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{x}+1-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]$$

Observando el límite vemos que
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}=0\\[2ex]\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\quad\text{no tiene sentido}\end{cases}$$

Podemos concluir con que el límite no existe.

3. $\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$

Solución:

LLamamos $L=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}\Longrightarrow \ln L=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\ln(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos x\tan^2 x}{-\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}\frac{\cos^2 x\tan^2 x}{-\tan x}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\pi/2}-\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{\cos x}=\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(-\cos x\cdot\sin x)=0$$

Luego tenemos que $\ln L=0\Longrightarrow e^0=L\Longrightarrow L=1$, es decir, $\lim_{x\longrightarrow\pi/2}(\sin x)^{\tan x}=1$

Problema 171 Calcular los siguientes límites (donde "ln significa logaritmo neperiano).

1. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 172 Calcular los siguientes límites

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

3.2 Derivadas

3.2.1 Derivada en un Punto

Problema 173 Calcular la derivada de la siguiente gráfica, así como el valor de ella en un punto.

1. $f(x) = \frac{1}{3}(2x^3 - 4)$ en $x = 0$
2. $f(x) = \frac{5-6x^2}{7}$ en $x = 1$
3. $f(x) = 5x^{-2}(x + 3)$ en $x = 1$
4. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$ en $x = 1$
5. $f(x) = (x^3 - 3x)(2x^2 + 3x + 5)$ en $x = 0$
6. $f(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ en $x = 0$
7. $f(x) = (x^5 - 3x)(\frac{1}{x^2})$ en $x = -1$
8. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 2$

3.2.2 Aplicación de Métodos

Problema 174 Calcular las siguientes derivadas:

1. $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$
2. $f(x) = \frac{3-2x-x^2}{x^2-1}$
3. $f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x^2-1}$
4. $f(x) = x^4(1 - \frac{2}{x+1})$
5. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$
7. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
8. $f(x) = (x^2 - 1)^2$
9. $f(x) = (\frac{x^2-x-3}{x^2+1})(x^2 + x + 1)$
10. $f(x) = (\frac{x+1}{x+2})(2x - 5)$
11. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$
12. $f(x) = (3x^3 + 4x)(x - 5)(x + 1)$

13. $f(x) = \frac{x^2+c^2}{x^2-c^2}$ donde c es una constante
14. $f(x) = \frac{c^2-x^2}{c^2+x^2}$ donde c es una constante
15. $f(x) = \frac{x(x^2-1)}{x+3}$
16. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$
17. $f(x) = \frac{4x^{3/2}}{x}$
18. $f(x) = \frac{7}{3x^3}$
19. $f(x) = \frac{4}{5x^2}$
20. $f(x) = \frac{3x^2-5}{7}$
21. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

Problema 175 Calcular las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas

1. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
2. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
3. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$
4. $f(x) = (x+1)\cos x$
5. $f(x) = -x + \tan x$
6. $f(x) = x + \operatorname{cotan} x$
7. $f(x) = 5x \operatorname{cosec} x$
8. $f(x) = \frac{\sec x}{x}$
9. $f(x) = -\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x$
10. $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$
11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$
12. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$
13. $f(x) = \frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}$
14. $f(x) = \tan x \operatorname{cotan} x$
15. $f(x) = x^2 \tan x$

16. $f(x) = 5\sec x + \tan x$

17. $f(x) = \frac{x}{1-\operatorname{sen} x}$

18. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

19. $f(x) = \frac{\sec x}{x}$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

3.2.3 Primera y Segunda Derivada

Problema 176 Calcular las derivadas primera y segunda de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 4\,x^{3/2}$

2. $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

4. $f(x) = x + \frac{32}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

6. $f(x) = \sec x$

3.2.4 Tangente y Normal a la Gráfica de una Función

Problema 177 Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función dada en el punto indicado:

1. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ en el punto $(2, 2)$

2. $f(x) = (x-1)(x^2-2)$ en el punto $(0, 2)$

3. $f(x) = (x^3-3x+1)(x+2)$ en el punto $(1, -3)$

4. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ en el punto $(2, \frac{1}{3})$

5. $f(x) = \tan x$ en el punto $(\frac{\pi}{4}, 1)$

6. $f(x) = \sec x$ en el punto $(\frac{\pi}{3}, 2)$

Problema 178 ¿En que puntos tiene tangente horizontal la gráfica

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad ?$$

Problema 179 ¿En que puntos tiene tangente horizontal la gráfica

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad ?$$

Problema 180 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. Calcular la tangente y la normal a su gráfica en el punto $x = 1$.

Solución:

Calculamos la tangente a su gráfica en el punto $x = 1$:

$f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(1) = 2$

Calculamos el valor de la función en el punto $x = 1$:

$f(1) = 0.$

La ecuación de la tangente será: $y - 0 = 2(x-1) \Longrightarrow 2x - y - 2 = 0$

La ecuación de la normal será: $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Longrightarrow x + 2y - 1 = 0$

Problema 181 Calcular la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = \frac{3x^2}{x+2}$ en $x = 1$.
Solución:
En $x = 1$ tenemos que el valor de la función vale $f(1) = 1 \Longrightarrow (x_0, y_0) = (1, 1)$ será el punto de la curva por el que pasarán las rectas tangente y normal. Para calcular las pendientes de estas rectas calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{6x(x+2) - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{3x(x+4)}{(x+2)^2}$$

Y ahora tendremos que $m = f'(1) = \frac{5}{3}$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $x = 1$, teniendo en cuenta que la ecuación punto pendiente de una recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$ tendremos que

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x-1) \Longrightarrow 5x - 3y - 2 = 0$$

es la ecuación de la recta tangente.
Para calcular la ecuación de la recta normal tenemos que su pendiente es $m' = \frac{-1}{m} = -\frac{3}{5}$ por lo que su ecuación la encontraremos de igual manera que la tangente

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x-1) \Longrightarrow 3x + 5y - 8 = 0$$

es la ecuación de la recta normal.

Problema 182 Calcular la recta tangente y normal a la gráfica en el punto indicado:

1. $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ en el punto $(3, 5)$
2. $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ en el punto $(2, 6)$
3. $y = \operatorname{sen} 2x$ en el punto $(\pi, 0)$
4. $y = \tan x^2$ en el punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$

Problema 183 Calcular la recta tangente y normal a la función

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 3}$ en el punto $x = 2$.

Solución:

$$a = 2, \quad b = f(2) = 1, \quad y - b = m(x - a)$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = \frac{4}{5}$$

La recta tangente es $y - 1 = \dfrac{4}{5}(x - 2)$.

La recta normal es $y - 1 = -\dfrac{5}{4}(x - 2)$.

3.2.5 Varias

Problema 184 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \sqrt{x^2 - 1}$
2. $y = \cos \frac{3x}{2}$
3. $y = \operatorname{cosec}^2 x$
4. $y = (6x - 5)^4$
5. $y = \tan(\pi x + 1)$
6. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
7. $y = (2x - 7)^3$
8. $y = (3x^2 - 1)^4$

9. $y = 2(x^2 - 1)^3$

10. $y = 3(9x - 4)^4$

11. $y = \frac{1}{x-2}$

12. $y = \frac{1}{x^2+3x-1}$

13. $y = (\frac{1}{x-3})^2$

14. $y = -\frac{4}{(x+2)^2}$

15. $y = \frac{3}{x^3-4}$

16. $y = \frac{1}{(x^2-3x)^2}$

17. $y = x^2(x-2)^4$

18. $y = x(3x-9)^3$

19. $y = \sqrt{1-x}$

20. $y = \sqrt{3-2x}$

21. $y = \sqrt{x^2+2x-1}$

22. $y = \sqrt[3]{3x^3+4x}$

23. $y = \sqrt{x^2-2x+1}$

24. $y = 2\sqrt{4-x^2}$

25. $y = -3\sqrt[4]{2-9x}$

26. $y = (9-x^2)^{\frac{2}{3}}$

27. $y = (9x+2)^{\frac{2}{3}}$

28. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

29. $y = \sqrt{\frac{1}{x^2-2}}$

30. $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3-1}}$

31. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

32. $y = \frac{-1}{\sqrt{x}+1}$

33. $y = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

34. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$
35. $y = \frac{x+1}{2x-3}$
36. $y = \frac{3x+2}{x-1}$
37. $y = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$
38. $y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$
39. $y = \sqrt{x}(2-x)^2$
40. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$
41. $y = \frac{-2(2-x)\sqrt{1+x}}{3}$
42. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$

Problema 185 Calcular la primera y segunda derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2(x^2-1)^2$
2. $f(x) = \frac{1}{x-2}$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Problema 186 Calcular la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

1. $y = \cos 3x$
2. $y = \operatorname{sen} 2x$
3. $y = 3\tan 4x$
4. $y = 2\cos \frac{x}{2}$
5. $y = \operatorname{sen} \pi x$
6. $y = \sec x^2$
7. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x$
8. $y = 5\cos \pi x^2$
9. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$
10. $y = 5\cos(\pi x)^2$

11. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$
12. $y = \operatorname{cosec}^2 x$
13. $y = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$
14. $y = \operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
15. $y = x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
16. $y = x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}$
17. $y = \sec 2x^3$
18. $y = \frac{\cos x + 1}{x}$

Problema 187 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

2.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$$

3.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

4.

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - 2(x^2 - 1)}{(2x)^2} = \frac{2x^2 + 2}{4x^2} = \frac{x^2 + 1}{2x^2}$$

2.

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

3.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} = (x^2-1)^{1/3} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

4.

$$f(x) = e^{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

Problema 188 Calcular las siguientes derivadas

1. $f(x) = \dfrac{e^{2x}+x^2}{\sin x}$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{(2e^{2x}+2x)\sin x - (e^{2x}+x^2)\cos x}{\sin^2 x}$$

2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$

   Solución:

   $$f'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{(2\sqrt{x})\left(1+\frac{x}{(x-1)^2}\right)} =$$

   $$= -\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}\,((x-1)^2+x)}$$

3. $f(x) = (x^2-1)\sin(x^2)$

   Solución:

   $$f'(x) = 2x\sin x^2 - 2x(x^2-1)\cos x^2 = 2x(\sin x^2 - (x^2-1)\cos x^2)$$

Problema 189 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \dfrac{x^3-2}{x^2+x-1}$

2. $y = \ln x \cdot \cos(x^2-1)$

3. $y = \ln \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}$
4. $y = \log_7(\sin x)$
5. $y = e^{x \cos x}$
6. $y = 5^{\cos(x^2-1)}$
7. $y = \arcsin(x^2 - 1)$
8. $y = \arccos\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$
9. $y = \arctan(\ln x)$
10. $y = e^x \cdot \sin(x^3 - 1)$

Problema 190 Calcular las siguientes derivadas

1. $y = 3^{x^2-1} \cdot \sin(x+1)$
2. $y = \arcsin(e^x)$
3. $y = \arccos(5^{x^2-1})$
4. $y = (x^2 - 1)(2x + 1)$
5. $y = x^3 \ln x$
6. $y = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$
7. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
9. $y = \log_3 e^{x^2-1}$
10. $y = \dfrac{1}{x^3 - x + 1}$

Problema 191 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right)$
2. $y = e^{x^2-x-1}$
3. $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

4. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$

Solución:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}\right) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x + 2)$

   $$y' = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

2. $y = e^{x^2 - x - 1}$

   $$y' = (2x - 1)e^{x^2 - x - 1}$$

3. $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$

   $$y' = \frac{4x(x - 1) - (2x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x - 1)^2}$$

4. $y = (x^2 + 1)(x - 1)$

   $$y' = 2x(x - 1) + (x^2 + 1) = 3x^2 - 2x + 1$$

Problema 192 Calcular las siguientes derivadas:

$$\text{a) } y = \arctan(x^2 - 1) \quad \text{b) } y = e^x(\cos x - 1) \quad \text{c) } y = \ln\left(\frac{\sin x}{x^2 + 1}\right)$$

$$\text{d) } y = e^{\sin x - 1} \quad \text{e) } y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2}$

b) $y' = e^x(\cos x - 1) - e^x \sin x$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

d) $y' = \cos x e^{\sin x - 1}$

e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Problema 193 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = \ln(x+8)$, escribir la función $g \circ f$ y calcular su derivada.

Solución:

$$u = g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$$

$$u' = \frac{\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-2/3}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2+x+1}+8} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)+24\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

Problema 194 Calcular las funciones derivadas de las siguientes:

1. $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$

   Solución:

$$f'(x) = \frac{6x^2\cos x - 2x^3(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x^2(3\cos x + x\sin x)}{\cos^2 x}$$

2. $g(x) = \frac{2}{3}\ln(5x)$

   Solución:

$$g'(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5x} = \frac{2}{3x}$$

3. $h(x) = \frac{1}{2}\,e^{5x-3}$

   Solución:

$$h'(x) = \frac{1}{2}\,e^{5x-3}\cdot 5 = \frac{5}{2}\,e^{5x-3}$$

Problema 195 Dada la curva de ecuación $y = -x^2+26x$, cálculese la recta tangente a la misma que sea paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

Solución:

La recta $y = -x$ tiene de pendiente $m = -1$. La recta tangente a la función tiene que tener esta pendiente que, como sabemos, se obtiene a partir de la primera derivada.

$y' = -2x + 26 = -1 \Longrightarrow x = \dfrac{27}{2},\;\; y = \dfrac{675}{4}$

La recta pedida pasa por el punto $\left(\dfrac{27}{2}, \dfrac{675}{4}\right)$ y tiene de pendiente $m = -1$, aplicando la ecuación de la recta punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ tenemos que

$$y - \frac{675}{4} = -\left(x - \frac{27}{2}\right) \Longrightarrow x + y = \frac{729}{4}$$

Problema 196 Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

2. Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

3. Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

1. Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

2. **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1 - a^2}{2a} = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$. Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2 + 1}{2a}, 0\right)$.

3.

$$d(A, P) = \sqrt{(a - 0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1 - a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - a^2)^2}{4a^2} + (1 - a^2)^2} = (1 - a^2)\sqrt{\frac{1 + 4a^2}{4a^2}} = \frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(A, P) = 2d(B, P) \Longrightarrow a\sqrt{1 + 4a^2} = 2\frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2} \Longrightarrow$$

$$a = \frac{1 - a^2}{a} \Longrightarrow a^2 = 1 - a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a \in (0, 1)$ la solución pedida es la positiva $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.3 Óptimización

Problema 197 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $6\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \dfrac{9}{2}\, u^2$

Problema 198 Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4, 0)$.
Solución:
Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4, 0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow\ x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow\ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow\ d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.

Problema 199 Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos"de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Solución:

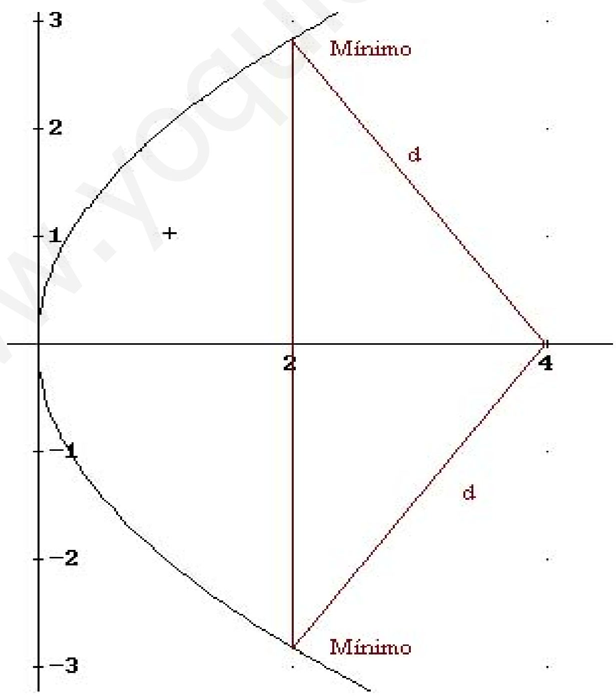
Tenemos
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ y=2x \end{array}\right. \Longrightarrow z=60-3x$$
El producto de los tres números es $P(x)=x\cdot y\cdot z=x\cdot 2x\cdot(60-x)=-6x^3+120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.

$$P'(x)=-18x^2+240x=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -18x+240=0\Longrightarrow x=\frac{40}{3} \end{array}\right.$$

Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada

$$P''(x)=-36x+240\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} P''(0)=240>0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right)=-240<0 \end{array}\right.$$

Luego cuando $x=0$ tenemos un mínimo, y cuando $x=\dfrac{40}{3}$ es un máximo. Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean

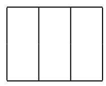


enteros, tenemos $13 < \dfrac{40}{3} < 14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos

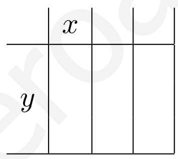
$$\left\{\begin{array}{l} P(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7098 \\ P(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7056 \end{array}\right.$$

Los tres números buscados son $x = 13$, $y = 26$ y $z = 60 - 3x = 21$. El valor del producto será $P(13) = 7098$.

Problema 200 Un solar rectangular de $11250\,m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

Problema 201 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(4-x)}{2} = \dfrac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

Problema 202 Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.

Solución:

Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60-2b) \cdot \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{60-2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30-b) \cdot \sqrt{b^2 - (30-b)^2} = (30-b) \cdot \sqrt{b^2 - (900 + b^2 - 60b)} \Longrightarrow$$

$$S(b) = (30-b) \cdot \sqrt{60b - 900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b) = -\sqrt{60b-900} + (30-b) \cdot \frac{60}{2 \cdot \sqrt{60b-900}} =$$

$$-\sqrt{60b-900} + (30-b) \cdot \frac{30}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-(\sqrt{60b-900})^2 + (30-b) \cdot 30}{\sqrt{60b-900}} =$$

$$\frac{-(60b-900) + (900-30b)}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-60b + 900 + 900 - 30b}{\sqrt{60b-900}} = \frac{1800 - 90b}{\sqrt{60b-900}}$$

$$S'(b) = \frac{1800 - 90b}{\sqrt{60b - 900}} = 0 \Longrightarrow b = 20, \;\; a = 20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b) = \frac{-90 \cdot \sqrt{60b - 900} - (1800 - 90b) \cdot \dfrac{60}{2 \cdot \sqrt{60b - 900}}}{(\sqrt{60b - 900})^2} =$$

$$\frac{-90(60b - 900) - 30(1800 - 90b)}{(60b - 900)^{3/2}} = \frac{5400b + 81000 - 54000 + 2700b)}{(60b - 900)^{3/2}} \Longrightarrow$$

$$S''(b) = \frac{2700(1 - 10b)}{(60b - 900)^{3/2}} \Longrightarrow S''(20) = -3\sqrt{3} < 0$$

Luego es un máximo.

Problema 203 Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

Sean los números x e y tenemos que $P = x \cdot y$, y sabemos que $x + y^2 = 48 \Longrightarrow x = 48 - y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y) = y(48 - y^2) = 48y - y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y) = 0$.

$P'(y) = 48 - 3y^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = 16 \Longrightarrow y = 4, \;\; y = -4$ con ambas tenemos que $x = 32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

$P''(x) = -6y \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P''(-4) = 24 \\ P''(4) = -24 \end{array} \right. \Longrightarrow$ cuando $y = -4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y = 4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x = 32$ e $y = 4$.

Problema 204 Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi \, m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30 \, euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45 \, euros/m^2$.

1. Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.

2. ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.

3. ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.

Solución:

1. Sabemos que

$$V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

$$C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \frac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$$

2. Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$
$$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\,m,\ h = 9\,m$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

3. El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3} r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros$.

Problema 205 Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \Longleftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2 - 4x + 16)\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

Problema 206 A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la base de la caja es un cuadrado de lado $60-2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60-2x)^2 \cdot x = (3600+4x^2-240x)x = 4x^3-240x^2+3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2-480x+3600 = 0 \Longrightarrow x = 30,\ x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x-480 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{array} \right.$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

Problema 207 Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Solución:

Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
La suma de los perímetros será $4x+12x+4y = 1248 \Longrightarrow y = 312-4x$ El área del primer cuadrado es x^2
El área del segundo cuadrado es $9x^2$
El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312-4x)^2$
La función suma de áreas que hay que minimizar será

$$S(x) = x^2+9x^2+(312-4x)^2 = 26x^2-2496x+97344$$

Para calcular el mínimo derivamos

$$S'(x) = 52x-2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

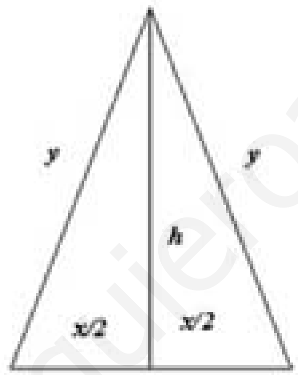
Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

Las dimensiones de los campos son:

El primer campo tiene de lado $48m$
El segundo campo tiene de lado $144m$
El tercer campo tiene de lado $120m$

Problema 208 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot y}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4 - x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88 + 21x}{16(4 - x)\sqrt{4 - x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \dfrac{8}{3} \Longrightarrow y = \dfrac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

3.4 Dominio y Recorrido

Problema 209 1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)\sqrt{x+1}}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+1=0 \implies x=-1$, luego eliminando el valor $x=-1$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-1,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^3 - 3$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
Solución:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^3 - 3$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 3)) = |x^3 - 3|$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1,+\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x) = \frac{x}{x+1} \implies (x+1)f(x) = x \implies xf(x) + f(x) = x \implies xf(x) - x = -f(x) \implies x(f(x)-1) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{f(x)-1}$ En conclusión:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

Problema 210 1. Encuentra el dominio de la función

$$f(x) = \frac{x-4}{(x+3)\sqrt{x+2}}$$

Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = |x|$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
   Solución:
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 - 2 = x^2 - 2$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2)) = |x^2 - 2|$

3. Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ en el dominio $D = (-1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{2x}{x+1} \Longrightarrow (x + 1)f(x) = 2x \Longrightarrow xf(x) + f(x) = 2x \Longrightarrow xf(x) - 2x = -f(x) \Longrightarrow x(f(x) - 2) = -f(x) \Longrightarrow x = \frac{-f(x)}{f(x)-2}$
   En conclusión:
   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{2 - x}$$

Problema 211 .

1. Encuentra el dominio de la función
   $$f(x) = \frac{(x - 4)\sqrt{x + 2}}{x + 3}$$
   Solución:
   Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x + 2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2$.
   Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$, luego eliminando el valor $x = -3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2, +\infty)$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
   Solución:
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2)) = \sqrt{x^2 - 2}$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{x}{2x+1} \Longrightarrow (2x + 1)f(x) = x \Longrightarrow 2xf(x) + f(x) = x \Longrightarrow 2xf(x) - x = -f(x) \Longrightarrow x(2f(x) - 1) = -f(x) \Longrightarrow x = \frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
   En conclusión:
   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{1 - 2x}$$

Problema 212 Resolver

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{x+3}$$
Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x+2 \geq 0 \implies x \geq -2$.
Por otra parte los únicos valores que anulan el denominador de la función serían $x+3=0 \implies x=-3$, valor eliminado en el razonamiento anterior, y $x+2=0 \implies x=-2$, luego eliminando el valor $x=-3$ podemos concluir con que el dominio de la función será: $(-2,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^2-2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 2 = x-2$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-2)) = \sqrt{x^2-2}$

3. Sea $f(x) = \frac{x}{2x+1}$ en el dominio $D = (-1/2, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
Solución:
$f(x) = \frac{x}{2x+1} \implies (2x+1)f(x) = x \implies 2xf(x)+f(x) = x \implies 2xf(x)-x = -f(x) \implies x(2f(x)-1) = -f(x) \implies x = \frac{-f(x)}{2f(x)-1}$
En conclusión:
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-2x}$$

Problema 213 Resolver:

1. Encuentra el dominio de la función
$$f(x) = \frac{(x+5)\sqrt{x-2}}{x-2}$$
Solución:
Observando la función nos damos cuenta rápidamente que hay una raiz cuadrada, y por tanto, para que existan soluciones reales debe de ser $x-2 \geq 0 \implies x \geq 2$.
Por otra parte el único valor que anula el denominador es $x-2 = 0 \implies x=2$, podemos concluir con que el dominio de la función será: $(2,+\infty)$

2. Si $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ calcular $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$
Solución:
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x-1+1 = x$
$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1)) = \sqrt{x^2+1-1} = x$

3. Sea $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ en el dominio $D = (1, +\infty)$, calcular $f^{-1}(x)$
   Solución:
   $f(x) = \frac{3x}{x-1} \Longrightarrow (x-1)f(x) = 3x \Longrightarrow xf(x) - f(x) = 3x \Longrightarrow xf(x) - 3x = f(x) \Longrightarrow x(f(x) - 3) = f(x) \Longrightarrow x = \frac{f(x)}{f(x)-3}$ En conclusión:
   $$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-3}$$

3.5 Continuidad y Derivabilidad (Teoremas)

Problema 214 1. Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$$

Solución:
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2-7})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} =$$
$$= \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)} = \frac{8}{\sqrt{9}+3} \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \frac{4}{3}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función
   $f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R
   Solución:
   Vamos a calcular los límites laterales:
   $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$
   $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$
   Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
   $2 - k^2 = k \Longrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \quad k = -2$

Problema 215 1. Encuentra los valores de k para los que la función
$f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:
Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$2 - k^2 = k \implies k^2 + k - 2 = 0 \implies k = 1 \quad k = -2$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} & -2 \leq x \leq 0 \\ 5 & \text{si} & x = 0 \\ x + 3 & \text{si} & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = -2, \text{ y en } x = 0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2} + 3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (x + 3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \implies$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 216 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^3-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array}\right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a+b = 2a+3 \\ \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 217 Encuentra los valores de k para los que la función
$f(x) = \begin{cases} 2x-k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x-k^2) = 2-k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$2-k^2 = k \Longrightarrow k^2+k-2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \quad k = -2$

Problema 218 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < -2 \\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} & -2 \le x \le 0 \\ 5 & \text{si} & x = 0 \\ x+3 & \text{si} & x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x=-2, \text{ y en } x=0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x+3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 219 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si} & x < 0 \\ ax+b & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\ x^3-1 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 220 Calcular

1. Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcr} x^2 + 2 & \text{si} & x < -1 \\ ax + b & \text{si} & -1 \le x \le 2 \\ x^3 + 1 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Solución:

- En $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = -a + b \end{array}\right. \Longrightarrow -a + b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow 2a + b = 9 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

Tenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} -a+ & b = & 3 \\ 2a+ & b = & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array}\right.$$

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 5$ en todo R.

Problema 221 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si} & x \le 2 \\ & & \\ ax^3 + bx^2 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \Longrightarrow 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{rcl} 3ax - b & \text{si} & x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \Longrightarrow 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rr} 2a + 6b & -1 = 0 \\ 6a + 5b & = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{26} \\ \\ b = \dfrac{3}{13} \end{array}\right.$$

Problema 222 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si} & x \le 2 \\ \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 = \dfrac{4a + 4b + 1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{4a + 4b + 1}{2} = 8a + 4b - 1 \Longrightarrow 12a + 4b - 3 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$2a + b = 12a + 4b \Longrightarrow 10a + 3b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 12a + 4b & -3 = 0 \\ 10a + 3b & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ \\ b = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Problema 223 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$

Luego $-a + 2b - 2 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \Longrightarrow a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 224 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(2x^2 - ax + b) = 2 - a + b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(ax^2 - bx + 1) = a - b + 1$$

Luego $2a - 2b - 1 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4 - a, \quad f'(1^+) = 2a - b \Longrightarrow 3a - b - 4 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} 2a - 2b - 1 = 0 \\ 3a - b - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{4} \\ \\ b = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Problema 225 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f: R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} & x < 0 \\ ax + b & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{cases} \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 226 Halla los valores de a y de b para que sea derivable y continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 + ax + b & \text{si} & x \le 0 \\ \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Tenemos que estudiar la continuidad, y para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplir

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} (x^2 + ax + b) = b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$f(0) = b$$

Luego $b = 1$

Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto. Para que sea derivable debe de cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$

Para calcular $f'(0^-)$ calculamos la derivada de la rama correspondiente y sustituimos $x = 0$

$$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(0^-) = a$$

Para calcular $f'(0^+)$ calculamos la derivada de esta rama empleamos límites, hay que tener en cuenta que $f(0) = b = 1$

$$f'(0^+) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+h)-h}{h^2}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{2h}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-(1+h)}{2h(1+h)}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-h}{2h+2h^2}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{-1}{2+4h}=-\frac{1}{2}$$

Para que sea derivable $f'(0^-)=f'(0^+)\Longrightarrow a=-\frac{1}{2}$

Por tanto $b=1$ y $a=-\frac{1}{2}$

3.6 Integrales

3.6.1 Sustitución

Problema 227 Comprueba el valor de las siguientes integrales resolviéndolas por sustitución:

1. $\displaystyle\int(5x^2+1)^2(10x)dx=\frac{(5x^2+1)^3}{3}+C$
2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}dx=\frac{2(x^3+1)^{3/2}}{9}+C$
3. $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+C$
4. $\displaystyle\int\sec 2x\tan 2x dx=\frac{1}{2\cos 2x}+C$
5. $\displaystyle\int\tan^2 x\sec^2 x dx=\frac{\tan^3 x}{3}+C$
6. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\sin x}+C$
7. $\displaystyle\int(1+2x)^4 2dx=\frac{(2x+1)^5}{5}+C$
8. $\displaystyle\int(x^2-1)^3 2xdx=\frac{(x^2-1)^4}{4}+C$
9. $\displaystyle\int x^2(x^3-1)^4dx=\frac{(x^3-1)^5}{15}+C$
10. $\displaystyle\int x(1-2x^2)^3dx=-\frac{(2x^2-1)^4}{16}+C$
11. $\displaystyle\int x(x^2-1)^7dx=\frac{(x^2-1)^8}{16}+C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3-1)^2}dx = \frac{1}{3(1-x^3)} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 4\sqrt{x^2+1} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{6x}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{3}{2(x^2+1)^2} + C$

15. $\displaystyle\int 5x\sqrt[3]{1+x^2}dx = \frac{15(x^2+1)^{4/3}}{8} + C$

16. $\displaystyle\int 3(x-3)^{5/2}dx = \frac{6(x-3)^{7/2}}{7} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{-3}{\sqrt{2x+3}}dx = -3\sqrt{2x+3} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3}dx = -\frac{1}{(x^2+3x+7)^2} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+2x-3)} + C$

20. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+2}dx = \frac{(x^4+2)^{3/2}}{6} + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + C$

22. $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{4x^3+6x^2+4x+1}{4x^4} + C$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx = -\frac{1}{3(x^3+1)} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{2\sqrt{x^3+1}}{3} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{x+2x^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2x^{3/2}(6x+5)}{15} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{(3x)^2}dx = -\frac{1}{9x} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}}dx = \sqrt{2x} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2}dx = -\frac{1}{3x} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}(x^2+5x+35)}{5} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{x^{5/2}+5x1/2}{x^{5/2}}dx = \frac{x^2-5}{x} + C$

33. $\displaystyle\int x^2\left(x-\frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2(x^2-4)}{4} + C$

34. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x^2}\right)dx = \frac{x^4}{14} - \frac{1}{4x} + C$

35. $\displaystyle\int (9-x)\sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}(15-x)}{5} + C$

36. $\displaystyle\int 2\pi x(8-x^{3/2})dx = \frac{4\pi x^2(14-x^{3/2})}{7} + C$

37. $\displaystyle\int (2x-1)^2dx = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$

38. $\displaystyle\int x(x^2-1)^2dx = \frac{(x^2-1)^3}{6} + C$

39. $\displaystyle\int x\sqrt{x-3}dx = \frac{2(x+2)(x-3)^{3/2}}{5} + C$

40. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{(2x+1)^{3/2}(3x-1)}{15} + C$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8)}{105} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}dx = \frac{2\sqrt{x+3}(2x-15)}{3} + C$

43. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx = \frac{\sqrt{2x-1}(3x^2+2x-13)}{15} + C$

44. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x+2}dx = \frac{2(x+2)^{3/2}(35x^2-60x^2+96x-128)}{315} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}dx = -2\sqrt{x+1} - x + C$

46. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \frac{3(x+1)^{4/3}(4x-3)}{28} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}}{3} + C$

48. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{2-x}dx = -\frac{2(2-x)^{3/2}(x+3)}{5} + C$

49. $\displaystyle\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$

50. $\displaystyle\int x\sin x^2 dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$

51. $\displaystyle\int x\cos x^2 dx = \frac{\sin x^2}{2} + C$

52. $\displaystyle\int \cos 6x dx = \frac{\sin 6x}{6} + C$

53. $\displaystyle\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \csc^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = -2\cot\left(\frac{x}{2}\right) + C$

55. $\displaystyle\int \sec(1-x)\tan(1-x)dx = -\frac{1}{\cos(x-1)} + C$

56. $\displaystyle\int \sin 2x\cos 2x dx = -\frac{\cos 4x}{8} + C$

57. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$

58. $\displaystyle\int \csc 2x\cot 2x dx = -\frac{1}{2\sin 2x} + C$

59. $\displaystyle\int \cot^2 x dx = -(x+\cot x) + C$

60. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$

61. $\displaystyle\int \tan^4 x\sec^2 x dx = \frac{\tan^5 x}{5} + C$

62. $\displaystyle\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x dx = -\frac{2(\cot x)^{3/2}}{3} + C$

3.6.2 Partes

Problema 228 Comprueba el valor de las siguientes integrales resolviéndolas por partes:

1. $\displaystyle\int xe^2 dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$
2. $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx = \frac{(2x^2-2x+1)e^{2x}}{4} + C$
3. $\displaystyle\int xe^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$
4. $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$
5. $\displaystyle\int xe^{-2x} dx = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + C$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x} + C$
7. $\displaystyle\int x^3 \ln x dx = \frac{(4\ln x - 1)x^4}{16} + C$
8. $\displaystyle\int x^2 \ln x dx = \frac{(3\ln x - 1)x^3}{9} + C$
9. $\displaystyle\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -e^{1/x} + C$
11. $\displaystyle\int x\ln(x+1) dx = \frac{2(x^2-1)\ln(x+1) - x(x-2)}{4} + C$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + C$
13. $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx = x((\ln x)^2 - 2\ln x + 2) + C$
14. $\displaystyle\int \ln 3x \, dx = x(\ln x - 3) + C$
15. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$
16. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx = \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2(x^2+1)} + C$

19. $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2(x-1)^{3/2}(3x+2)}{15} + C$

20. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2(x-1)^{3/2}(15x^2+12x+8)}{105} + C$

21. $\displaystyle\int (x^2-1)e^x dx = e^x(x^2-2x+1) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{\ln 2x}{x^2}dx = -\frac{\ln 2x + 1}{x} + C$

23. $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx = \frac{2(3x-4)\sqrt{3x+2}}{27} + C$

25. $\displaystyle\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + C$

26. $\displaystyle\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x + C$

27. $\displaystyle\int x\sec^2 x dx = \ln(\cos x) + x\tan x + C$

28. $\displaystyle\int x\sec x\tan x dx = \frac{x}{\cos x} - \ln\left(\tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)\right) + C$

29. $\displaystyle\int \arcsin 2x dx = \frac{2x\arcsin 2x + \sqrt{1-4x^2}}{2} + C$

30. $\displaystyle\int \arccos x dx = -\frac{2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} - x\pi}{2} + C$

31. $\displaystyle\int \arctan x dx = \frac{2x\arctan x - \ln(x^2+1)}{2} + C$

32. $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{2}\, dx = x\arctan\frac{x}{2} - \ln(x^2+4) + C$

33. $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{(2\sin x - \cos x)e^{2x}}{5} + C$

34. $\displaystyle\int e^x\cos 2x\, dx = \frac{(2\sin 2x + \cos 2x)e^x}{5} + C$

35. $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx = \frac{\sin 2x - 2x\cos 2x}{4} + C$

36. $\displaystyle\int x\arcsin x^2 dx = \frac{x^2\arcsin x^2 + \sqrt{1-x^4}}{2} + C$

37. $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx = \frac{(\sin x - \cos x)e^x}{2} + C$

38. $\displaystyle\int x^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}(9x^2 - 6x + 2)}{27} + C$

39. $\displaystyle\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x + C$

40. $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx = 2\arctan x + x\ln(x^2+1) - 2x + C$

41. $\displaystyle\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx = \frac{2(x+1)(2x-3)^{3/2}}{5} + C$

42. $\displaystyle\int x\sqrt{4+x}\,dx = \frac{2(3x-8)(x+4)^{3/2}}{15} + C$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2+4}}{3} + C$

44. $\displaystyle\int x\sqrt{4-x}\,dx = -\frac{2(3x+8)(4-x)^{3/2}}{15} + C$

3.6.3 Racionales

Problema 229 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-9}\,dx = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx = \ln|x+3| + C$

5. $\displaystyle\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{3\ln|2x-1| - 4\ln|x+1|}{2} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x^4(x^2-1)| - 7\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}\,dx = \ln\left|\frac{(x-2)^5}{x^3(x+2)}\right| + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}\,dx = \ln|(x-1)(x+2)| + \frac{x^2}{2} - x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{(x-4)^3}{x+2}\right| + 2x^2\right) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-4)^3}{x}\right| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}\,dx = \ln|x^3(x+1)| + \frac{1}{x} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx = 6\ln|x-1| - \frac{8x-7}{2(x-1)^2} + \frac{x^2}{2} + 3x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{4x^2-1}{2x(x^2+2x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^5}{x}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-6x+9}\,dx = 3\ln|x-3| - \frac{3x}{x-3} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^3}\,dx = 3\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{4x-11}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx = -\ln\left|\frac{x}{x^2+1}\right| + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-2x^2-8}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\right) + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2(x^2+4)} + C$

21. $\displaystyle\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)^4}{x^2-2x+3}\right| + C$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x\right) - \frac{1}{2(x^2+2)} + C$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x^2-4|\right) - \frac{x^2}{x^2-4} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2+5}{x^3-x^2+x+3}\,dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(x-1)\right) + \ln|x+1| + C$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\right) - \frac{1}{2(x^2+3)} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+14}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|x^2+4| + 4\ln|x-2| + C$

28. $\displaystyle\int \frac{x(2x-9)}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx = 2\ln|x-2| + \frac{x+3}{(x-2)^2} + C$

29. $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3-x^2-x-2}\,dx = -\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(2x+1)\right) + \frac{\ln|x^2+x+1|}{2} +$

$+\ln|x-2| + C$

30. $\displaystyle\int \frac{-x^4+5x^3-9x^2+3x-6}{x^5-x^4-x+1}\,dx = \arctan x + 2\ln|x-1| - 3\ln|x+1| +$

$\displaystyle + \frac{2}{x-1} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{3}{2x^2+5x+2}\,dx = \ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| + C$

34. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{x} - 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + C$

35. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3-x^2+5x+1}{x^5+x^4+x^3-x^2-2}\,dx = 3\arctan(x+1) - \arctan x + \ln|x-1| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\,dx = x - \ln|x^2+x+1| + C$

37. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)}\, dx = -\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right| + C$

hacer el cambio $u = \cos x$.

38. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + 1\right| + C$

hacer el cambio $u = \cos x$.

39. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)}\, dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{e^x + 1}{e^x + 4}\right| + C$

hacer el cambio $u = e^x$.

40. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)(e^x - 1)}\, dx = -\frac{1}{2}\arctan e^x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x} + 1}\right| + C$

hacer el cambio $u = e^x$.

41. $\displaystyle\int \frac{3\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2}\, dx = \ln\left|\frac{1 - \sin x}{\sin x + 2}\right| + C$

hacer el cambio $u = \sin x$.

3.6.4 Trigonométricas

Problema 230 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}\, dx = \frac{1}{3}\arcsin(3x) + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{2} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{9 + x^2}\, dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}\, dx = \text{arcsec}(2x) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{4 + (x - 1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x - 1}{2}\right) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{x^3}{3} - x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx = \arcsin(x+1) + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,dx = \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}\,dx = \frac{1}{4}\text{arcsec}\frac{x^2}{2} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{\arctan^2 x}{2} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-4}}\,dx = \frac{1}{2}\text{arcsec}\left|\frac{x-1}{2}\right| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(\pi\cdot\arcsin x - \arcsin^2 x) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \arcsin(e^x) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\,dx = \arcsin\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{9+(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-3}{3}\right) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{1}{3+(x-2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x-2)}{3}\right) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\arctan(\cos x) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)+C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \arctan(x-1)+C$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)+C$

29. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+6x+13}\,dx = \ln|x^2+6x+13| - 3\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)+C$

30. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}\,dx = \ln|x^2+2x+2| - 7\arctan(x+1)+C$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$

32. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}\,dx = -\sqrt{-x(x+4)}+C$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx = \arcsin(x-1)+C$

34. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \sqrt{x^2-2x}+C$

35. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\sqrt{4x-x^2}+C$

36. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \arctan(\sqrt{x^2-2x})+C$

37. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2+1)+C$

38. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9+8x^2-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-4}{5}\right)C$

39. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-16x^2+16x-3}}\,dx = \frac{1}{4}\arcsin(4x-2)+C$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{9x^2-18x+5}}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{9x^2-18x+5}}{2}\right)+C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1})+C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx = 2\sqrt{x-2} - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3x-6}}{3}\right)+C$

43. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-3}\,dx = 2\sqrt{e^x-3} - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3e^x-9}}{3}\right) + C$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} = 2\arctan\sqrt{x} + C$

3.6.5 Aplicaciones de la Integral Definida

Cálculo de áreas

Problema 231 Comprueba el valor de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx = 1$
2. $\displaystyle\int_2^7 3\,dx = 15$
3. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x-2)\,dx = -\frac{5}{2}$
4. $\displaystyle\int_2^5 (-3x+4)\,dx = -\frac{39}{2}$
5. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2-2)\,dx = -\frac{10}{3}$
6. $\displaystyle\int_0^3 (3x^2+x-2)\,dx = \frac{51}{2}$
7. $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3-9x)\,dx = 0$
9. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-1\right)\,dx = \frac{1}{2}$
10. $\displaystyle\int_0^1 (3x^3-9x+7)\,dx = \frac{13}{4}$
11. $\displaystyle\int_1^2 (5x^4+5)\,dx = 36$
12. $\displaystyle\int_{-3}^3 x^{1/3}\,dx = 4,87+2,81\cdot i$
13. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x}-2)\,dx = -2,875+0,65\cdot i$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{-2}{x}}\, dx = 1,172$

15. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx = -2$

16. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{3}$

17. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x-\sqrt{x}}{3}\, dx = -\frac{1}{18}$

18. $\displaystyle\int_{0}^{2} (2-x)\sqrt{x}\, dx = 1,508$

19. $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^{1/3} - x^{2/3})\, dx = 0,675 + 0,13 \cdot i$

20. $\displaystyle\int_{-8}^{-1} \frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\, dx = -28,56 + 49,46 \cdot i$

21. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\, dx = 2$

22. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{3}$

23. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\, dx = 0$

24. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\, dx = 1$

25. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt[3]{4+x^2}\, dx = 3,619$

26. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx = \frac{1}{2}$

27. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$

28. $\displaystyle\int_{0}^{3} |2x-3|\, dx = \frac{9}{2}$

29. $\displaystyle\int_{0}^{4} |x^2-4x+3|\, dx = 4$

30. $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x^3|\, dx = \frac{1}{2}$

31. $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\,dx = \frac{4}{15}$

32. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{10}{3}$

33. $\displaystyle\int_3^7 x\sqrt{x-3}\,dx = \frac{144}{5}$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx = 0,552$

35. $\displaystyle\int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}\,dx = 43,18$

36. $\displaystyle\int_{-2}^6 x^2\sqrt[3]{x+2}\,dx = 135,77$

37. $\displaystyle\int_1^5 x^2\sqrt{x-1}\,dx = 67,505$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = 1$

39. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{2}{3}\,x\right)\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

40. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x+\cos x)\,dx = 0,819$

41. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 1,464$

42. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 1,464$

43. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \csc 2x \cot 2x\,dx = 0,5$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{8}$

45. $\displaystyle\int_0^1 \sec(1-x)\tan(1-x) = 0,851$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\pi}{4}$

Problema 232 Calcular el área de las siguientes gráficas en los intervalos indicados:

1. $y = x - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Solución: $\dfrac{1}{6}$.
2. $y = -x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $[-1, 3]$. Solución: $\dfrac{32}{3}$
3. $y = 1 - x^4$ en el intervalo $[-1, 1]$. Solución: $\dfrac{8}{5}$.
4. $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 2]$. Solución: $\dfrac{1}{2}$.
5. $y = \sqrt[3]{2x}$ en el intervalo $[0, 4]$. Solución: 6.
6. $y = (3 - x)\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 3]$. Solución: $4,157$.
7. $y = \cos \dfrac{x}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
8. $y = x + \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: $6,935$.
9. $y = 2 \sin x + \sin 2x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 4.
10. $y = \sin x + \cos 2x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
11. $y = 4 - x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$. Solución: $\dfrac{32}{3}$.
12. $y = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Solución: $\dfrac{1}{3}$.
13. $y = x\sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$. Solución: $\dfrac{8}{3}$.
14. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ en el intervalo $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. Solución: 3.
15. $y = x - 2\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 4]$. Solución: $-\dfrac{8}{3}$.
16. $y = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$ en el intervalo $[0, 2]$. Solución: $\dfrac{2}{3}$.
17. $y = \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Solución: 2.
18. $y = \cos \pi x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Solución: $\dfrac{1}{\pi}$.

Problema 233 Calcular el área de cada una de las regiones siguientes, en los contornos indicados:

1. $y = 3x^2 + 1$ entre $x = 0,\ x = 2,\ y = 0$. Solución: 10.
2. $y = 1 + \sqrt{x}$ entre $x = 0,\ x = 4,\ y = 0$. Solución: $\frac{28}{3}$.
3. $y = x^3 + x$ entre $x = 2,\ y = 0$. Solución: 6.
4. $y = -x^2 + 3x$ entre $y = 0$. Solución: $\frac{9}{2}$.

Cálculo de áreas entre Funciones

Problema 234 Calcular el área encerrada entre las siguientes gráficas:

1. $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = 0$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 2x + 5$
3. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$
4. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$
5. $f(x) = 3(x^3 - x)$, $g(x) = 0$
6. $f(x) = (x - 1)^3$, $g(x) = x - 1$
7. $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 0$
8. $f(x) = 3 - 2x - x^2$, $g(x) = 0$
9. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 3x + 3$
10. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x + 2$
11. $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 0$
12. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 0$, $x = 1$, $x = 5$
13. $f(x) = 3x^2 + 2x$, $g(x) = 8$
14. $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$, $g(x) = x^2$
15. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x) = -2x$, $x = 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x$
17. $f(x) = \sqrt{3x} + 1$, $g(x) = x + 1$

18. $f(x) = x^2 + 5x - 6$, $g(x) = 6x - 6$
19. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 3 + 4x - x^2$
20. $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 2x^2$
21. $f(y) = y^2$, $g(y) = y + 2$
22. $f(y) = y(2 - y)$, $g(y) = -y$
23. $f(y) = y^2 + 1$, $g(y) = 0$, $y = -1$, $y = 2$
24. $f(y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - y^2}}$, $g(y) = 0$, $y = 3$
25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -x^2 + 4x - 2$, $x > 0$
26. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2x + 1$
27. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$
28. $f(x) = 2$, $g(x) = \sec x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
29. $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = \tan x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
30. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos x$, $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{6}$
31. $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$
32. $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$
33. $f(x) = xe^{x^2}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$
34. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$
35. $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 3$
36. $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 4$

Calcular la longitud del arco de curva en el intervalo correspondiente:

1. $y = \dfrac{2}{3}\, x^{3/2} + 1, \;\; x \in [0, 1]$
2. $y = x^{3/2} - 1, \;\; x \in [0, 4]$

3. $y = \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{1}{4x^2}, \ \ x \in [1, 2]$
4. $y = \dfrac{3}{2}x^{2/3}, \ \ x \in [1, 8]$
5. $y = \dfrac{x^5}{10} + \dfrac{1}{6x^3}, \ \ x \in [1, 2]$
6. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \ \ x \in [0, 2]$

Longitud de un arco de curva

Problema 235 Plantear la integral de la longitud de un arco de curva en el intervalo correspondiente:

1. $y = \dfrac{1}{x}, \ \ x \in [1, 3]$
2. $y = x^2, \ \ x \in [0, 1]$
3. $y = x^2 + x - 2, \ \ x \in [-2, 1]$
4. $y = \dfrac{1}{x+1}, \ \ x \in [0, 1]$
5. $y = \sin x, \ \ x \in [0, \pi]$
6. $y = \ln x, \ \ x \in [1, 5]$
7. $x = 4 - y^2, \ \ y \in [0, 2]$
8. $x = \cos y, \ \ y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$
9. $x = e^{-y}, \ \ y \in [0, 2]$
10. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \ \ y \in [0, \dfrac{a}{2}]$

Cálculo de Volúmenes

Problema 236 Calcular el volumen de rotación al girar sobre el eje de abcisas:

1. $y = -x + 1, \ x \in [0, 1]$
2. $y = 4 - x^2, \ x \in [0, 2]$
3. $y = \sqrt{4 - x^2}, \ x \in [0, 2]$
4. $y = x^2, \ x \in [0, 1]$

5. $y = \sqrt{x},\ x \in [1, 4]$
6. $y = \sqrt{4 - x^2},\ x \in [-2, 2]$
7. $y = x^2,\ x \in [0, 1]$
8. $y = 4 - \dfrac{x^2}{2},\ x \in [-2, 2]$

Problema 237 Calcular el volumen de rotación al girar sobre el eje de ordenadas:

1. $y = x^2,\ x \in [0, 2]$
2. $y = \sqrt{16 - x^2},\ x \in [0, 4]$
3. $y = x^{2/3},\ x \in [0, 1]$
4. $x = -y^2 + 4y,\ y \in [1, 4]$

Problema 238 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre el eje indicado:

1. $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$
   (a) del eje x
   (b) del eje y
   (c) de la recta $x = 4$
   (d) de la recta $x = 6$

2. $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 2$
   (a) del eje x
   (b) del eje y
   (c) de la recta $y = 8$
   (d) de la recta $x = 2$
3. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$
   (a) del eje x
   (b) de la recta $y = 6$

4. $y = 6 - 2x - x^2,\ y = x + 6$
   (a) del eje x
   (b) de la recta $y = 3$

Problema 239 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre la recta $y = 4$:

1. $y = x,\ y = 3,\ x = 0$
2. $y = x^2,\ y = 4$
3. $y = \dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$
4. $y = \sec x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$

Problema 240 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre la recta $x = 6$:

1. $y = x,\ y = 0,\ y = 4,\ x = 6$
2. $y = 6 - x,\ y = 0,\ y = 4,\ x = 0$
3. $x = y^2,\ x = 4$
4. $xy = 6,\ y = 2,\ y = 6,\ x = 6$

Problema 241 Calcular el volumen de rotación de una región al girar sobre el eje x:

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$
2. $y = x\sqrt{4 - x^2},\ y = 0$
3. $y = \dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$
4. $y = \dfrac{3}{x+1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 8$

5. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
6. $y = e^{x/2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$
7. $y = \sqrt{\sin x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$
8. $y = \sqrt{\cos x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

3.6.6 Varias y de Selectividad

Problema 242

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
2. $\int \frac{3x^2}{2x^3 - 1}\,dx$
3. $\int e^x \sin e^x\,dx$
4. $\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx$
5. $\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx$
6. $\int 2x^2 e^{x^3 - 1}\,dx$
7. $\int x 2^{x^2 + 1}\,dx$
8. $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 1}\,dx$
9. $\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx$
10. $\int x\sqrt{x^2 - 1}\,dx$

Solución:

1. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$
2. $\int \frac{3x^2}{2x^3 - 1}\,dx = \frac{\ln(2x^3 - 1)}{2} + C$
3. $\int e^x \sin e^x\,dx = -\cos e^x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)+C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

6. $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^3-1}\,dx = \frac{2e^{x^3-1}}{3}+C$

7. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}\,dx = \frac{2^{x^2}}{\ln 2}+C$

8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = \ln|x^2+x-1|+C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx = \frac{2\tan x^3}{3}+C$

10. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}+C$

Problema 243 Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int \left(2x^3-\frac{3}{\sqrt{4x-8}}+\frac{5}{x}\right)\,dx$

2. $\displaystyle\int x(6x^2+1)^{12}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx$

5. $\displaystyle\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx$

6. $\displaystyle\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(2x^3-\frac{3}{\sqrt{4x-8}}+\frac{5}{x}\right)\,dx = \frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{4x-8}+5\ln|x|+C$

2. $\displaystyle\int x(6x^2+1)^{12}\,dx = \frac{(6x^2+1)^{13}}{156} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx = \frac{1}{4(x^2+3x-1)^4} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3+8| + C$

5. $\displaystyle\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx = e^{2x^3-x} + C$

6. $\displaystyle\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx = -\frac{5}{9}\cos(3x^3+2) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3+1) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx = \frac{1}{3}\tan(x^3+3) + C$

Problema 244 Calcular el área que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x + 3$.

Solución:

Primero buscamos los puntos de corte de ambas gráficas, bastará igualarlas:

$$2x^2 + x - 1 = 3x + 3 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \ \ x = -1$$

El área que encierran estas gráficas estará comprendidad entre estos dos puntos y será $\int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\,dx$. Calcularemos la diferencia entre las dos funciones, después su integral definida, y el valor absoluto de este valor será el área pedida

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\,dx = \left.\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -9$$

$$S = |-9| = 9\,u^2$$

Problema 245 Calcular el área que encierran la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^3+8}$$

el eje de abcisas, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

Solución:

Primero tendremos que comprobar si la función corta al eje de abcisas en el intervalo de integración $[0,2]$, para ello hacemos $f(x)=0 \Longrightarrow x=0$, luego la gráfica de la función está o por encima o por debajo del eje de abcisas en todo el intervalo, por tanto, el área será

$$\int_0^2 \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3+8|\Big]_0^2 = \frac{5}{3}\ln 2$$

$$S = \left|\frac{5}{3}\ln 2\right| = \frac{5}{3}\ln 2\ u^2$$

Problema 246 Hallar todas las funciones f cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2+x}$$

indicando el dominio de definición de éstas.
Solución:

- Tenemos que calcular las primitivas de $f'(x)$, como el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, primero dividimos los dos polinomios:

$$\begin{array}{rl}
x^4+0x^3+0x^2+x+1 & \underline{|x^2+x} \\
\underline{-x^4-\ x^3} \qquad\qquad\qquad & x^2-x+1 \\
-x^3+0x^2+x+1 & \\
\underline{+x^3+\ x^2} \qquad\quad & \\
x^2+x+1 & \\
\underline{-x^2-x\quad} & \\
1 &
\end{array}$$

  Tenemos, por tanto, que calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \int\left(x^2-x+1+\frac{1}{x^2+x}\right)dx = \int(x^2-x+1)dx+\int\frac{dx}{x^2+x}$$

$$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{dx}{x(x+1)}$$

  Tendremos que calcular esta última integral, lo haremos por descomposición polinómica:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}\right.$$

  Luego tendremos:

$$\int\frac{x^4+x+1}{x^2+x}dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x) - \ln(x+1) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + C$$

- Ahora calculamos el dominio de estas funciones:
  Como tenemos un logaritmo neperiano podremos decir que el dominio D de esta función sería: $D = \{x \in R$ tales que $\dfrac{x}{x+1} > 0$ y $x \neq -1\}$
  Para hallar esta región tenemos que estudiar el signo de $\dfrac{x}{x+1}$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
signo x	$-$	$-$	$+$
signo $(x+1)$	$-$	$+$	$+$
signo $\frac{x}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

  En conclusión, tendremos que el dominio será:

$$\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$$

Problema 247 Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX. Dibujar el recinto.

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 11 - x \end{array}\right. \Longrightarrow x^2 - 1 = 11 - x \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (3, 8) \\ (-4, 15) \end{array}\right.$$

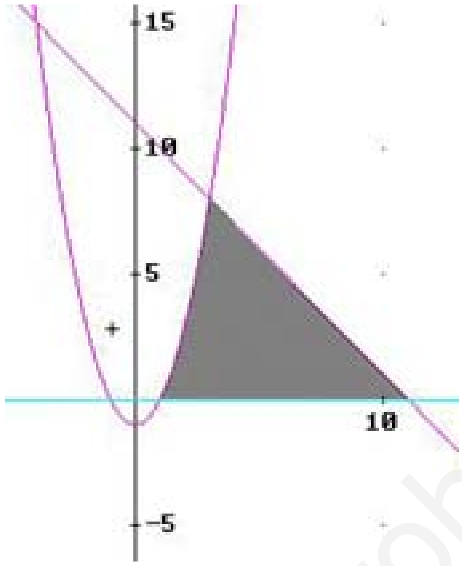
$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1, 0) \\ (-1, 0) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = 11 - x \\ y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow (11, 0)$$

El recinto pedido estará encerrado entre los puntos $(1, 0)$, $(3, 8)$ y $(11, 0)$. Luego el área será:

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)\, dx + \int_3^{11} (11 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 + \left[11x - \frac{x^2}{2}\right]_3^{11}$$

Luego $A = \dfrac{116}{3}\ u^2$



Problema 248 Calcular $\int \dfrac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores

$$x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$$

Empleamos el método de descomposición polinómica

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$$
$$\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \Longrightarrow$$
$$x+1 = A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

Dando valores a x tenemos:

Si $x=0 \Longrightarrow 1=-6A \Longrightarrow A=-\dfrac{1}{6}$

Si $x=2 \Longrightarrow 3=10B \Longrightarrow B=\dfrac{3}{10}$

Si $x=-3 \Longrightarrow -2=15C \Longrightarrow C=-\dfrac{2}{15}$

Sustituyendo estos valores en la integral tenemos

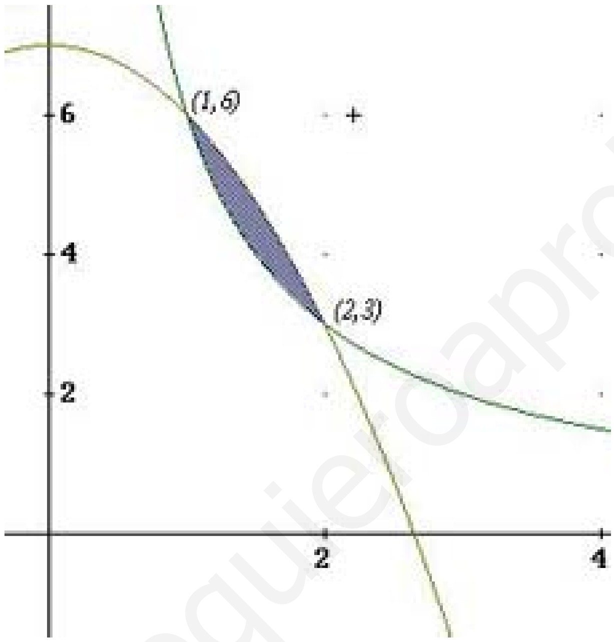
$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int \frac{-1/6}{x}\,dx + \int \frac{3/10}{x-2}\,dx + \int \frac{-2/15}{x+3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + K$$

Problema 249 Calcula el área que tiene el único recinto cerrado y limitado por las gráficas de las funciones $y = -x^2 + 7$ e $y = \dfrac{6}{x}$ (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y = -x^2 + 7 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow -x^2 + 7 = \frac{6}{x} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,6) \\ (2,3) \\ (-3,-2) \end{array}\right.$$

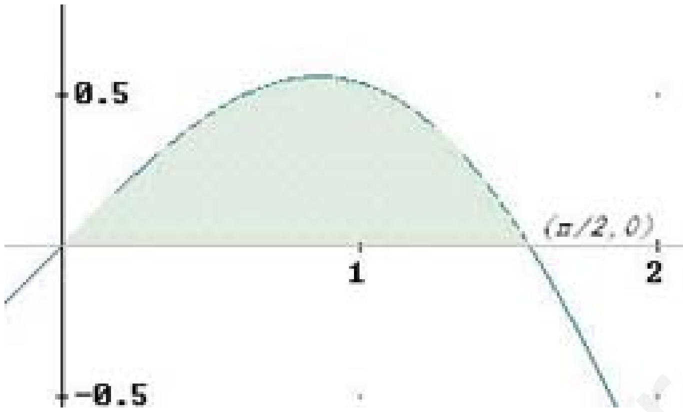
El recinto está comprendido entre los puntos $(1,6)$ y el $(2,3)$.

$$A = \int_1^2 \left(-x^2 + 7 - \frac{6}{x}\right)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x - 6\ln|x|\right]_1^2 = \frac{14}{3} - 6\ln 2\ u^2$$

Problema 250 La gráfica de la curva $y = x\cos x$, cuando $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, y el eje OX limitan una superficie. Determinar el área de esa superficie.

Solución:

La función $y = x\cos x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ es positiva, luego el área



que buscamos es

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx$$

que vamos a resolver por partes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right.$$

$$\int x \cos x \; dx = x \sin x - \int \sin x \; dx = x \sin x + \cos x + C$$

Luego

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \; u^2$$

Problema 251 Calcular integrando por partes, el valor de:

$$\int_1^2 x^2 \ln x \; dx$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^2 \, dx \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x} \; dx \\ \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right.$$

$$\int x^2 \ln x \; dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{3} x^2 \; dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3$$

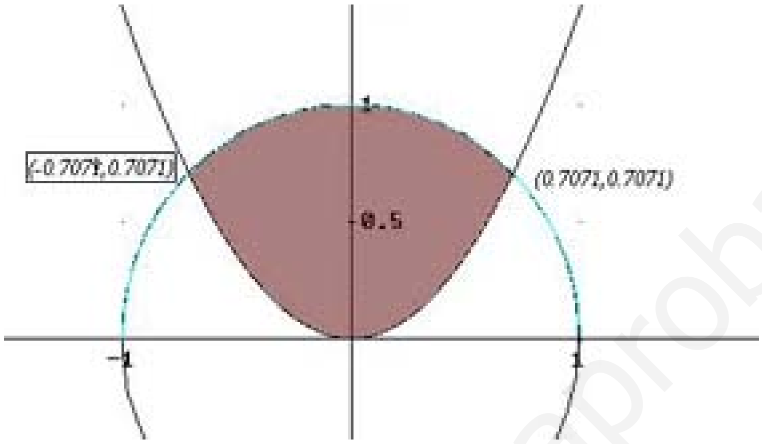
Luego

$$\int_1^2 x^2 \ln x \; dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

Problema 252 Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX (ver dibujo).

Solución:

Calculamos los puntos de corte de estas funciones



$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Luego el punto buscado es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Calculamos las dos integrales independientemente.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\,dx = \left[\sqrt{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}$$

Para resolver la segunda integral hacemos un cambio de variable

$$x = \sin t \Longrightarrow dx = \cos t\;dt$$

Los nuevos límites de integración serán

Si $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$

Si $x = 1 = \sin t \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. Luego

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

El resultado final será:

$$A = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}$$

Problema 253 Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1-2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1-2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

3.7 Representaciones Gráficas

3.7.1 Asíntotas

Problema 254 Hallar, si existen, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones:

1.

$$f(x) = \frac{9x^2+2}{3x+5}$$

Solución:
<u>Verticales:</u>

De existir una asíntota vertical en $x = p$ se deberá de cumplir que $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \infty$. El punto p que buscaríamos sería tal que anularía el denominador: $3x + 5 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{3}$
Tendremos:

$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{5}{3}} \frac{9x^2 + 2}{3x + 5} = \frac{27}{0} = \infty$$

Luego tenemos una asíntota vertical $x = -\frac{5}{3}$

Nos podemos preguntar, el porqué hemos resuelto el límite si habíamos escogido un x que anulaba el denominador. La explicación es porque si ese límite hubíera sido finito o no existíese, estaríamos en la situación de que no habría asíntota.

Horizontales:

De existir una asíntota horizontal en $x = c$ se cumpliría que $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = c$
Calculemos este límite:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x + 5} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9 + \frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x}} = \frac{9}{0} = \infty$$

Podemos concluir con que no hay asíntotas horizontales.
Oblicuas:

Para que la recta $y = ax + b$ sea una asíntota oblicua debe de ser $a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$.
Calculemos estos coeficientes:

$$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2}{3x^2 + 5x} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{9x^2 + 2}{3x + 5} - \frac{9}{3}x) = -5$$

Existe una asíntota oblicua, la recta: $y = \frac{9}{3}x - 5$.

2.

$$g(x) = \frac{x^2}{3 + 2x^2}$$

Solución:

Verticales:
Veamos si se anula el denominador:$3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = -3 \Longrightarrow$

$x^2 = -\frac{3}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{-\frac{3}{2}}$ y como no existen soluciones reales, al ser la raiz cuadrada de un número negativo, no hay asíntotas verticales.

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{3+2x^2} = \frac{1}{2}$$

Luego existe una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{2}$.

Oblicuas:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{3x+2x^3} = 0$$

Luego la función no tiene asíntotas oblicuas.

3.7.2 Representaciones

Problema 255 Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

2. $$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$$

3. $$f(x) = 2 - x - x^3$$

4. $$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

5. $$f(x) = 3x^2 - 9x + 1$$

6. $$f(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$$

7. $$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

8.
$$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + 2$$

9.
$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

10.
$$f(x) = 3x^4 - 6x^2$$

11.
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$$

12.
$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5$$

13.
$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$$

14.
$$f(x) = x^5 + 1$$

15.
$$f(x) = x^5 - 5x$$

16.
$$f(x) = (x-1)^5$$

17.
$$f(x) = |2x - 3|$$

18.
$$f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

19.
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

20.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

21.

$$f(x) = 3x^{2/3} - 2x$$

22.

$$f(x) = 3x^{2/3} - x^2$$

23.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$$

24.

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+15}}$$

25.

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{18}\sin 3x \quad 0 \le x \le 2\pi$$

26.

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x \quad 0 \le x \le 2\pi$$

27.

$$f(x) = 2x - \tan x \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

28.

$$f(x) = 2x + \cot x \quad 0 < x < \pi$$

29.

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - 3$$

30.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2}$$

31.
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

32.
$$f(x) = \frac{x^2-6x+12}{x-4}$$

33.
$$f(x) = x\sqrt{4-x}$$

34.
$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

35.
$$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

36.
$$f(x) = x + \frac{32}{x^2}$$

37.
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

38.
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

39.
$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}$$

40.
$$f(x) = \frac{2x^2-5x+5}{x-2}$$

Problema 256 Dada la función:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$$

Calcular:

1. Puntos de corte con los ejes.

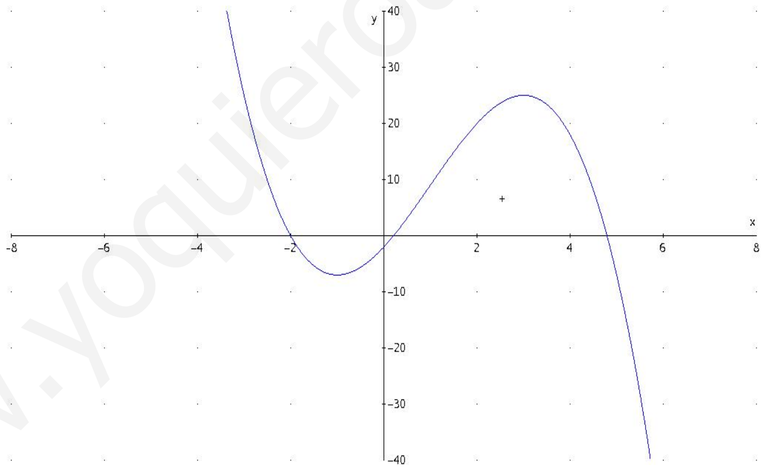
2. Crecimiento y decrecimiento de la función.

3. Máximos y Mínimos.

Solución:

1. Para calcular los puntos de corte con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -2$, es decir, el punto de corte sería $(0, -2)$. Para encontrar los puntos de corte con el eje de abcisas hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^3 + 3x^2 + 9x - 2 = 0$ donde obtenemos las soluciones $x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, $x = -2$ En resumen todos los puntos de corte serían:

$$(0, 2),\ (\frac{5-\sqrt{21}}{2}, 0),\ (\frac{5+\sqrt{21}}{2}, 0),\ (-2, 0)$$



2. Para calcular los intervalos en los que crece y decrece la función buscamos los puntos críticos, es decir, aquellos que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 3,\ x = -1$$

Es decir:$f'(x) = -3(x-3)(x+1)$ y sabemos que la función crece si $f'(x) > 0$ y decrece si $f'(x) < 0$. Veamos la siguiente tabla:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x+1)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-3(x-3)(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	*decrece*	*crece*	*crece*	*decrece*

3. Por lo visto en el apartado anterior Hay un máximo en el punto $x = 3 \Longrightarrow (3,25)$, y hay un mínimo en el punto $x = -1 \Longrightarrow (-1,-7)$. Otra forma de comprobarlo es calculando la segunda derivada:
$f''(x) = -6x + 6 \Longrightarrow f''(3) = -18 + 6 = -12 < 0 \Longrightarrow$ Máximo en $x = 3$.
$f''(x) = -6x+6 \Longrightarrow f''(-1) = 6+6 = 12 > 0 \Longrightarrow$ Mínimo en $x = -1$.

Problema 257 Representar la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

Solución:

- **Dominio**

  El denominador se anula cuando $x - 1 = 0$ luego el dominio será $R - \{1\}$.

- **Puntos de corte**

  Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto de corte.

  Si hacemos $\dfrac{2x^2}{x-1} = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, obtenemos el mismo punto de corte.

- **Simetrías**

  $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{-x-1} \Longrightarrow$ no hay simetrías.

- **Asíntotas**

  1. **Verticales** El denominador se anula cuando $x-1 = 0 \Longrightarrow x = 1$ es la posible asíntota.

     $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{2x^2}{x-1} = \pm\infty$, luego $x = 1$ es una asíntota vertical.

2. **Horizontales** Calculamos el limite de la función cuando $x \longrightarrow \pm\infty$

   $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty$, luego no hay asíntotas horizontales.

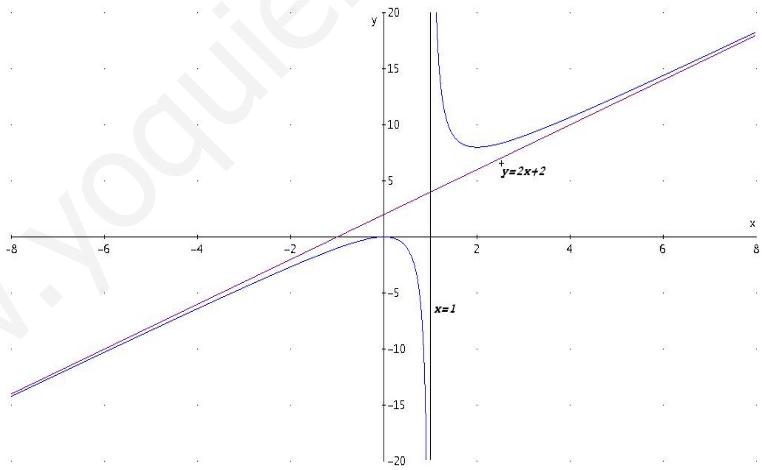
3. **Oblicuas** La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

   $$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2}{x^2-x} = 2$$

   $$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right) =$$

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1}\right) = 2$$

   Luego la asíntota oblicua buscada es $y = 2x + 2$



- **Puntos críticos** Para calcularlos hacemos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2$$

Para comprobar si se trata de un máximos o un mínimos observamos que el denominador de la segunda derivada es siempre positivo. Por tanto, para decidir el signo de $f'(x)$ sólo tenemos que estudiar el numerador.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

En el punto $(0, 0)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo.

En el punto $(2, 8)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo.

Con estos datos tenemos suficiente información para dibujar la gráfica de esta función.

Problema 258 Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$$

1. Estudiar el dominio, simetría y puntos de corte con los ejes de f.
2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. Hallar los puntos críticos, si los hay.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** $R - \{0\}$

   Puntos de Corte:

   - Con el eje de abcisas no hay puntos de corte, ya que al hacer $x = 0$ la función no existe.
   - Para calcular éstos con el eje de ordenadas, hacemos $f(x) = 0$:

   $$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Longrightarrow (-0,3819; 0) \ \ (-2,6180; 0)$$

2. **Asíntotas:**

   - **verticales:**

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \pm\infty$$

   Luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

- **horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$

Luego no hay asíntotas horizontales.

- **oblicuas:**

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = \frac{x^2+3x+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

Luego la recta $y = x+3$ es una asíntota oblicua.

3. **Máximos y Mínimos:** Para calcularlos utilizamos la primera derivada igualada a cero, y decidiremos por el criterio de la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

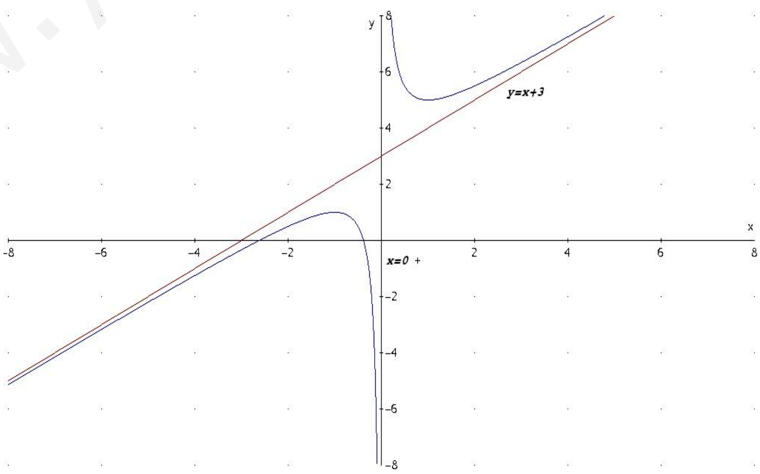
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2-1 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1 \Longrightarrow (1,5),\ (-1,1)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f''(1) = 1 > 0,\ \ f''(-1) = -1 < 0$$

En el punto $(1,5)$ la función tiene un mínimo, mientras que en el $(-1,1)$ tiene un máximo.

4. **Dibujo de la gráfica:**



Problema 259 Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 15}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-5, 3\}$

   (b) **Puntos de Corte:**
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 2(-x) - 15} = \frac{-x^3}{x^2 - 2x - 15} \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 4x - 45)}{(x^2 + 2x - 15)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -9,\ x = 5$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 4x - 45$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 5)$	$(5, +\infty)$
$x + 9$	$-$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

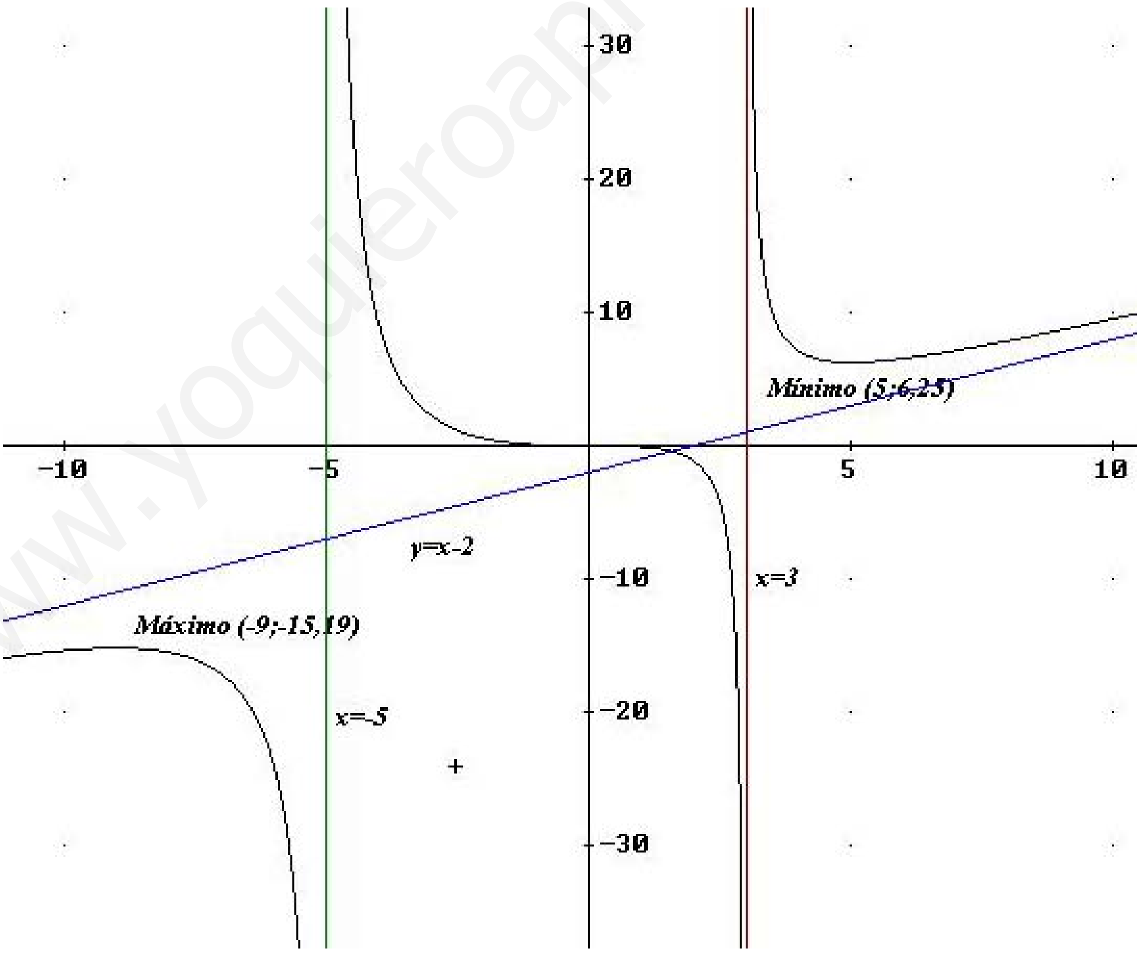
   (e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -9$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-9; -15, 19)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5; 6, 25)$

2. **Asíntotas:**

- **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^-}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=-\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^+}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=+\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x=-5$$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=-\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=+\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x=3$$



- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\infty\Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2-15x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-nx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-15}-x\right)=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^2+15}{x^2+2x-15}=-2$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.

Problema 260 Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y la recta $y = 2x + 1$

1. Calcular los extremos relativos de $f(x)$.
2. Estudiar la concavidad de $f(x)$.
3. Dibujar las gráficas de la función, de la recta, y señalar el recinto que encierran.
4. Calcular el área de dicho recinto.
5. Calcular la recta tangente y la recta normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

1. **Extremos relativos:**

$$f'(x)=3x^2-2=0\Longrightarrow x=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ x=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(x)=6x\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-2\sqrt{6}<0\Longrightarrow \text{Mínimo}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right)\\ \\ f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}>0\Longrightarrow \text{Máximo}\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right)\end{array}\right.$$

2. **Concavidad:**
Observando la derivada $f''(x) = 6x$ nos damos cuenta que $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y, por tanto, en este intervalo la función será convexa. Por el contrario, $f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, por tanto, en este intervalo la función es cóncava.

3. **Dibujo de las gráficas:**
De la función $f(x)$:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R$

   (b) **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow$

   $$\Longrightarrow (-1,618033988; 0),\ (0,6180339887; 0),\ (1, 0)$$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + 1 = -x^3 + 2x + 1 \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:** No es necesaria

   (e) **Asíntotas:** No hay

   De la recta $y = 2x + 1$:

   Con dos puntos de ella tendremos suficiente, por ejemplo el $(0, 1)$ y el $(-1/2, 0)$.

4. **Cálculo del área:**
Para calcular el área de este recinto calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

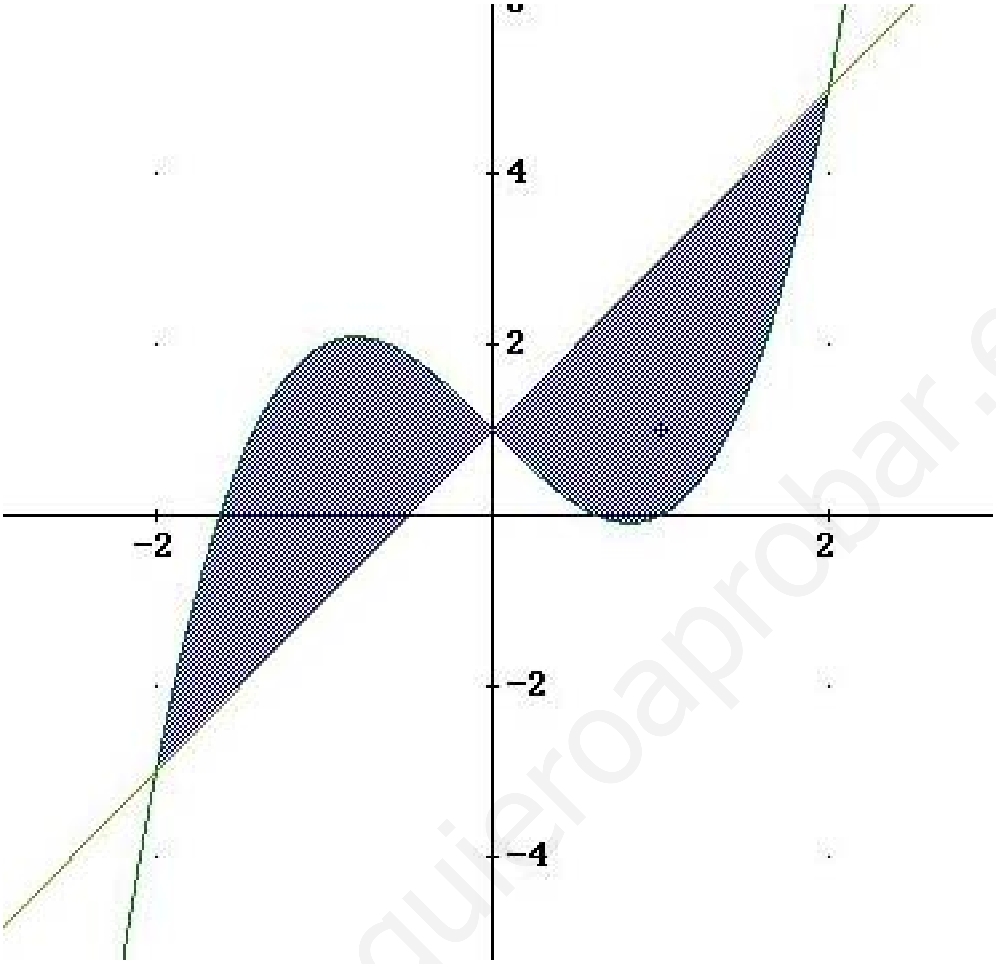
$$x^3 - 2x + 1 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -2,\ x = 2,\ x = 0$$

Tendremos que calcular el área en el intervalo $[-2, 0]$ y luego en el intervalo $[0, -2]$. Calculamos la integral

$$\int (x^3 - 2x + 1 - 2x - 1)\, dx = \int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

En el intervalo $[-2, 0]$:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^{0} = 4$$



En el intervalo $[0, 2]$:

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = -4$$

La razón por la que el área en este caso es negativa es porque la recta está por encima de la función, tendremos que coger su valor absoluto y nos queda:

Área= $|4| + |-4| = 8$ u^2.

5. **Cálculo de la tangente y la normal:** Para calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ calculamos su derivada primera

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Longrightarrow m = f'(2) = 10$$

Por otra parte $f(2) = 5$ y tendremos que la ecuación de la **recta**

tangente es
$$y - 5 = 10(x - 2)$$
y la ecuación de la **recta normal** es
$$y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 2)$$

Problema 261 Sea la función
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 12}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   (a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-4, 3\}$

   (b) **Puntos de Corte:**
   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   (c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar
   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x) - 12} = \frac{-x^3}{x^2 - x - 12} \neq \pm f(x)$$

   (d) **Monotonía:**
   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x - 36)}{(x^2 + x - 12)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -7,08,\ x = 5,08$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 2x - 36$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -7,08)$	$(-7,08, 5,08)$	$(5,08, +\infty)$
$x + 7,08$	$-$	$+$	$+$
$x - 5,08$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

(e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -7,08$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-7,08; -11,43)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5,08$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5,08; 6,94)$

2. **Asíntotas:**

   - **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow -4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -4$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\longrightarrow 4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$

   - **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+x-12} = \infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

   - **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

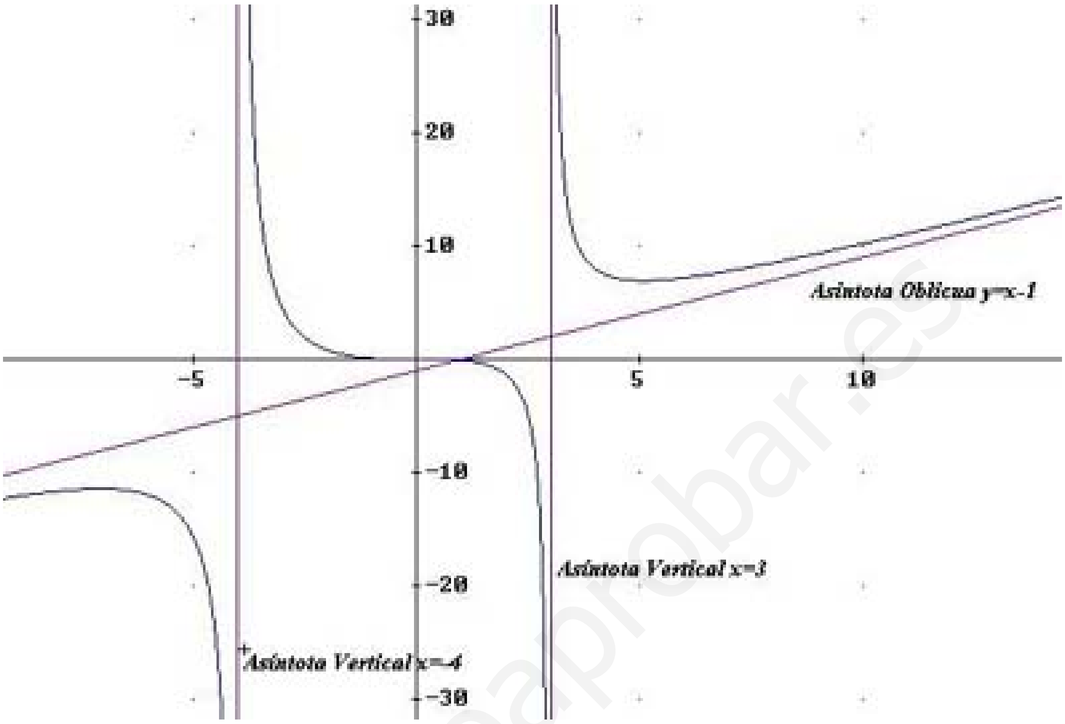
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2-12x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x-12} - x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x^2+12}{x^2+x-12} = -1$$

   La recta $y = x - 1$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 262 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{1\}$
2. Con el eje $OY : x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Con el eje $OX : f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1}$$

   Luego ni es par ni es impar.

4. • **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

• **Horizontales:**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Luego no hay

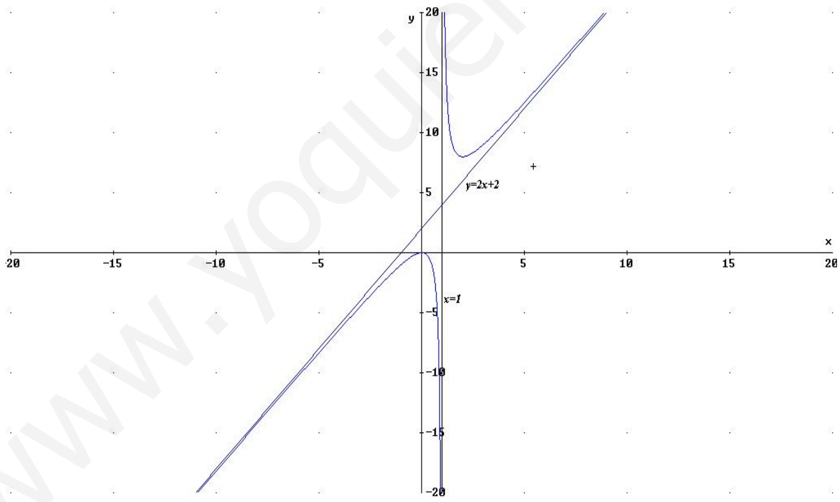
• **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-3} - 2x \right) = 2$$

$$y = 2x + 2$$

5.



Problema 263 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$ Calcular:

1. Dominio.

2. Puntos de corte con los ejes.

3. Simetrías.

4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 3\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (3/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x-3}{(-x)^2+3x}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 3$ y $x = 0$

   $$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

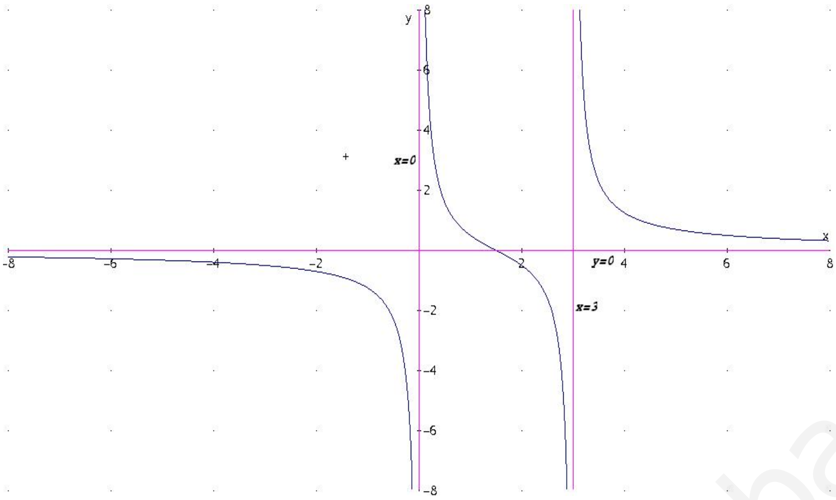
   $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

   - **Oblicuas:** No Hay
5. $$f'(x) = \frac{-2x^2+6x-9}{(x^2-3x)^2} < 0$$

   La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.



6. No tiene.

7.

8.

$$\int_{1}^{3/2} \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx + \int_{3/2}^{2} \frac{2x-3}{x^2-x}\,dx =$$

$$\ln|x^2-3x|\Big]_{1}^{3/2} + \ln|x^2-3x|\Big]_{3/2}^{2} = 2\ln\left(\frac{9}{8}\right) = 0,2355660712$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4}, \quad f(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tangente}: \ y - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}: \ y - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 264 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.

6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

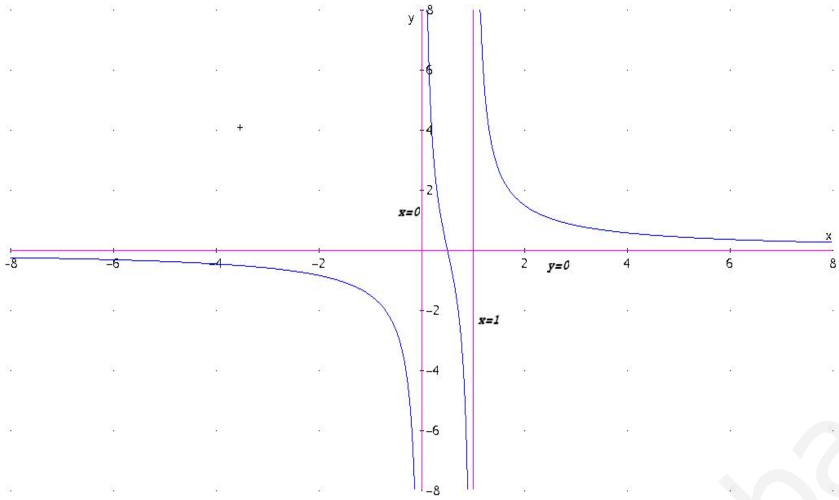
Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 1\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (1/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x - 1}{(-x)^2 - x}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$ y $x = 0$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   - **Horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$
   - **Oblicuas:** No Hay
5. $$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0$$

   La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.
6. No tiene.



7.

8.

$$\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^3 = \ln 3$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4}, \quad f(2) = \frac{3}{2}$$

$$\text{tangente}: \; y - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}: \; y - \frac{3}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 265 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Curvatura y puntos de inflexión
8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{-1, 1\}$
2. Con el eje OY : $(0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3. $$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$$

   Luego es impar.
4. • **Verticales:** $x = 1$ y $x = -1$

   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

   • **Horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$
   Luego no hay

   • **Oblicuas:** $y = mx + n$
   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$
   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = 0$$
   $$y = x$$
5. $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

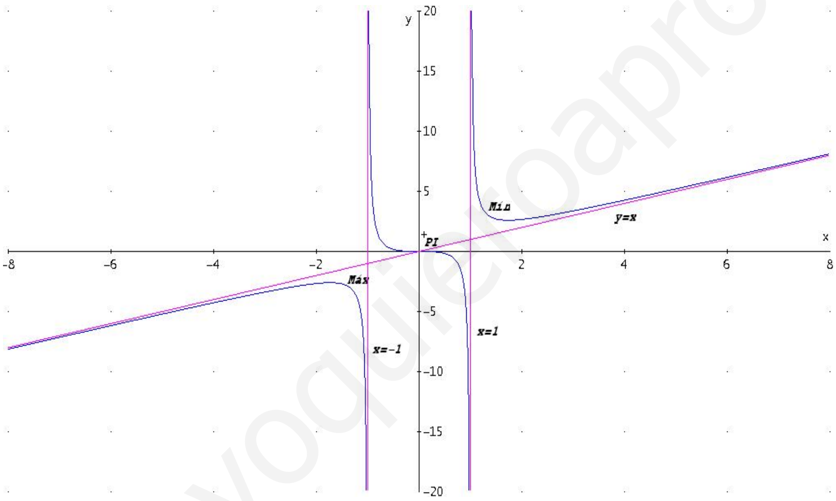
6. Máximo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

   Mínimo en el punto $\left(\sqrt{3}, \dfrac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

7.
$$f''(x) = \frac{x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
cóncava	convexa	cóncava	convexa

   En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión.



Problema 266 Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x-2}$ Calcular:

1. Dominio.

2. Puntos de corte con los ejes.

3. Simetrías.

4. Asíntotas.

5. Monotonia.

6. Máximos y Mínimos.

7. Curvatura y puntos de inflexión

8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{2\}$
2. Con el eje OY : $(0,0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
3. $$f(-x) = \frac{x^2}{-x-2}$$

   Luego no es ni par ni impar.
4. • **Verticales:** $x =$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \frac{16}{0^+} = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty$$

   • **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$$

   Luego no hay

   • **Oblicuas:** $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{4x^2}{x^2-2x} = 4$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{4x^2}{x^2-2x} - 4x\right) = 8$$

   $$y = 4x + 8$$
5. $$f'(x) = \frac{x(4x-16)}{(x-2)^2} = 0$$

$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

6. Máximo en el punto $(0,0)$

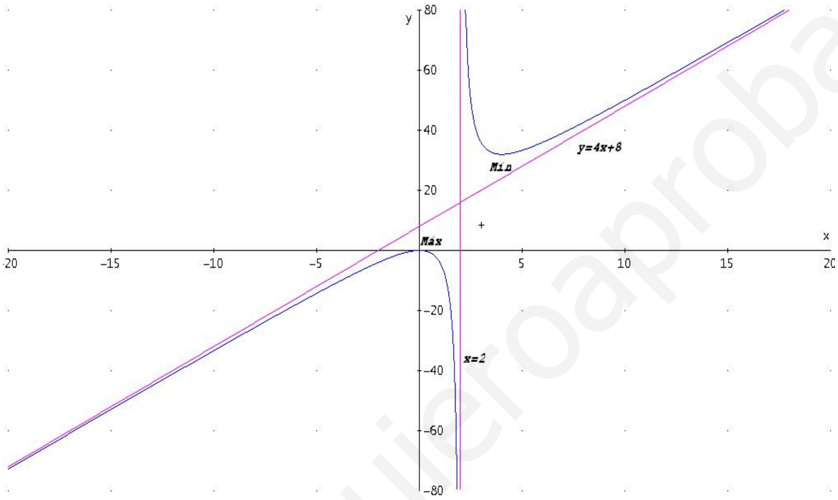
   Mínimo en el punto $(4,32)$

7.

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$
cóncava	convexa

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión, si lo será $x = 0$.



Problema 267 Dada la función $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60 = (x-1)(x+1)(x-5)$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -1$ y $x = 5$

2.

$$f''(x) = 36x^2 - 120x - 12 \Longrightarrow x = 3,43; \;\; x = -0,09$$

$(-\infty, -0,09)$	$(-0,09, 3,43)$	$(3,43, \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 72x - 120 \Longrightarrow f'''(-0,09) \neq 0, \;\; f'''(3,43) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -0.09$ y $x = 3,43$ son puntos de inflexión.

Problema 268 Dada la función $f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = (x+3)(x-1)(x-2)$$

$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -3$ y $x = 2$

2.

$$f''(x) = 12x^2 - 28 \Longrightarrow x = 1,53; \;\; x = -1,53$$

$(-\infty, -1,53)$	$(-1,53; 1,53)$	$(1,53; \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 24x \Longrightarrow f'''(-1,53) \neq 0, \;\; f'''(1,53) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -1,53$ y $x = 1,53$ son puntos de inflexión.

Problema 269 Dada la función $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos. Dibujo aproximado de la gráfica.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. (a) Dominio: La función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ está compuesta por el producto de dos funciones, la función $h(x) = x$ cuyo dominio es todo el eje de abcisas, y la función $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ cuyo dominio está definido por la incuación $4 - x^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación será: $-x^2 \geq -4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En conclusión podemos asegurar que el dominio de la función pedida será el intervalo $[-2, 2]$.

   (b) Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con el eje de abcisas vendrán determinados cuando $f(x) = 0$, es decir, $x\sqrt{4-x^2} = 0$, ecuación que nos produce las soluciones: $x = 0$, $x = 2$, y $x = -2$. Por tanto la gráfica cortará al eje de abcisas en los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y en el $(-2, 0)$. Ahora calculamos los cortes con el eje de ordenadas, es decir, hacemos $x = 0$, lo que nos produce una única solución que ya habíamos obtenido antes, y es el punto $(0, 0)$.

   (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Para ello calculamos la primera derivada, que sería la siguiente:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(4-x^2)^{-1/2}(2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

   Ahora tendremos que ver cuando esta derivada es positiva, es nula, o es negativa. Para ello igualamos la derivada a cero, lo que nos daría lo siguiente:

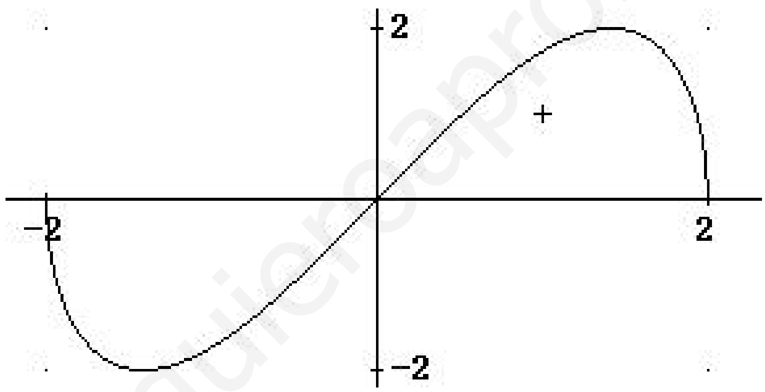
$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow 4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

   Ahora, recordando los puntos de corte con los ejes, el dominio de la función y observando que el denominador es siempre positivo, es fácil comprobar lo que nos piden.
   Entre $x = -2$ y $x = -\sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[-2, -\sqrt{2}]$
   Entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace positivo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
   Entre $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$

(d) A la vista del apartado anterior, está claro que, la función tiene un mínimo en $-\sqrt{2}$ y un máximo en $\sqrt{2}$, resultados que al sustituidos en la función original darían los puntos: Mínimo= $(-\sqrt{2}, -2)$ y Máximo= $(\sqrt{2}, 2)$

(e) Para dibujar la gráfica ordenamos los resultados en una tabla, y los interpretamos cuidadosamente.

x	f(x)	
0	0	
2	0	
-2	0	
$-\sqrt{2}$	-2	Mínimo
$\sqrt{2}$	2	Máximo



2. Los puntos de corte con el ejes de abcisas son -2, 0, 2. La función es impar, es decir, simétrica respecto al origen, esto se aprecia fácilmente en su representación gráfica. Esto último se puede demostrar comprobando $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

Esto quiere decir que el área que encierra la curva entre el punto $(-2, 0)$ y el $(0, 0)$ es igual que el área que encierra la curva entre los puntos $(0, 0)$ y el $(2, 0)$. Por tanto bastará con calcular una de estas áreas y multiplicar por 2.

$$A = 2\int_0^2 f(x) = 2\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}dx$$

Resolveremos por sustitución.
$u = 4 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$ y sustituyendo nos

queda la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{u^{3/2}}{3} + C$$

y deshaciendo el cambio de variable nos quedaría:

$$A = 2\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{4^{3/2}}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

Problema 270 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.
Solución:

1. D=$\{x \in R$ tales que $x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
   $x = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.

   (b) Puntos de corte con el eje X:
   $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje Y.

4. $$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

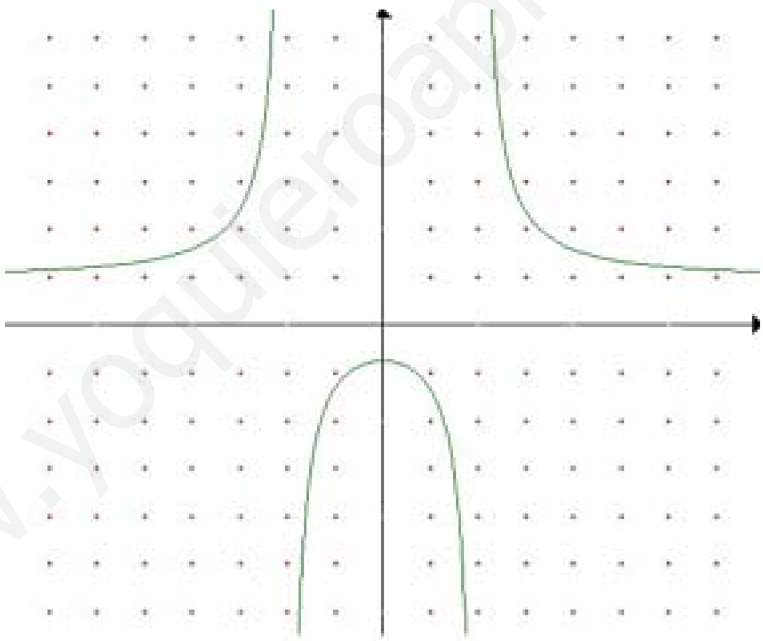
   Como $(x^2-4)^2 \geq 0$ para cualquier x, bastará estudiar el signo del numerador:

   (a) Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente.
   (b) Si $x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

   En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \Longrightarrow -14x = 0 \Longrightarrow x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:



   Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$.

Problema 271 Responda a las siguientes cuestiones referidas a la curva

$$y = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

Se pide:

1. Dominio de definición.
2. Simetría.
3. Cortes a los ejes.
4. Asíntotas.
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Máximos y mínimos.
7. Representación aproximada.

Solución:

1. El dominio será toda la recta real, excepto en aquellos puntos el los que se anula el denominador, dicho de otra manera será $D = \{x \in R;\ x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$

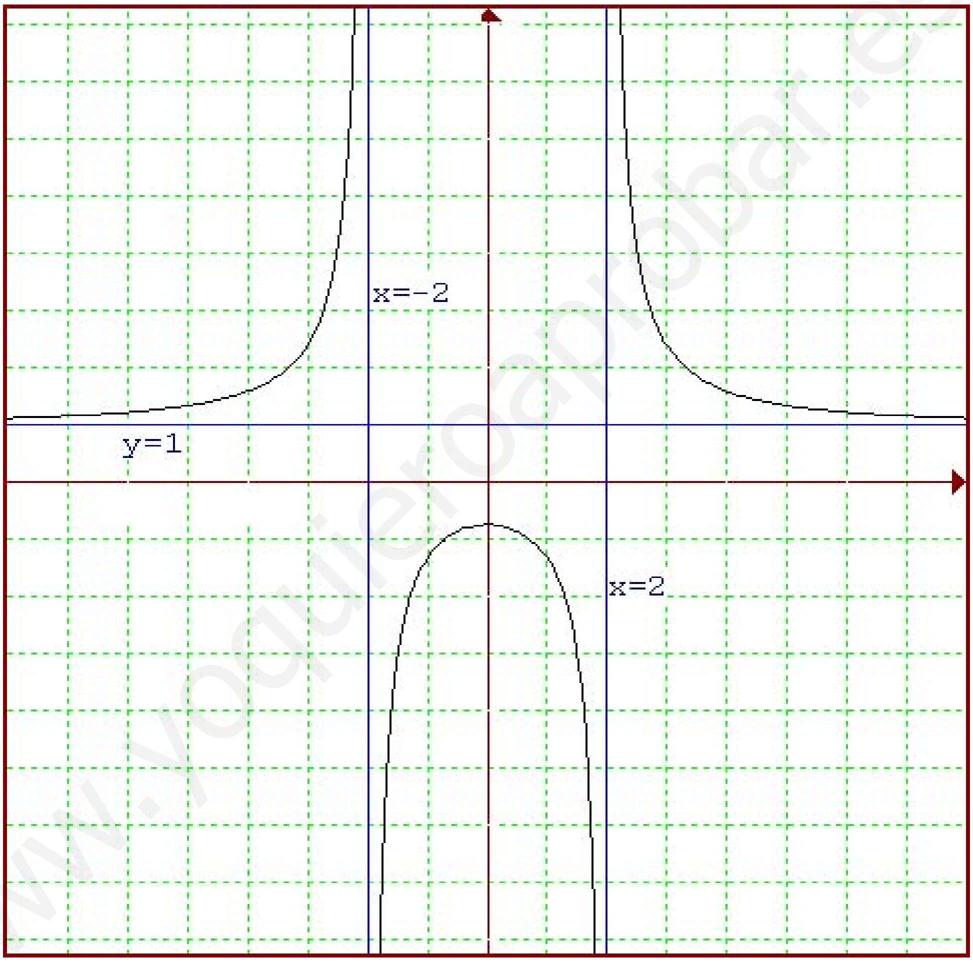
2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = f(x)$
   Luego la función es par, y por tanto simétrica respecto al eje Y.

3. Con el eje X hacemos $y = 0$ y nos queda:
   $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Longrightarrow\ x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje X.
   Con el eje Y hacemos $x = 0$ y nos queda:
   $f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$.

4. Asíntotas:

   - Verticales:
     $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = 2$ es una asíntota vertical
     $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = \infty \Longrightarrow x = -2$ es una asíntota vertical

   - Horizontales:
     $y = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 \Longrightarrow\ y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - Oblicuas:
     $y = ax + b$ es una asíntota oblicua, entoces $a = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 + 3}{x(x^2 - 4)} = 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas oblicuas.



x=-2
y=1
x=2

5. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calcularemos la primera derivada:

$$y' = -\frac{14x}{(x^2-4)^2}$$

   Para que exista un punto crítico imponemos que $y' = 0$ y nos queda:

$$\frac{14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow 14x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

   Analizamos el signo de y':

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
signo y'	$+$	$+$	$-$	$-$
y	**creciente**	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**

   En resumen:

   - La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$
   - La función decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

6. Observamos que en el punto de abcisa $x = 0$ la curva pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, en el punto $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ tiene un máximo.

7. Representación gráfica:

Problema 272 Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

1. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

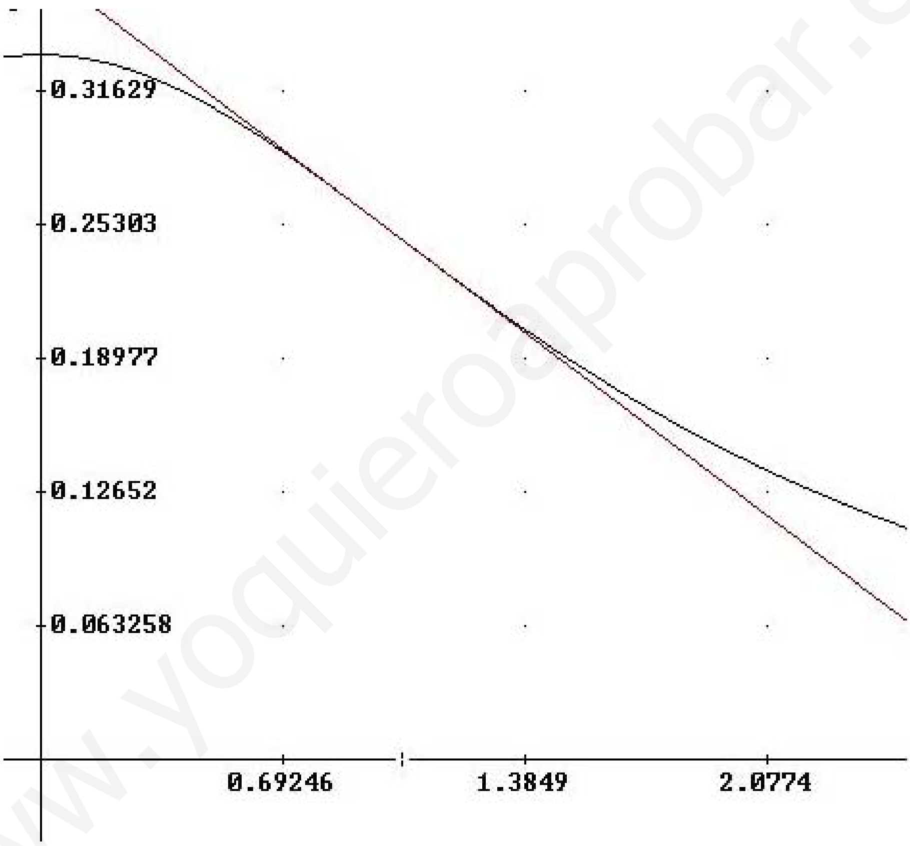
2. Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

1. Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$


0.31629
0.25303
0.18977
0.12652
0.063258
0.69246
1.3849
2.0774

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

2. El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

Problema 273 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\ \\ \frac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

1. (Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:

   - Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
   - Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
   - En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

   Calculamos la continuidad:
   La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

   - En $x = -1$:
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = 1$$
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$
   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$
   Luego f es continua en $x = -1$.
   - En $x = 0$:
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
   Luego no es continua en $x = 0$.
   - En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

   - Cuando $x \geq -1$:
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

- Cuando $x < -1$:
  No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

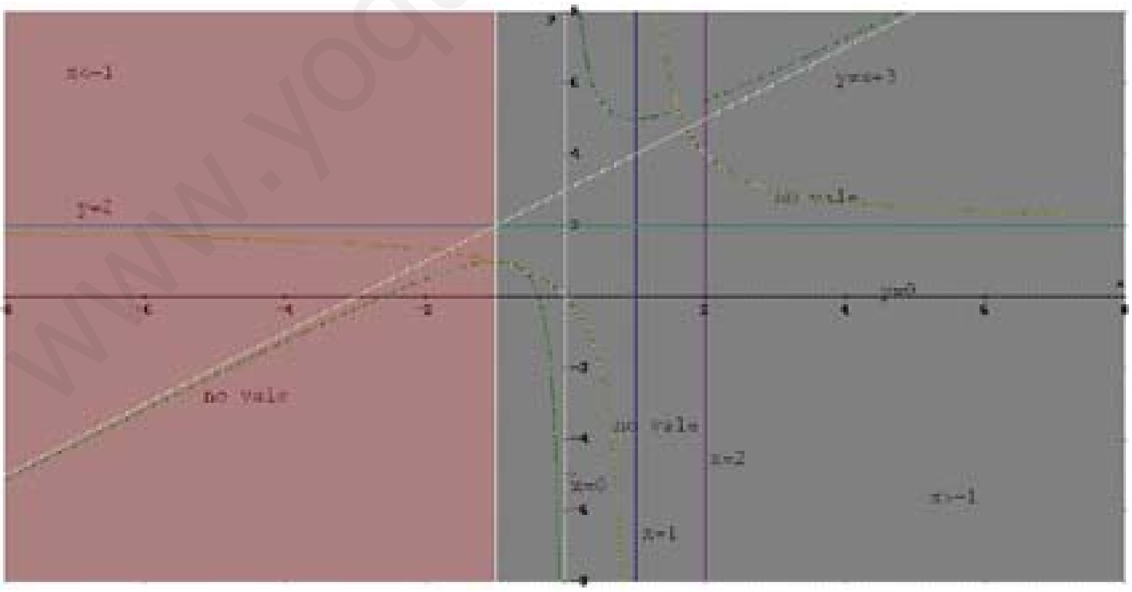
Asíntotas horizontales:

- Cuando $x \geq -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3x+1}{x} = \infty$$
  Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.
- Cuando $x < -1$:
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$
  Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

Asíntotas oblicuas:
Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax)$$



- Cuando $x \geq -1$:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow\infty} (\frac{x^2+3x+1}{x} - x) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$$

Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x} dx = \int_1^2 (x + 3 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

Problema 274 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

1. Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).
3. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No tiene, ya que el dominio de la función es todo R.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

2. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Que serían los puntos $(1, e)$ y $(-1, e^{-1})$

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

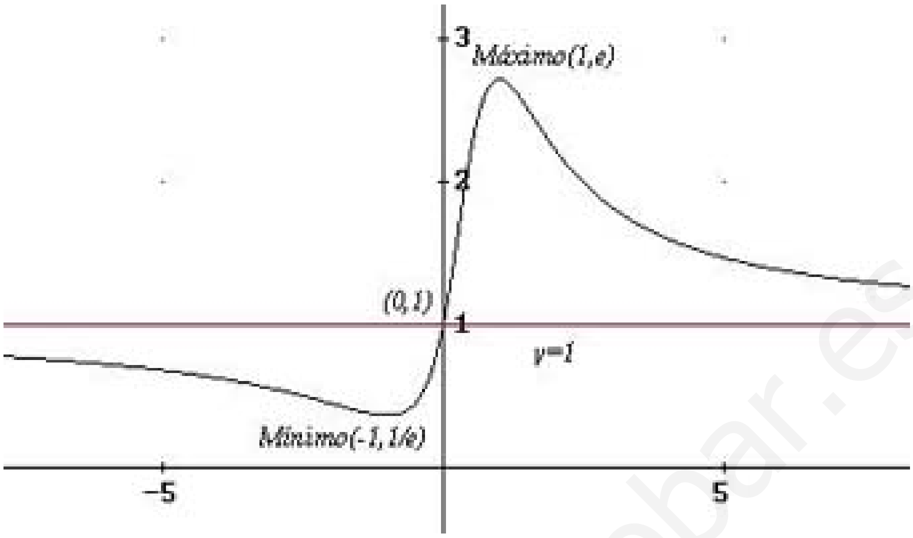
$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\cdot e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo y lo mismo ocurre con $e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, el estudio del signo se reduce al de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$1+x$	$-$	$+$	$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	$+$	$-$
	decreciente	creciente	decreciente

En el punto $(1, e)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(-1, e^{-1})$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

3. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$ único punto de corte, ya que con el eje de abcisa no habría ninguno.



Problema 275 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{9x-3}{x^2-2x}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 2 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0, 1\}$
2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

     Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

     $$\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{9x-3}{x^2-2x} = \pm\infty$$

     Luego $x = 2$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{9x-3}{x^2-2x} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{9x-3}{x^2-2x}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{3(3x^2-2x+2)}{x^2(x-2)^2}$$

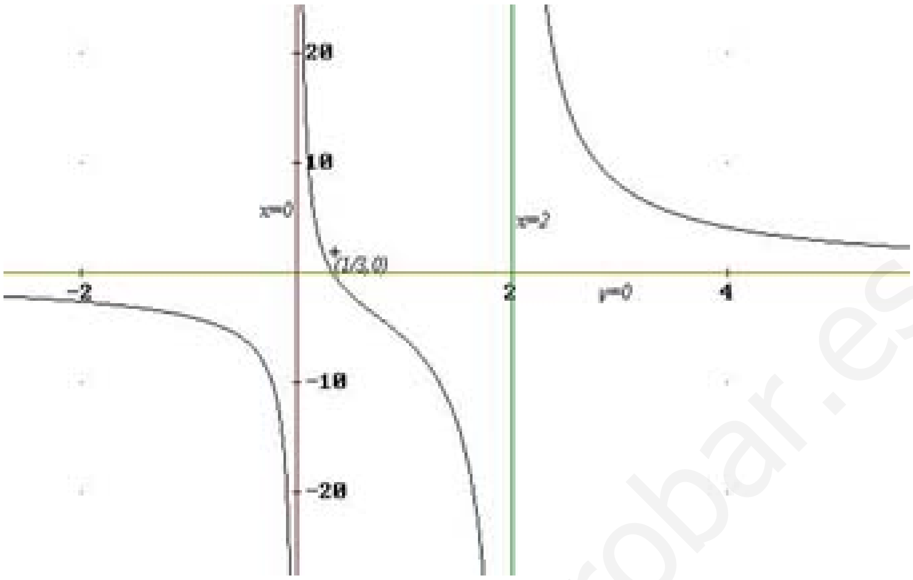
Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $3x^2 - 2x + 2$, que es siempre positivo. Luego $f'(x) < 0$ y por tanto la función es siempre decreciente.

4. Para dibujar la gráfica sólo faltaría algún punto de corte con los ejes $y = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$ único punto de corte, ya que con el eje de ordenadas no habría ninguno.

Problema 276 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)$$

1. Calcular el dominio de f.



2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
4. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $\dfrac{x^2-2}{2x-1} < 0$

$$Dom(f) = \left\{ x \in R : \frac{x^2-2}{2x-1} > 0 \right\}$$

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \longrightarrow 1/2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1/2} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \pm\infty$$

   Luego $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pm\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = -\infty$$

   Luego $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ son asíntotas verticales.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = \infty$$

Luego no tiene asíntotas horizontales.

- **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right)}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Este apartado tiene dos subapartados

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)} = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, y por tanto, no hay extremos relativos.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{2(x^2-x+2)}{(x^2-2)(2x-1)}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del numerador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $(x^2-2)(2x-1)$, que es siempre positivo en este dominio. Luego $f'(x) > 0$ y por tanto la función es siempre creciente.

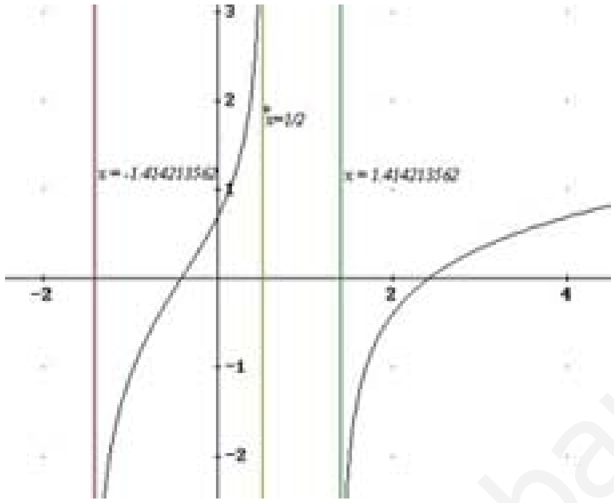
4. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{x^2-2}{2x-1}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-2}{2x-1} = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Con el eje de ordenadas

$$x = 0 \Longrightarrow y = \ln 2$$



- Los puntos son

$$(0, \ln 2); \ (1+\sqrt{2}, 0); \ (1-\sqrt{2}, 0)$$

Problema 277 Considera la función la función $f: R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$$

1. Calcular el dominio de f.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Determina los máximos y mínimos de f.
4. Determina los puntos de inflexión de f.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos que $x^3 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R - \{0\}$
2. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \pm\infty$$

   Luego $x = 0$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- **Asíntotas oblicuas:** Cuando hay asíntotas horizontales no hay oblicuas.
Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^3}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$$

Para comprobar si son máximos o mínimos recurrimos a la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} \Longrightarrow \begin{cases} f''(\sqrt{3}) < 0 \\ f''(-\sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$

Tenemos un mínimo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Tenemos un máximo en $\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

4. Para calcular los puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$

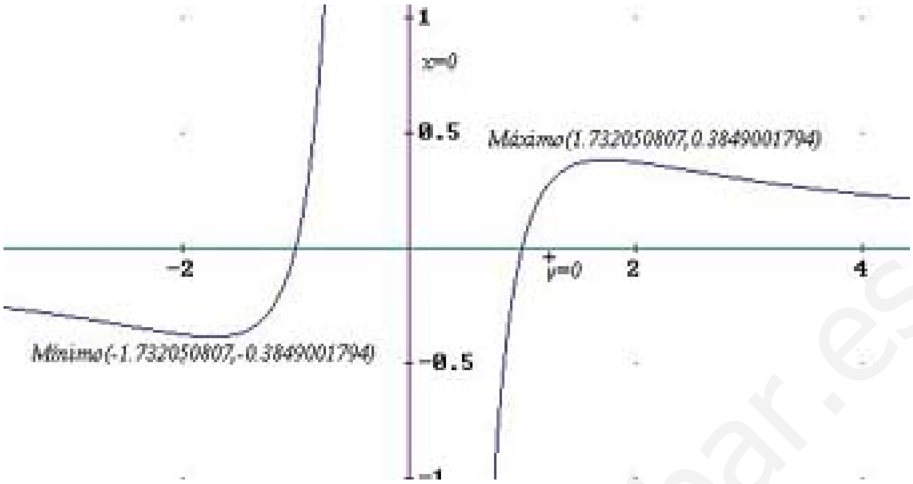
$$f''(x) = \frac{2(x^2-6)}{x^5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 6 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{6}, -\frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \\ \\ \left(\sqrt{6}, \frac{5}{6\sqrt{6}}\right) \end{cases}$$

5. Para dibujar la gráfica sólo faltarían los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje de abcisas

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

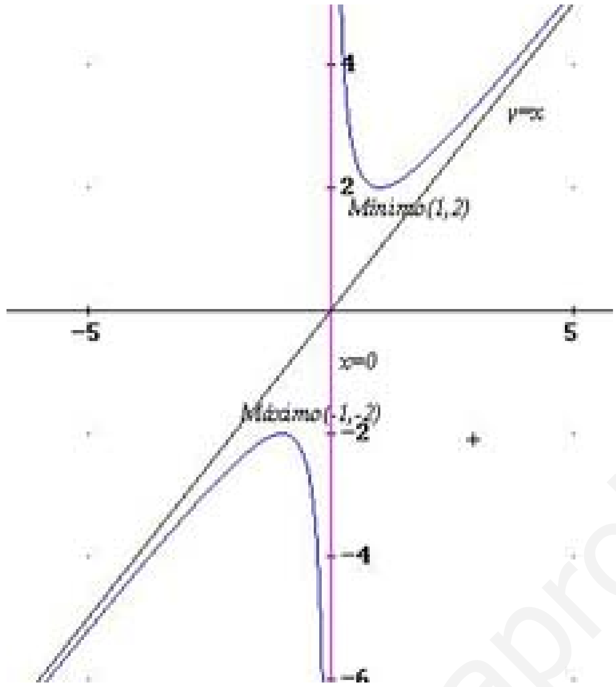


- Con el eje de ordenadas no hay puntos de corte
- Los puntos son
$$(1,0);\ (-1,0)$$

Problema 278 Representa gráficamente la curva $y = x + \dfrac{1}{x}$. Para ello calcula asíntotas, puntos criticos e intervalos de crecimiento.

Solución:

1. Calculamos las asíntotas
   - **Asíntotas verticales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$
   La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
   - **Asíntotas horizontales:**
   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \pm\infty$$
   Luego no hay asíntotas horizontales.
   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que
   $$a = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$
   $$b = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} - x\right) = 0$$
   Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.



2. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

     $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

     Que serían los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

     $$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

     Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo, el estudio del signo se reduce al de $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$
	creciente	decreciente	creciente

     En el punto $(-1, -2)$ la función tiene un máximo, pasa de crecinte a decreciente. En el punto $(1, 2)$ la función tiene un mínimo, pasa de decrecinte a creciente.

Problema 279 Considera la función la función $f : R \longrightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

1. Calcular el dominio de f y puntos de corte si los hay.
2. Calcula las asíntotas de la gráfica de f
3. Simetrías.
4. Determina los intervalos de crecimiento de decrecimiento, y los extremos relativos de f, si existen.
5. Dibujar la gráfica de f.

Solución:

1. **Dominio:** Será el formado por todo R, excepto en aquellos puntos el los que se anule el denominador; $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow Dom(f) = R$.

   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

     $$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

     Luego los puntos de corte son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1$, luego el punto de corte es $(0, -1)$.

2. Calculamos las asíntotas

   - **Asíntotas verticales:** No hay ningún valor que anule el denominador de esta fracción y, por tanto, no tiene asíntotas verticales.
   - **Asíntotas horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

     Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.
   - **Asíntotas oblicuas:** Si la recta $y = ax + b$ es una asíntota tenemos que

     $$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = 0$$

     Luego no hay asíntotas oblicuas.

3. **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

   Luego la función es simétrica respecto al eje OY.

4. Este apartado tiene dos subapartados

   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

   $$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

   $$\Longrightarrow 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \; f(0) = -1$$

   Sólo queda por decidir si el punto $(0, -1)$ es un máximo o un mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

   - **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

   $$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

   Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el signo del denominador es siempre positivo el estudio del signo se reduce al de $4x$, que es positivo cuando $x > 0$, y por el contrario, es negativo cuando $x < 0$. En conclusión:
   Cuando $x < 0$ la función es decreciente.
   Cuando $x > 0$ la función es creciente.
   En el punto $(0, -1)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

5. Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

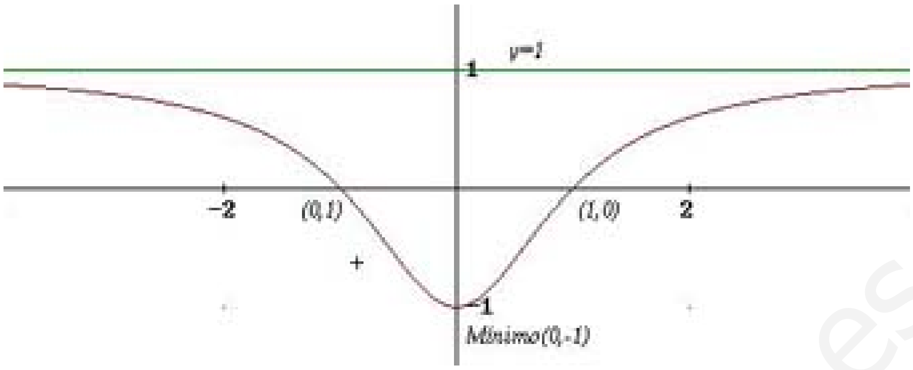
Problema 280 Resolver:

1. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

2. Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

1. El dominio de $y = e^{x+2}$ y $y = e^{-x}$ es todo R y, por tanto, no tienen asíntotas verticales; además son continuas y positivas. Por otro lado tenemos:



- $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{x+2} = e^{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{x+2} = e^{\infty} = \infty$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} e^{-x} = e^{-\infty} = 0$

Es decir, las dos funciones tienen una asíntota horizontal en común $y = 0$ y, por tanto, no tienen asíntotas oblicuas.

Los puntos de corte entre estas dos funciones serán el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ y = e^{-x} \end{array}\right. \Longrightarrow (-1, e)$$

Los puntos de corte entre la función $y = e^{x+2}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{x+2} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, e^2)$$

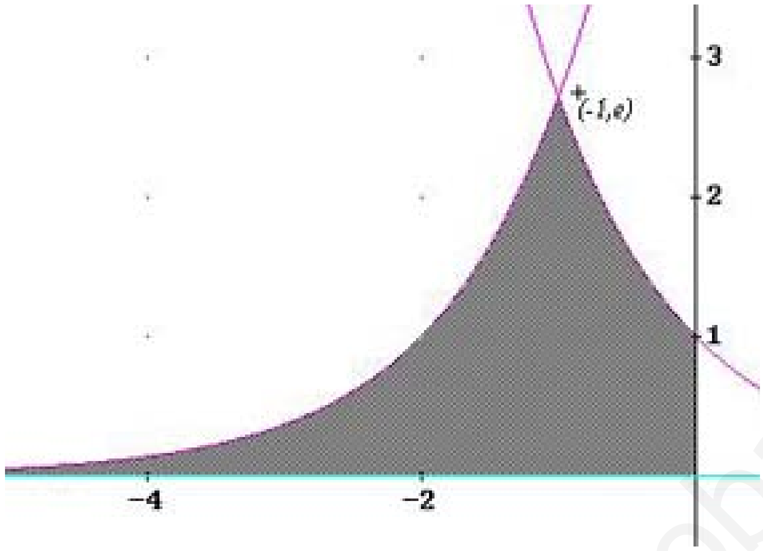
Los puntos de corte entre la función $y = e^{-x}$ y la función $x = 0$ será el resultado de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{-x} \\ x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow (0, 1)$$

El área pedida vendrá dada por

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{x+2}\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{x}\cdot e^2\,dx + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx =$$

$$e^2\left[e^x\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = e^2(e^{-1} - 0) + (-e^0 + e) = 2e - 1$$



Problema 281 Dada la función $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$, se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1.
   - **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $5 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$.
   - **cortes con el eje OX:** Para ello hacemos $f(x) = 0$

     $$x\sqrt{5-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow$$

     $$x = 0,\ \ x = \sqrt{5},\ \ x = -\sqrt{5}$$

     Luego los puntos de corte son $(0,0)$, $(-\sqrt{5},0)$ y $(\sqrt{5},0)$.
   - **cortes con el eje OY:** Para ello hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, luego el punto de corte es $(0,0)$.
   - **Simetrías:** Para buscar las simetrías calculamos $f(-x)$:

     $$f(-x) = (-x)\sqrt{5-(-x)^2} = -f(x)$$

     Luego la función es simétrica respecto al origen O.
   - **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

     $$f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow 5-2x^2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Longrightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$$

Sólo queda por decidir si estos puntos son máximos o mínimos, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x)=\frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x)>0$ y decreciente cuando $f'(x)<0$. Como el dominio de la función es $\left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right),\ \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right),$$

En conclusión:
Cuando $x \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ la función es decreciente
En el punto $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

En el punto $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un máximo.

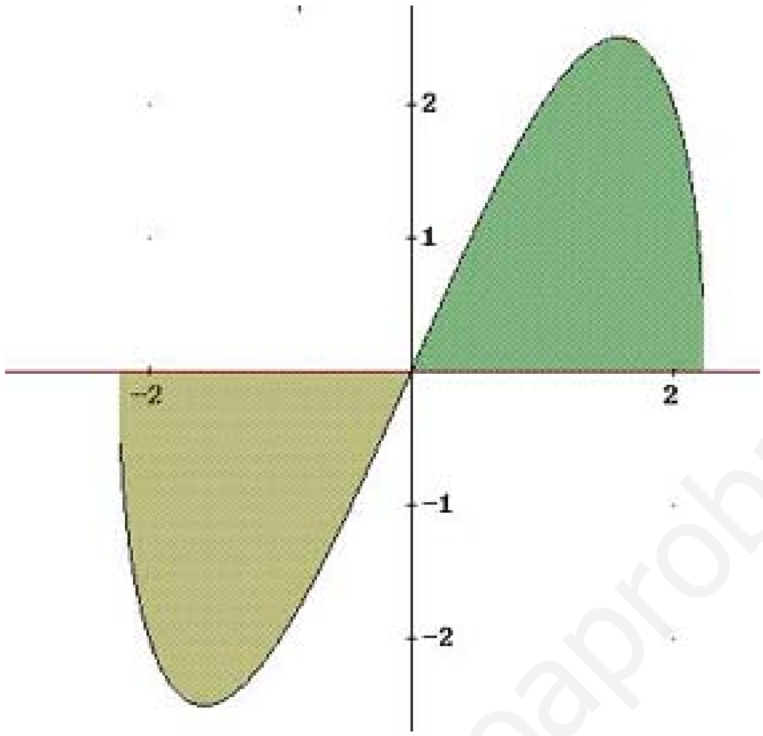
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.

2. Como la gráfica es simétrica respecto al origen el área buscada será el doble de la encerrada en el intervalo $[0, \sqrt{5}]$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}} 2x\sqrt{5-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(5-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{125}}{3}$$

Podemos concluir: **Área**$=\dfrac{2\cdot\sqrt{125}}{3}\ u^2$



Problema 282 Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución:

- **Dominio:** Será el formado por todos aquellos puntos que cumplan que $x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- **Extremos relativos:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada y la igulamos a cero

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

  Como $x = 1-\sqrt{2}$ no pertenece al dominio, resulta que el único extremo es $x = 1 + \sqrt{2}$. Sólo queda por decidir si este punto es máximo o mínimo, lo cual se verá en el siguiente apartado.

- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:** Para calcularlos recurrimos a la primera derivada

$$f'(x) = \frac{5 - 2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Tenemos que la función es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$. Como el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y $f'(x)$ se anula en los puntos calculados en el apartado anterior, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son

$$(-\infty, -1)\,, \ \left(1, 1+\sqrt{2}\right), \ \left(1+\sqrt{2}, \infty\right),$$

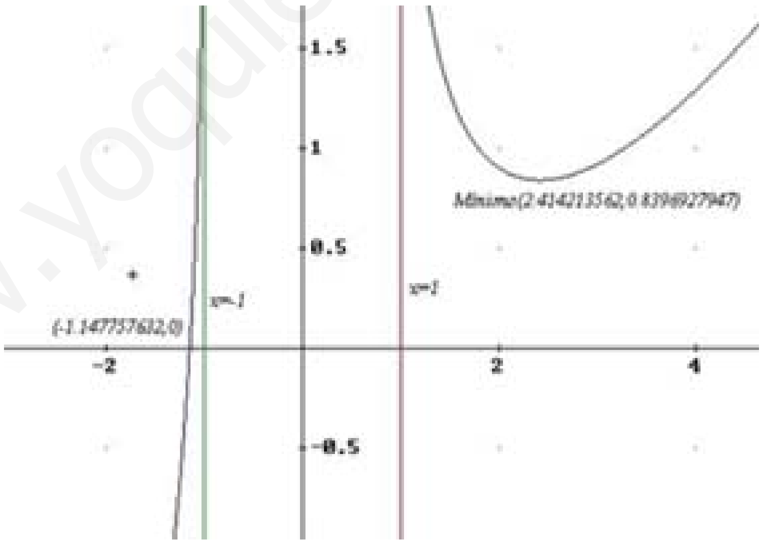
En conclusión:
Cuando $x \in (-\infty, -1)$ la función es creciente.
Cuando $x \in \left(1, 1+\sqrt{2}\right)$ la función es decreciente.
Cuando $x \in \left(1+\sqrt{2}, \infty\right)$ la función es creciente
En el punto $(1+\sqrt{2}; 0.84)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un mínimo.

- **Concavidad:** Para ello calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

Como la segunda derivada es siempre mayor que cero, la función es siempre cóncava.

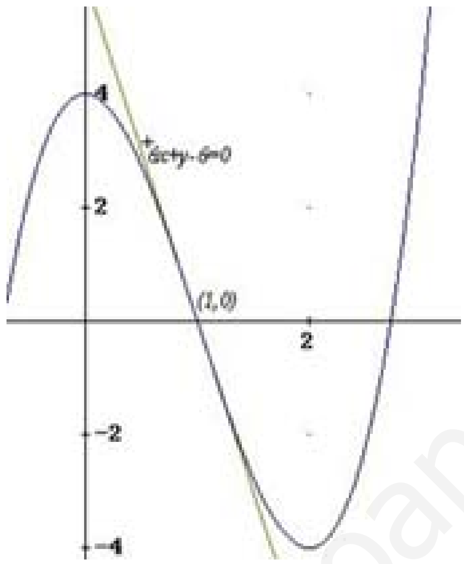
- Con estos datos ya es suficiente para dibujar la gráfica.



Problema 283 Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva representativa de esta función en su punto de inflexión. Haga también su gráfica aproximada de la función en un entorno de ese punto.

Solución:

Para calcular el punto de inflexión tenemos que hacer $f''(x) = 0$.



$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 1$ posible punto de inflexión. $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow$ podemos asegurar que es de inflexión, que será el $(1, 0)$. La pendiente de la recta tangente a esta función een este punto vale $m = f'(1) = -6$, luego la ecuación de la recta buscada es

$$y - 0 = -6(x - 1) \Longrightarrow 6x + y - 6 = 0$$

En un entorno de este punto la función pasará de cóncava a convexa o recíprocamente, habrá que ver también si en ese pequeño entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ la función es creciente.

	$(1-\varepsilon, 1)$	$(1, 1+\varepsilon)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente	decreciente

	$(1-\varepsilon, 1)$	1	$(1, 1+\varepsilon)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexa	PI	cóncava

Con estos datos se puede dibujar la gráfica.

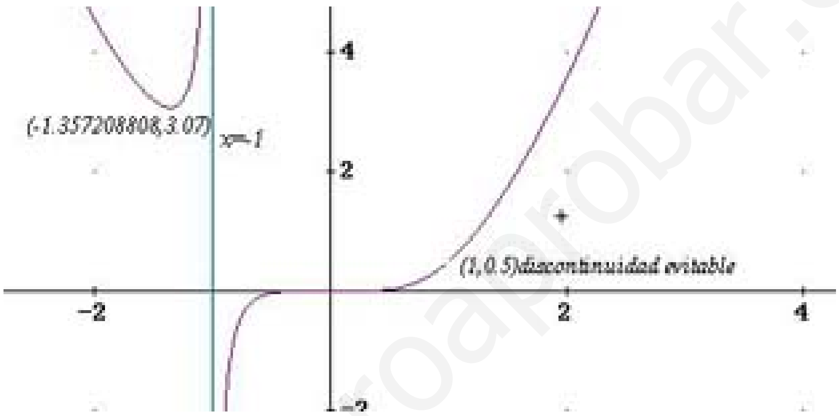
Problema 284 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

1. Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

2. Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:



1. Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

2. Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 285 .

1. Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$
2. Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.
3. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

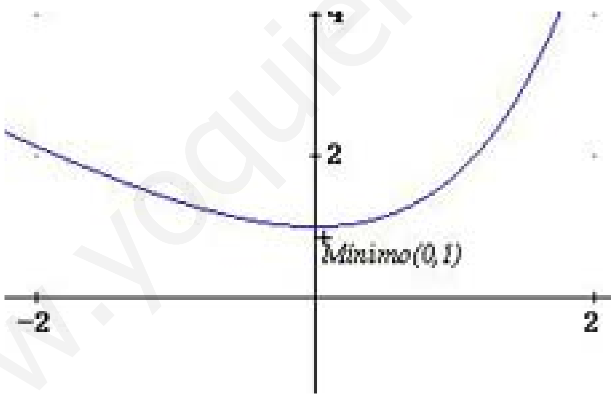
1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función

$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$

$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.



2.

$$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$

Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

Por otra parte, si calculamos los límites

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$

Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

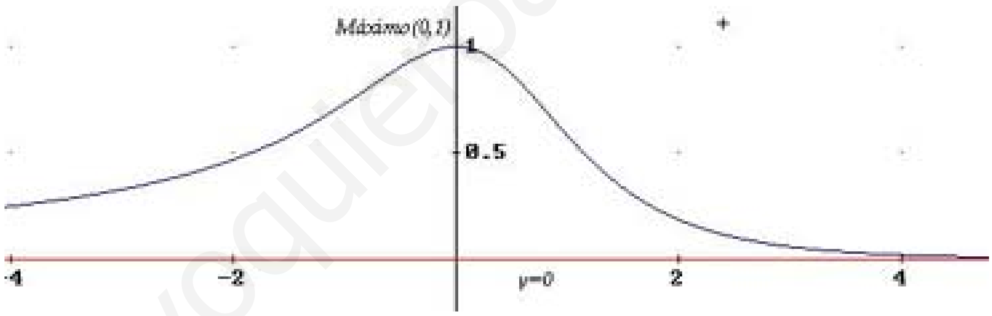
En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3.

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{(e^x - x)^3} = 0 \Longrightarrow 1 - e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x - x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un máximo.



Problema 286 Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

1. (a) **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=1\Longrightarrow y=1$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

(b) Extremos:

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2}\Longrightarrow x=\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$x+1/2,08$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2},2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx=$$

$$=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$$

$$\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1=1-\frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 287 Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$$

1. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

2. Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

3. ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

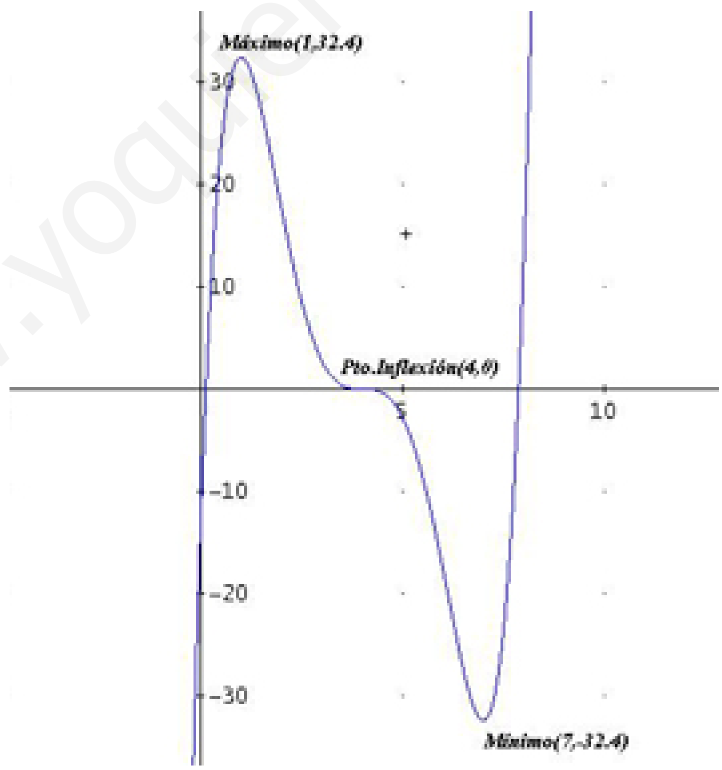
$$f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7) = 0 \Longrightarrow x = 4, \quad x = 1, \quad x = 7$$

Como $(x-4)^2 > 0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7 = (x-1)(x-7)$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 7)$	$(7, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Luego f crece en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (7, \infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1, 7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x = 1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1, \dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x = 7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7, -\dfrac{162}{5}\right)$. En $x = 4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4, 0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.



3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

   $$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1,8787, \;\; x = 6,1213$$

   Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4,0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

   $$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

   Luego se trata de un punto de inflexión.

Problema 288 Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
2. Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
3. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

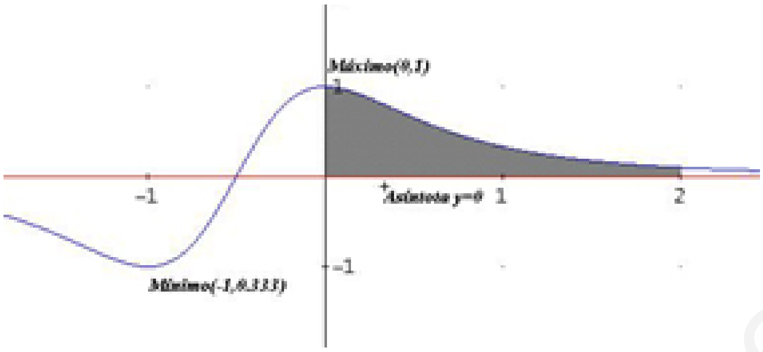
Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1, \; x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

   En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0,1)$.

   Asíntotas:



- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=0\Longrightarrow y=0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

2.

$$\int_0^2\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=-\frac{1}{x^2+x+1}\Big]_0^2=\frac{6}{7}$$

Problema 289 Calcular un polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x=1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx=\frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x)=3ax^2+2bx+c\Longrightarrow p'(1)=3a+2b+c=0$$

- $$p''(x)=6ax+2b\Longrightarrow p''(0)=2b=0\Longrightarrow b=0$$

$$p(0)=d=1$$

-

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\Big]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a + 2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a + c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \ \ c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$$

3.8 Selectividad de Ciencias Sociales

3.8.1 Representaciones Gráficas

Problema 290 La temperatura T en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

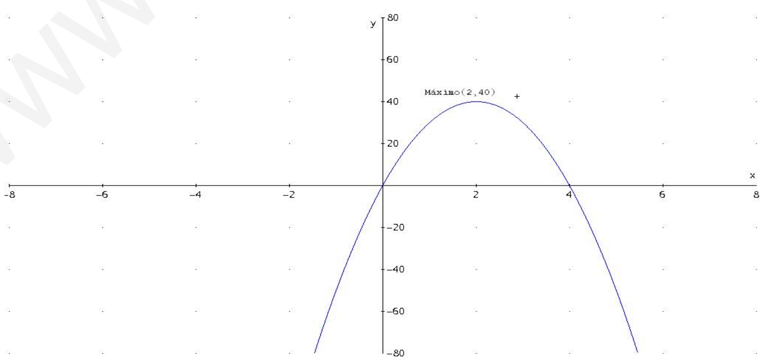
$$T(t) = 40t - 10t^2, \ \ t \in [0, 4]$$

1. Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

2. ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora?. ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?.

Solución:

1. La representación gráfica será la siguiente: Los puntos de corte serían:



Con el eje de ordenadas $t = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

Con el eje de abcisas $T(t) = 0 \Longrightarrow 40t - 10t^2 = 0 \Longrightarrow (0,0),\ \ (4,0)$.

La función alcanza un punto crítico cuando $T'(t) = 40 - 20t = 0 \Longrightarrow (2,40)$.

Por el criterio de la segunda derivada $T''(2) = -20 < 0 \Longrightarrow (2,40)$ es un máximo.

Esto quiere decir que, la temperatura máxima la alcanza a las dos horas con 40ºC.

2. Transcurrida una hora la temperatura será: $T(1) = 30$ºC. Por la simetría de la gráfica se observa que esta misma temperatura la volverá a alcanzar a las tres horas.

Problema 291 Calcular:

1. Halle los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en el punto $(-2,3)$.
2. Halle la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 2$ en su punto de inflexión.

Solución:

1. La función $f(x)$ tiene un extremo en $x = -2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \Longrightarrow f'(-2) = 12 - 4a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

La función $f(x)$ pasa por el punto $(-2,3)$:

$$f(-2) = -8 + 4a + b = 3 \Longrightarrow -8 + 12 + b = 3 \Longrightarrow b = -1$$

2. Calculamos el punto de inflexión:

$$y' = 3x^2 - 4,\quad y'' = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,2)$$

Calculamos la pendiente en ese punto:

$$m = f'(0) = -4 \Longrightarrow y - 2 = -4x \Longrightarrow 4x + y - 2 = 0$$

Problema 292 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. Determinar:

1. Dominio de definición.
2. Asíntotas si existen.

3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus máximos y mínimos.

4. Área encerrada por: $f(x)$, la recta $x = 5$ y la función $g(x) = \frac{1}{x}$.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0\}$

2. Asíntotas:

   (a) Verticales

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

   Luego la función tiene la asíntota vertical $x = 0$

   (b) Horizontales

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty$$

   No existen asíntotas horizontales.

   (c) Oblicuas, tendrán la ecuación $y = mx + n$ donde

   $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = 0$$

   Luego existe una asíntota oblicua de ecuación $y = x$.

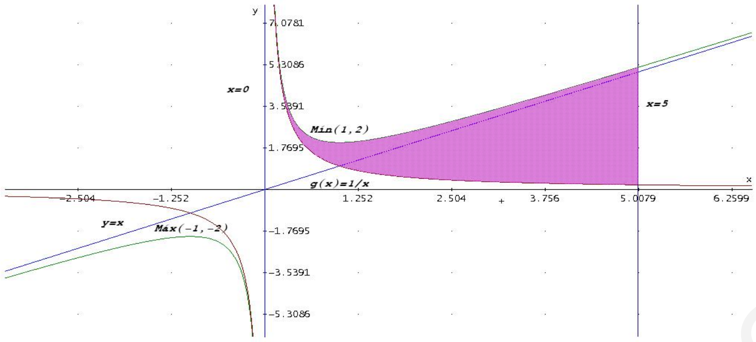
3. Calculamos la primera derivada y la igualamos a 0

   $$f'(x) = \frac{x^2-1}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -1$$

   Situamos estos puntos en la recta real y obtenemos los intervalos y los valores que toma la función en ellos en lasiguiente tabla:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

   Es decir, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$. A la vista de estos resultados presentará un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, 2)$.



4. El área buscada será:

$$\int_1^5 \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^5 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = 12\,u^2$$

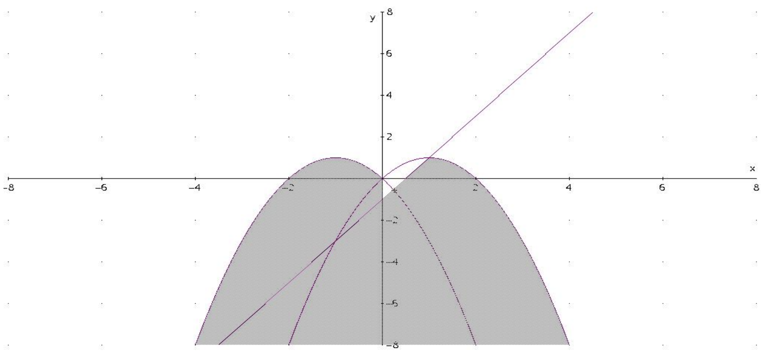
Podemos observar la grafica:

Problema 293 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -1+2x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. Representa gráficamente f.
2. Estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 1$.
3. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, y las rectas $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{3}{2}$.

Solución:

1. Si tenemos encuenta de que se trata de dos ramas parbólicas y un trazo de recta es fácil representar



2. A la vista de la representación anterior es fácil ver su continuidad, vamos a estudiarlo por sus límites laterales.

   (a) En $x = 0$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(-x^2-2x) = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(-1+2x) = -1$$

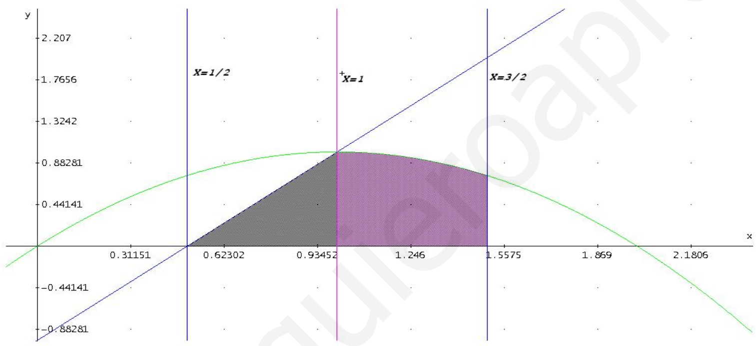
   Luego la función es discontinua en $x = 0$.

   (b) En $x = 1$

   $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(-1+2x) = 1, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}(-x^2+2x) = 1, \quad f(1) = 1$$

   Luego la función es continua en $x = 1$.

3. El área que tenemos que calcular es la sombreada en en el siguiente dibujo



$$Área = \int_{1/2}^{1}(-1+2x)\,dx+\int_{1}^{3/2}(-x^2+2x) = -x + x^2\Big]_{1/2}^{1} + x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_{1}^{3/2} = \frac{17}{24}\,u^2$$

Problema 294 Un profesor ha comprobado que el grado de atención (puntuado de 0 a 100) que le prestan sus alumnos durante los 40 minutos de duración de su clase sigue la función:

$$F(t) = \alpha t(\beta - t) \quad 0 \le t \le 40$$

Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar la clase le prestan la máxima atención, es decir, el grado de atención es 100, se pide:

1. Determinar, justificando la respuesta, α y β.

2. Representar la función obtenida.

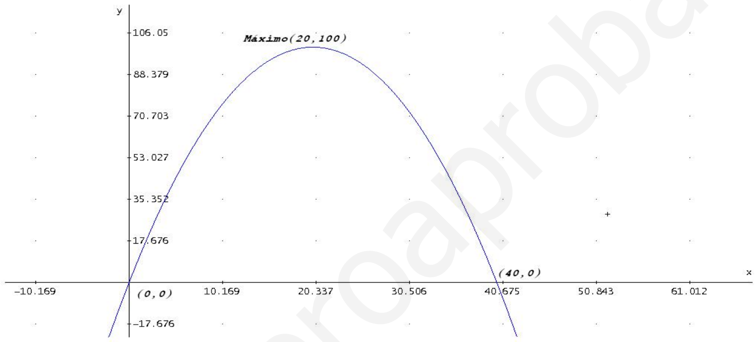
Solución:

1. Sabemos que cuando $t = 20$ la función tiene un máximo, y sabemos que $F(20) = 100$, por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(t) = \alpha\beta - 2\alpha t \Longrightarrow F'(20) = \alpha\beta - 40\alpha = 0 \\ F(20) = 20\alpha\beta - 400\alpha = 100 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = 40 \end{array} \right.$$

2. Para representarla tenemos un máximo en el punto (20,100), y como es una parábola, con encontrar los puntos de corte con los ejes es suficiente para representarla.

$$10t - \frac{1}{4}t^2 = 0 \Longrightarrow (0,0),\ \ (40,0)$$



Problema 295 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, calcule, cuando existan:

1. Las asíntotas verticales y las horizontales.
2. Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
3. Los máximos relativos y los mínimos relativos.

Solución:

1. Asíntotas

   - Verticales: Las únicas posibles son

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 2,\ \ x = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Luego la función tiene la asíntota vertical $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Luego la función tiene la asíntota vertical $x = 1$

- Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{(x-2)(x-1)}=0$$
Luego la función tiene la asíntota horizontal $y=0$
- Oblicuas: No hay al tener horizontales

2.
$$f'(x)=\frac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}=0\Longrightarrow x=\frac{3}{2}$$

	$(-\infty,3/2)$	$(3/2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

3. En el punto $x=\frac{3}{2}$ la función pasa de crecer a decrecer, luego es un máximo relativo.

Problema 296 Sea la función:
$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$$

1. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en $x=-3$.
2. Calcula sus asíntotas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
3. Represéntala gráficmente.

Solución:

1.
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2},\quad f'(x)=\frac{3x-4}{x^3}$$
$$f(-3)=\frac{20}{9},\quad f'(-3)=\frac{13}{27}$$
$$y-\frac{20}{9}=\frac{13}{27}(x+3)\Longrightarrow 13x-27y+99=0$$

2. Asíntotas

- Verticales: La única posible es $x=0$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{2}{0^+}=+\infty\quad \lim_{x\longrightarrow^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$
Luego la función tiene la asíntota vertical $x=0$

- Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2}=1$$
Luego la función tiene la asíntota horizontal $y=1$
- Oblicuas: No hay al tener horizontales

3.

$$f'(x)=0\Longrightarrow 3x-4=0\Longrightarrow x=\frac{4}{3}$$

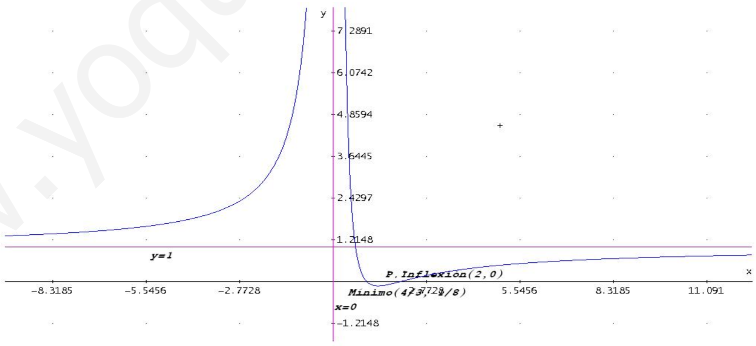
	$(-\infty,0)$	$(0,4/3)$	$(4/3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

En el punto $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{8}\right)$ la función pasa de decrecer a crecer, luego es un mínimo relativo.

$$f''(x)=\frac{-6x+12}{x^4}=0\Longrightarrow x=2$$

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	cóncava

En el punto $(2,0)$ la función pasa de convexa a cóncava, luego es un punto de inflexión.



4.

Problema 297 Dada la curva $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, se pide:

1. Dominio y asíntotas.
2. Simetrías y cortes con los ejes.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

4. Máximos y mínimos, si los hay.
5. Una representación aproximada de la misma.

Solución:

1. Dominio: $Dom\, f = R - \{\pm 1\}$

   Asíntotas:

   - Verticales Las únicas posibles son
   $$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 1$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
   Luego la función tiene la asíntota vertical $x = 1$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   Luego la función tiene la asíntota vertical $x = 1$
   - Horizontales:
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$
   Luego la función tiene la asíntota horizontal $y = 0$
   - Oblicuas: No hay al tener horizontales

2. Simetrías:
   $$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x) \Longrightarrow \text{Impar}$$
   La función es simétrica respecto al origen.

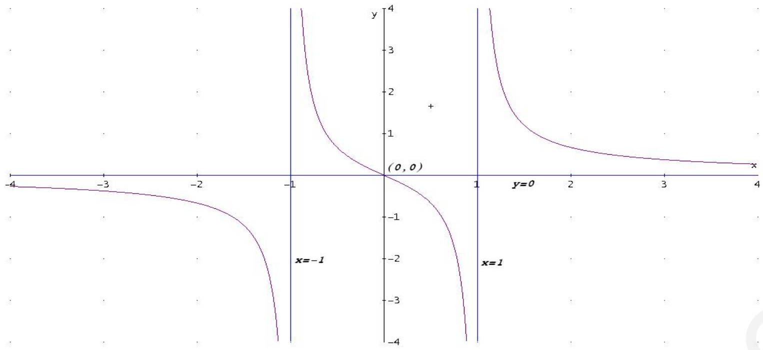
   Puntos de corte:

   Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{x^2-1} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; (0,0)$

   Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0, \;\; (0,0)$

3. $$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0 \Longrightarrow \text{Decreciente en todo } R$$

4. está claro que el numerador de la primera derivada no se anula nunca y la función está siempre decreciendo, luego no hay ni máximos ni mínimos relativos.



5.

Problema 298 La función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene un máximo en el punto $(0, 4)$. Halla:

1. La función.
2. El mínimo.
3. El punto de inflexión.

Solución:

1.

$$f(-1) = 0 \Longrightarrow a - b + c = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0$$

$$f(0) = c = 4$$

Luego, $a = -3$, $b = 0$ y $c = 4 \Longrightarrow\ y = x^3 - 3x^2 + 4$

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 2$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo será el punto $(2, 0)$.

3.

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

$$f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

Luego el punto $(1, 2)$ es un punto de inflexión.

Problema 299 El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (t, en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & 0 \le t \le 10 \\ \frac{38t-100}{0{,}4t} & t > 10 \end{cases}$$

1. ¿A partir de qué momento crecerá este porcentaje? Por mucho tiempo que pase ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

2. Haz un esbozo de la gráfica de la función P a lo largo del tiempo.

Solución:

1. Calculamos la derivada de la función:

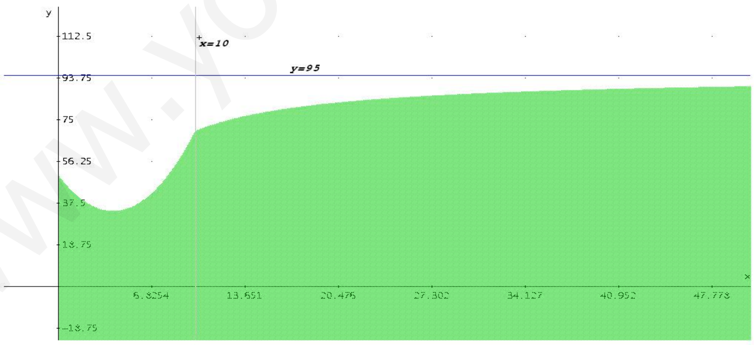
$$P'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & 0 \le t \le 10 \\ \frac{250}{t^2} & t > 10 \end{cases}$$

$$2t - 8 > 0 \Longrightarrow t > 4; \quad \frac{250}{t^2} > 0 \text{ siempre}$$

La función es creciente en el intervalo $(4, 10]$ y, por tanto empezará a crecer a partir del cuarto mes.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} P(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{38t - 100}{0,4t} = 95$$

El tope de pacientes será de un 95%, nunca se pasará de esa cifra.



2.

Problema 300 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

1. Determinar su dominio de definición.
2. Obtener sus asíntotas.

Solución:

1. Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom f = (-\infty,-2] \cup (-1,1) \cup [2,\infty)$

2. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = \left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right] = +\infty \Longrightarrow x = -1$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

Problema 301 Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0$$

1. Obtener los valores de a para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$.
2. Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ y representar la función.

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 3, \;\; a = -\dfrac{1}{2}$

2. $f(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 6x + 5 \Longrightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 5, \quad x = 1$

$$f''(x) = 2x - 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(5) = 4 > 0 \Longrightarrow \left(5, \dfrac{5}{3}\right) \text{ Mínimo} \\ f''(1) = -4 < 0 \Longrightarrow \left(1, \dfrac{37}{3}\right) \text{ Máximo} \end{cases}$$

3.8.2 Continuidad y Derivabilidad

Problema 302 Sea $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

¿Para qué valores del parámetro a la función es continua?

Solución

Habrá que estudiar la continuidad en el punto $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x+a)^2 = (1+a)^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 = (1+a)^2 \Longrightarrow a = 0, \quad a = -2$$

Problema 303 Calcular a, b, c y d para que sea continua la función $f(x)$ y representarla gráficmente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} & x < 2 \\ 3x - a & \text{si} & 2 \leq x < 3 \\ b & \text{si} & 3 \leq x < 5 \\ -x + c & \text{si} & 5 \leq x < 7 \\ d & \text{si} & 7 \leq x \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) \Longrightarrow \frac{1}{2}2 = 3 \cdot 2 - a \Longrightarrow a = 5$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) \Longrightarrow 3 \cdot 3 - a = b \Longrightarrow b = 4$$

Continuidad en $x = 5$:

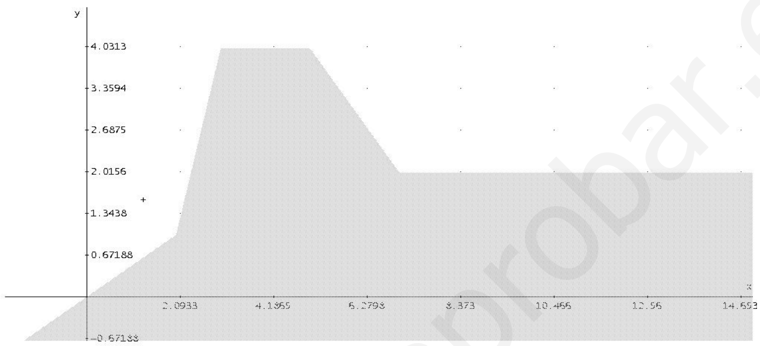
$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) \Longrightarrow b = -5 + c \Longrightarrow c = 9$$

Continuidad en $x = 7$:

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) \Longrightarrow -7 + c = d \Longrightarrow d = 2$$

La función queda de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x - 5 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad 3 \le x < 5 \\ -x + 9 & \text{si} \quad 5 \le x < 7 \\ 2 & \text{si} \quad 7 \le x \end{cases}$$



Problema 304 Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ \frac{10}{a-x} & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

1. Calcular los valores del parámetro a para los que $f(x)$ es continua en $x = 3$.

2. Para $a = 0$ calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

3. Para $a = 4$ calcular las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)$.

Solución:

1.

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} (x^3 - 3x + 2) = 20$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3} \frac{10}{a - x} = \frac{10}{a - 3}$$

$$\frac{10}{a - 3} = 20 \Longrightarrow a = \frac{7}{2}$$

2. Si $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ -\frac{10}{x} & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 3 \\ \frac{10}{x^2} & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Cuando $x < 3$:

$$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Cuando $x \geq 3$:

$$f'(x) = \frac{10}{x^2} > 0 \text{ siempre}$$

Luego se cumplirá:

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ es decreciente en $(-1, 1)$.

3. Si $a = 4$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ \frac{10}{4-x} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Cuando $x < 3$ se trata de un polinomio y, por tanto, no tiene asíntotas. Cuando $x \geq 3$:

- Verticales: La única posible es $x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} \frac{10}{4 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} \frac{10}{4 - x} = -\infty$$

Luego $x = 4$ es una asíntota.

- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{10}{4 - x} = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

3.8.3 Rectas Tangente y Normal a una función

Problema 305 Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene un máximo en el punto $(3, 8)$.

1. Halla los valores de a y b.

2. Para dichos valores, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abcisa 0.

Solución:

1.
$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = 2ax + b = 0 \\ f(3) = 9a + 3b = 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{8}{9} \\ \\ b = \dfrac{16}{3} \end{array}\right.$$

2.
$$f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}x \Longrightarrow f'(x) = -\frac{16}{9}x + \frac{16}{3} \Longrightarrow f'(0) = \frac{16}{3} = m$$
$$f(0) = 0$$

La ecuación de la recta tangente es
$$y - 0 =\Longrightarrow \frac{16}{3}(x - 0) \Longrightarrow y = \frac{16}{3}x$$

Problema 306 .

1. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde ésta corta al eje de ordenadas.

2. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 4$.

Solución:

1. Primero calculamos el punto de corte con el eje OY (de ordenadas), y para eso hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = e^2 \Longrightarrow (0, e^2)$.

   Ahora calculamos la pendiente de la recta
   $$f'(x) = -e^{2-x}, \quad m = f'(0) = -e^2$$
   La recta será
   $$y - e^2 = -e^2x \Longrightarrow e^2x + y - e^2 = 0$$

2. Primero tenemos que comprobar si la gráfica de esta función corta al eje de abcisas en el itervalo $[-1, 4]$, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 4$. Esto quiere decir que, tenemos un punto de corte en ese intervalo en $x = 0$. Calculamos:
   $$\int_{-1}^{0}(x^2 - 4x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{7}{3}$$
   $$\int_{0}^{4}(x^2 - 4x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{0}^{4} = -\frac{32}{3}$$
   El área pedida será:
   $$S = \left|\frac{7}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3}\right| = 13u^2$$

3.8.4 Optimización

La suma de tres números positivos es 60. El primero más el doble del segundo más el triple del tercero suman 120. Hallar:

Los números que verifican estas condiciones y cuyo producto es máximo.

Solución:

Tenemos

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 60\\ x+ & 2y+ & 3z= & 120\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & z\\ y= & 60-2z\end{array}\right.$$

$$P = x\cdot y\cdot z \Longrightarrow P(x) = x(60-2x)x = 60x^2 - 2x^3$$

$$P'(x) = 120x - 6x^2 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 20$$

$$P''(x) = 120 - 12x \Longrightarrow P(20) = -120 < 0 \Longrightarrow \text{máximo}$$

Luego los números buscados son $x = y = z = 20$.

Problema 307 Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión: $N(p) = 300 - 6p$.

1. Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.
2. ¿Qué ingreso diario se obtiene si el billete es 15 euros?
3. ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?
4. ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

Solución:

1. Tendremos que $I(p) = (300 - 6p)\cdot p = 300p - 6p^2$
2. $I(15) = 3150$
3. $I'(p) = 300 - 12p = 0 \Longrightarrow p = 25$. Calculamos la segunda derivada $I''(p) = -12 \Longrightarrow I''(25) < -12 \Longrightarrow$ Tenemos un máximo en $p = 25$.
4. $I(25) = 3750$.

Problema 308 La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de Enero de 1990 contado en años.

1. ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?
2. ¿Cuál es la concentración máxima de ozonoque se alcanza en esa ciudad?

Solución:

1.

$$C'(x) = 15 - 1,2x = 0 \Longrightarrow x = 12,5$$

$(-\infty; 12,5)$	$(12,5; +\infty)$
$+$	$-$
Creciente	Decreciente

La contaminación crece durante 12,5 años, es decir, hasta el 30 de Junio del 2002.

Por la tabla construida tenemos que $x = 12,5$ es un máximo. La contaminación máxima será $C(12,5) = 183,75$ microgramos por metro cúbico.

Problema 309 Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión: $N(p) = 300 - 6p$.

1. Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete.
2. ¿Qué ingreso diario se obtiene si el billete es 15 euros?
3. ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios?
4. ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

Solución:

1. Tendremos que $I(p) = (300 - 6p) \cdot p = 300p - 6p^2$
2. $I(15) = 3150$
3. $I'(p) = 300 - 12p = 0 \Longrightarrow p = 25$. Calculamos la segunda derivada $I''(p) = -12 \Longrightarrow I''(25) < -12 \Longrightarrow$ Tenemos un máximo en $p = 25$.
4. $I(25) = 3750$.

Problema 310 Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse, en este caso, mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$ donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

1. La función que define el beneficio anual en euros.
2. La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.
3. El beneficio máximo.

Solución:

1.
$$B(x) = I(x) - G(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$$

2.
$$B'(x) = -32x + 24000 \Longrightarrow x = 750$$
$$B''(x) = -32 \Longrightarrow B''(750) = -32 < 0 \Longrightarrow \text{Maxímo}$$

3. $B(750) = 8300000$ euros de beneficio máximo.

Problema 311 En los estudios epidemiológicos realizados en determinada población se ha descubierto que el número de personas afectadas por cierta enfermedad viene dado por la función:

$$f(x) = -3x^2 + 72x + 243$$

siendo x el número de días transcurridos desde que se detectó la enfermedad.

Determinar:

1. El número de días que han de transcurrir hasta que desaparezca la enfermedad.
2. El número máximo de personas afectadas.
3. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la enfermedad.

Justificar las respuestas.

Solución:

1. La enfermedad desaparecerá cundo no haya afectados, es decir, $f(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2+72x+243 = 0 \Longrightarrow x = -3,\ \ x = 27.$ La solución correcta es $x = 27$ días.
2.
$$f'(x) = -6x + 72 = 0 \Longrightarrow x = 12 \text{ díás}$$
$$f(12) = 675 \text{ personas}$$

3.

$(-\infty, 12)$	$(12, +\infty)$
$+$	$-$
creciente	decreciente

En conclusión, la enfermedad crece durante 12 días presentando un máximo de 675 personas afectadas y decrece durante $27 - 12 = 15$ días, hasta que desaparece la enfermedad.

Problema 312 La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x) = \dfrac{x^3}{100} + 8x + 20$.

1. Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.¿Cuántas unidades x_0 es necesario producir para que sea mínimo el coste por unidad?

2. ¿Qué relación existe entre $Q(x)$ y $C'(x)$?

Solución:

1.

$$Q(x) = \frac{x^2}{100} + 8 + \frac{20}{x}$$

$$Q'(x) = \frac{1}{50}x - \frac{20}{x^2} = 0 \Longrightarrow x_0 = 10$$

$$Q''(x) = \frac{1}{50} + \frac{40}{x^3} \Longrightarrow Q''(10) > 0$$

Luego en $x = 10$ tenemos un mínimo, necesitamos producir 10 unidades para que el coste sea mínimo, éste será $Q(10) = 11$.

2. Como hemos visto $Q(10) = 11$.

$$C'(x) = \frac{3}{100}x^2 + 8 \Longrightarrow C'(10) = 11$$

Es decir, $Q(x) = C'(x_0)$.

Problema 313 Una enfermedad se propaga de tal manera que después de t semanas ha afectado a $N(t)$ cientos de personas donde

$$N(t) = \begin{cases} 5 - t^2(t-6) & \text{para} \quad 0 \le t \le 6 \\ -\frac{5}{4}(t-10) & \text{para} \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$$

1. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $N(t)$. Calcular el máximo de personas infectadas y la semana en la que se presenta ese máximo. Calcular también la semana en la que se presenta en punto de inflexión en el número de personas afectadas.

2. ¿A partir de qué semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo?

Solución:

1. Vamos a estudiar la continuidad en $t = 6$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\longrightarrow 6^+} N(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 6}\left(-\dfrac{5}{4}(t-10)\right) = 5 \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 6^-} N(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow 6}\left(5 - t^2(t-6)\right) = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{t\longrightarrow 6^+} N(t) = \lim_{t\longrightarrow 6^-} N(t) = N(6)$$

Luego la función es continua.

$$N'(t) = \left\{\begin{array}{lll} -3t^2 + 12t & \text{para} & 0 \le t \le 6 \\ -\frac{5}{4} & \text{para} & 6 < t \le 10 \end{array}\right.$$

$$-3t^2 + 12t = 0 \Longrightarrow t = 0, \;\; t = 4$$

	$[0,4)$	$(4,10]$
$N'(t)$	$+$	$-$
	creciente	decreciente

Luego en $t = 4$ la función presenta un máximo. Es decir, la enfermedad crece hasta la 4ª semana y después decrece hasta la 10ª semana. El máximo se alcanza con $N(4) = 37 \Longrightarrow 3700$ enfermos.

Para calcular los puntos de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$N''(t) = \left\{\begin{array}{lll} -6t + 12 & \text{para} & 0 \le t \le 6 \\ 0 & \text{para} & 6 < t \le 10 \end{array}\right.$$

$$-6t + 12 = 0 \Longrightarrow t = 2$$

	$[0,2)$	$(2,6]$
$N'(t)$	$+$	$-$
	convexa	cóncava

Luego en $t = 2$ la función pasa de ser convexa a ser cóncava y, por tanto estamos ante un punto de inflexión y que representa a la segunda semana.

2. Nos piden un punto z que cumpla que $N(z) = 2,5$:

$$5 - z^2(z-6) = 2,5 \Longrightarrow z = 8; \;\; -\frac{5}{4}(z-10) = 2,5 \Longrightarrow z = 8$$

A partir de la 8ª semana en número de enfermos es menor de 250.

Problema 314 Descomponga el número 81 en dos sumandos positivos de manera que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución:

$$x + y = 81 \Longrightarrow x = 81 - y \Longrightarrow P(x) = (81 - y)y^2 = 81y^2 - y^3$$
$$P'(y) = 162y - 3y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0,\ \ y = 54$$
$$P''(y) = 162 - 6y \Longrightarrow P''(0) = 162 > 0,\ \ P''(54) = -162 < 0$$

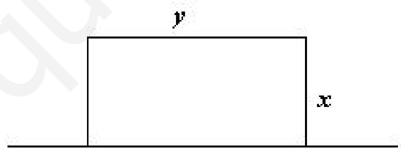
Luego en $y = 0$ hay un mínimo y en $y = 54$ tenemos el máximo buscado.

La solución será: $y = 54$, $x = 81 - 54 = 27$

Problema 315 Se dispone de una barra de hierro de 10 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

1. ¿Qué longitud deben tener los postes y el largero?
2. ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:



1.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ S = xy \end{array}\right. \Longrightarrow S(x) = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2$$
$$S'(x) = 10 - 4x = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2} \Longrightarrow y = 5$$
$$S''(x) = -4 \Longrightarrow S''(5/2) = -4 \Longrightarrow \text{Maxímo}$$

Para que el área sea máxima los postes deben medir $x = \frac{5}{2}$ e $y = 5$ metros, respectivamente.

2. El área será $S = 5 \cdot \frac{5}{2} = 12,5\,\mathrm{m}^2$.

Problema 316 Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana, sin ningún cliente, y las cierra cuando se han marchado todos. La función que representa el número de clientes, dependiendo del número de horas que lleva abierto, es $C(h) = -h^2 + 8h$. El gasto por cliente decrece a medida que van pasando horas desde la apertura y sigue la función $g(h) = 300 - 25h$.

1. ¿En qué hora se produce la mayor afluencia de clientes?
2. ¿Cuánto gasta el último cliente?
3. ¿Cuándo hay mayor recaudación, en la cuarta o en la quinta hora?

Solución:

1.
$$C(h) = -h^2 + 8h \Longrightarrow C'(h) = -2h + 8 = 0 \Longrightarrow h = 4$$
$$C''(h) = -2 \Longrightarrow C(4) = -2 \Longrightarrow \text{Máximo en } \ h = 4$$
Como el comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana, la mayor afluencia de clientes ocurre pasadas cuatro horas, es decir, a las 13 horas (una del medio día).

2. El comercio se cierra cuando se marcha el último cliente, es decir, cuando $C(h) = 0 \Longrightarrow -h^2 + 8h = 0 \Longrightarrow h = 0$ y $h = 8$. Esto quiere decir que, el negocio cierra cuando pasan 8 horas, a las 17 horas (cinco de la tarde). El último cliente gastará:
$$g(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100\text{euros}$$

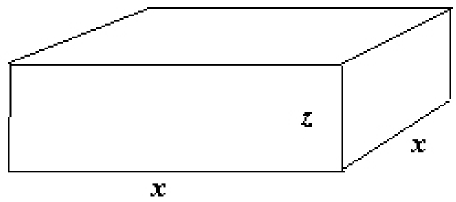
3. La recaudación vendrá definida por la función:
$$R(h) = C(h) \cdot g(h) = 25h^3 - 500h^2 + 2400h$$
En la cuarta hora se recaudará: $R(4) = 3200$

En la quinta hora se recaudará: $R(5) = 2625$

Luego se recauda más en la cuarta hora que en la quinta.

Problema 317 Determinar las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material.

Solución:



$$\begin{cases} x^2z = 32 \\ S = x^2 + 4xz \end{cases} \Longrightarrow S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 4, \ \ z = 2$$

$$S''(x) = 2 + \frac{156}{x^3} \Longrightarrow S''(4) > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

El cuadrado del fondo tiene que tener 4 m de lado y la profundidad será de 2 m.

Problema 318 Sea $f(x) = x \cdot e^{-ax}$, con a un parámetro real.

1. Calcular los valores del pàrámetro a para que $f(x)$ tenga un máximo o un mínimo en $x = 3$. Para esos valores del parámetro decir si $x = 3$ es máximo o mínimo.

2. Para $a = -2$ escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$.

Solución:

1.

$$f'(x) = e^{-ax}(1 - ax) = 0 \Longrightarrow f'(3) = e^{-3a3}(1 - 3a) = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = x{\cdot}e^{-1/3\cdot x}, \ \ f'(x) = e^{-1/3\cdot x}\left(1 - \frac{x}{3}\right), \ \ f''(x) = -\frac{1}{3}e^{-1/3\cdot x}\left(2 - \frac{x}{3}\right)$$

$$f''(3) = -\frac{1}{3e} < 0 \Longrightarrow \ \text{Máximo}$$

2. Si $a = -2$ tenemos $f(x) = x \cdot e^{2x}$

$$f'(x) = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

Luego decrece en el intevalo $(-\infty, 1/2)$ y crece en el $(1/2, +\infty)$, por lo que en $x = 1/2$ tiene un mínimo.

$$f''(x) = 2e^{2x}(2 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Problema 319 La función:

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$$

representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución:

Calculamos la primera derivada para obtener los puntos extremos

$$B'(x) = \frac{16 - x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 4$$

Calculamos la segunda derivada para decidir que valor es máximo o mínimo

$$B''(x) = -\frac{32}{x^3} \Longrightarrow \begin{cases} B''(4) = -\dfrac{32}{4^3} < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ \\ B''(-4) = -\dfrac{32}{(-4)^3} > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

En $x = 4$ hay un máximo que nos determina un beneficio

$$B(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = 1$$

El máximo serían 4 artículos con un beneficio de 1.000 euros.

3.8.5 Integrales

Problema 320 La parte superior de pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0,5x^2 + x + 1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.

Solución:

$$\int_0^2 (-0,5x^2 + x + 1)\, dx = -\frac{0,5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big]_0^2 = \frac{8}{3}\, u^2$$

Problema 321 Calcule el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{2x}$ y $y = \dfrac{x^2}{2}$.

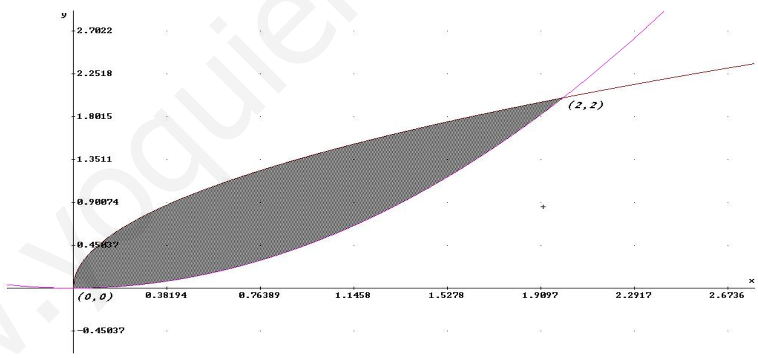
Solución:

Calculamos los puntos de corte de ambas gráficas

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 2$$

$$S = \left| \int_0^2 (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \sqrt{2} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{4}{3}\, u^2$$



Problema 322 En una pared azul de 8 metros de altura, se quiere pintar de blanco la figura que encierran las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$, ambas definidas en metros.

1. ¿Cuántos metros cuadrados hay que pintar de blanco?

2. Si la pared tiene 23 metros de longitud y se quiere repetir esa figura dejando 5 metros entre figura y figura, ¿cuánto costaría pintar las figuras, si cada metro cuadrado de blanco cuesta 2 euros?

Solución:

1. Calculamos los puntos de corte de ambas funciones

$$-x^2+3x+4=2x^2-3x+4 \Longrightarrow x=0,\ x=2$$

$$S=\left|\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

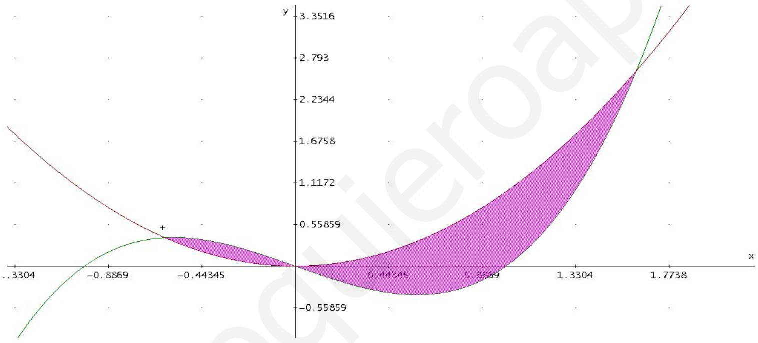
$$\int_0^2 [(-x^2+3x+4)-2x^2-3x+4]\,dx=$$

$$\int_0^2 (-3x^2+6x)\,dx=\left.-x^3+3x^2\right]_0^2=4\,m^2$$

2. Hay que pintar 4 figuras $\Longrightarrow 4\times 4=16\,m^2 \Longrightarrow 16\times 2=32$ euros.

Problema 323 Hallar el área de la región limitada por las gráficas $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=x^2$.

Solución:



$$x^3-x=x^2 \Longrightarrow x^3-x^2-x=0 \Longrightarrow x=0,\ x=1.62,\ x=-0.62$$

$$\int_{-0.62}^{0}(x^3-x^2-x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-0.62}^{0}=0.07581649333$$

$$\int_{0}^{1.62}(x^3-x^2-x)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1.62}=-1.007507159$$

$$S=|0.07581649333|+|-1.007507159|=1.083323652\,u^2$$

Problema 324 Calcular las siguientes integrales

1.

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$$

2.

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}}$$

3.

$$\int x \sin x^2 \, dx$$

Solución:

1.

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} \, dx = \left(\frac{2}{7}x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \right) \sqrt{x} + C$$

2.

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}} = \sqrt{6x+1} + C$$

3.

$$\int x \sin x^2 \, dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$$

Problema 325 Calcular

1. Encuentra la primitiva de la función $f(x) = 27 - x^3 + 3e^{2x-1}$ que en el 1 valaga 26,75.

2. Dibuja la función $f(x) = 27 - x^3$ y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 5$.

Solución:

1.

$$F(x) = \int (27 - x^3 + 3e^{2x-1}) \, dx = 27x - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}e^{2x-1} + C$$

$$F(1) = 26,75 \Longrightarrow 27 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^1 + C = 26,75 \Longrightarrow C = -\frac{3}{2}e$$

$$F(x) = 27x - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}e^{2x-1} - \frac{3}{2}e$$

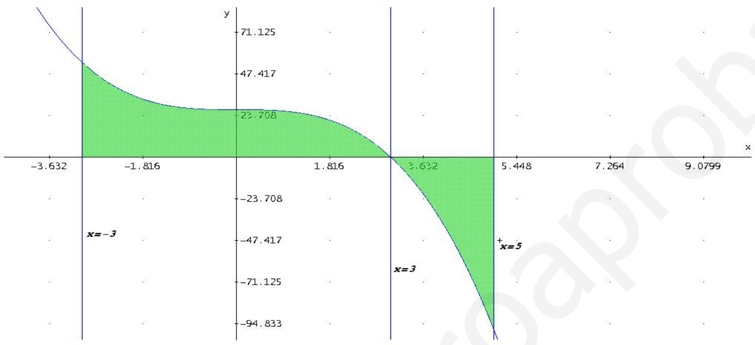
2. $f(x) = 27 - x^3$

   - $x = 0 \Longrightarrow (0, 27)$; $f(x) = 0 \Longrightarrow (3, 0)$.

- $f'(x) = -3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$, como $-3x^2 < 0$ siempre la función es siempre decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
- $f''(x) = -6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ como $f'''(x) = -6$, es decir, $f'''(0) = -6 \neq 0$ tenemos un punto de inflexión en $(0, 27)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty]$
$sig\, f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava

Está claro que, en $x = 0$ la función pasa de convexa a cóncava y, por tanto, tiene en él un punto de inflexión.



$$S = \left| \int_{-3}^{3} (27 - x^3)\, dx \right| + \left| \int_{3}^{5} (27 - x^3)\, dx \right|$$

$$\int_{-3}^{3} (27 - x^3)\, dx = \left[27x - \frac{x^4}{4} \right]_{-3}^{3} = 162$$

$$\int_{3}^{5} (27 - x^3)\, dx = \left[27x - \frac{x^4}{4} \right]_{3}^{5} = -82$$

$$S = |162| + |-82| = 162 + 82 = 244\, \mathrm{u}^2$$

Problema 326 Encontrar la función cuya segunda derivada es la constante 2, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto (1,2).

Solución:

$$f''(x) = 2 \Longrightarrow f'(x) = \int 2dx = 2x + C$$

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow 2 + C = 0 \Longrightarrow C = -2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 2$$

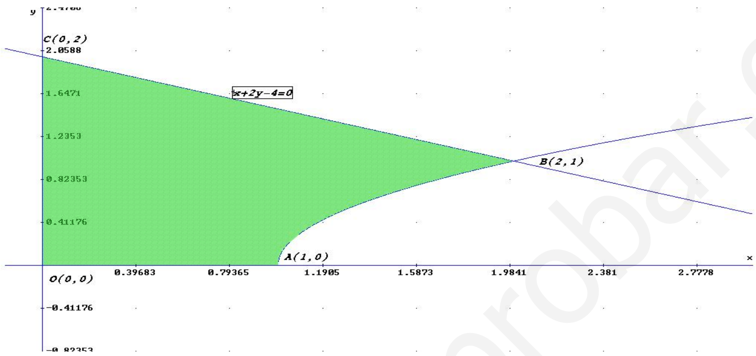
$$f(x) = \int (2x - 2)\, dx = x^2 - 2x + D$$

$$f(1) = 2 \Longrightarrow 1 - 2 + D = 2 \Longrightarrow D = 3$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Problema 327 Hacer la representación gráfica y calcular el área de la región de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(2,1)$ y $C(0,2)$ en la que los lados $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ y $\overline{BC}$ son segmentos rectilineos y el AB es un arco de la curva $y = \sqrt{x-1}$.

Solución:



La recta que pasa por los puntos C y B será:

$$y - 2 = \frac{1-2}{2-0}(x-0) \Longrightarrow y = \frac{-x+4}{2}$$

Tendremos:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{-x+4}{2}\right) dx - \int_1^2 \sqrt{x-1}\, dx = \frac{7}{3}\, u^2$$

Problema 328 Calcular la integral definida

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\, dx$$

Nota.- La notación $|x|$ representa el valor absoluto de x.

Solución:

$$\int_{-1}^{1} (|x| + x + 1)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x + x + 1)\, dx + \int_{0}^{1} (x + x + 1)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 (2x+1)\, dx = x\Big]_{-1}^{0} + x^2 + x\Big]_0^1 = 1 + 2 = 3$$

Problema 329 Sean las funciones

$$f(x) = x^2 - 2x - 8; \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + x + 4$$

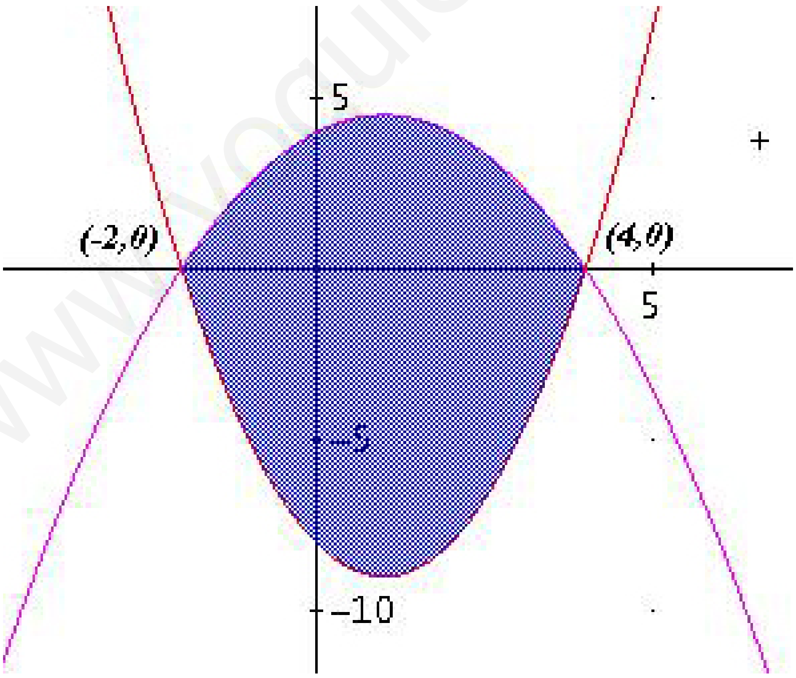
1. Calcular
$$\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{f(x)}{g(x)}$$

2. Calcular el recinto acotado limitado por las curvas $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

1.
$$\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow 4}\frac{x^2-2x-8}{-\frac{x^2}{2}+x+4} = \lim_{x\longrightarrow 4}\frac{2(x^2-2x-8)}{-x^2+2x+8} = -2$$

2.
$$x^2-2x-8 = -\frac{x^2}{2}+x+4 \Longrightarrow x^2-2x-8=0 \Longrightarrow x=4,\ \ x=-2$$
$$\int_{-2}^{4}\left[x^2-2x-8-\left(-\frac{x^2}{2}+x+4\right)\right]dx = \int_{-2}^{4}\frac{3(x^2-2x-8)}{2}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x^2-8x\right)\Big]_{-2}^{4} = -54$$
$$S = |-54| = 54\,u^2$$



Capítulo 4

Probabilidad y Estadística

4.1 Probabilidad

Problema 330 María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado,si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

1. Calcule la probabilidad de que gane Laura.
2. Calcule la probabilidad de que gane María.

Solución: El espacio muestral de lanzar dos dados es:

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(1,6),(2,1),...,(2,6),...,(6,1),...,(6,6)\}$$

1. $P(\text{gane Laura}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$
2. $P(\text{gane María}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Problema 331 Dados los sucesos A y B, se sabe que:

$$P(\overline{B}) = \frac{3}{4} \text{ y } P(A) = \frac{1}{3}$$

1. Razone si los sucesos A y B son independientes.
2. Calcule $P(A \cup B)$.

Solución:

1. Como $P(A) = P(A|B) \Longrightarrow$ los dos sucesos son independientes.
2. $$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cup B) = \frac{1}{3}+1-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Problema 332 Las probabilidades de aprobar los examenes de Historía, Lengua e Inglés son, para un alumno determinado: 2/3, 4/5 y 3/5 respectivamente. Obtener las probabilidades de:

1. Suspender las tres asignaturas.
2. Suspender solo una de las tres.
3. Suspender lengua si se sabe que solo suspendió una asignatura de las tres.

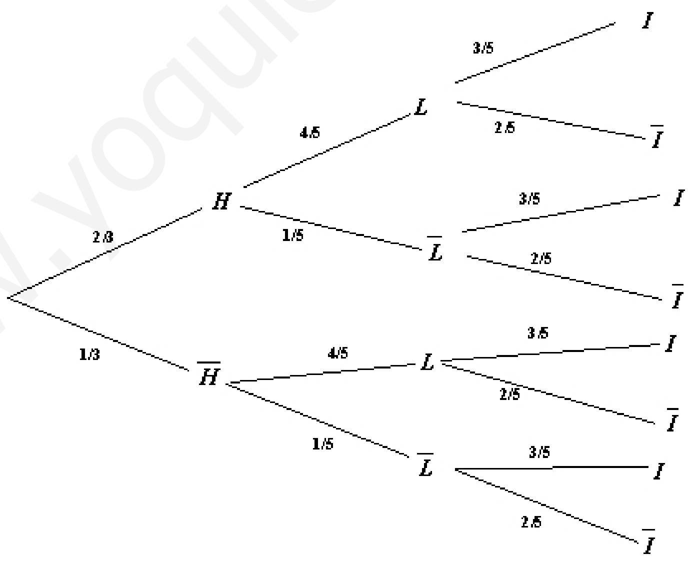
Solución:

Nombramos a los sucesos

H aprobar Historía $\Longrightarrow P(H) = \dfrac{2}{3},\ P(\overline{H}) = \dfrac{1}{3}$

L aprobar Lengua $\Longrightarrow P(L) = \dfrac{4}{5},\ P(\overline{L}) = \dfrac{1}{5}$

I aprobar Inglés $\Longrightarrow P(I) = \dfrac{3}{5},\ P(\overline{I}) = \dfrac{2}{5}$



1. $P(\overline{H} \cap \overline{L} \cap \overline{I}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{75}$

2. $P(\text{ suspender solo una asignatura}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{34}{75}$

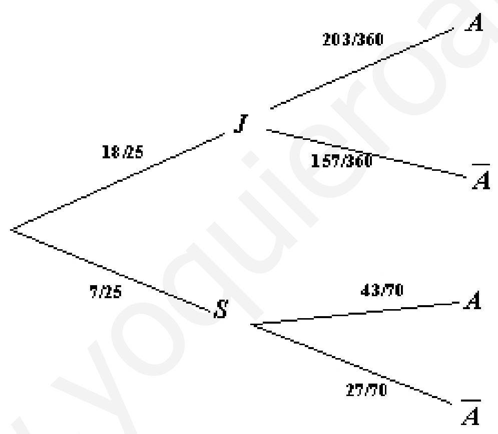
3. $P(\overline{L}|\text{ solo suspendió una asignatura}) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{34}{75}}=\frac{3}{17}$

Problema 333 En una determinada asignatura hay matriculados 2500 alumnos. En Junio se presentaron 1800 de los que aprobaron 1015, mientras que en Septiembre, de los 700 que se presentaron, suspendieron 270. Elegido al azar un alumno matriculado en esa asignatura,

1. Calcula la probabilidad de que haya aprobado.

2. Si ha suspendido la asignatura, cuál es la probabilidad de haberse presentado en Septiembre.

Solución:



1. $P(A) = \frac{18}{25}\cdot\frac{203}{360}+\frac{7}{25}\cdot\frac{43}{70}=\frac{289}{500}=0,578$

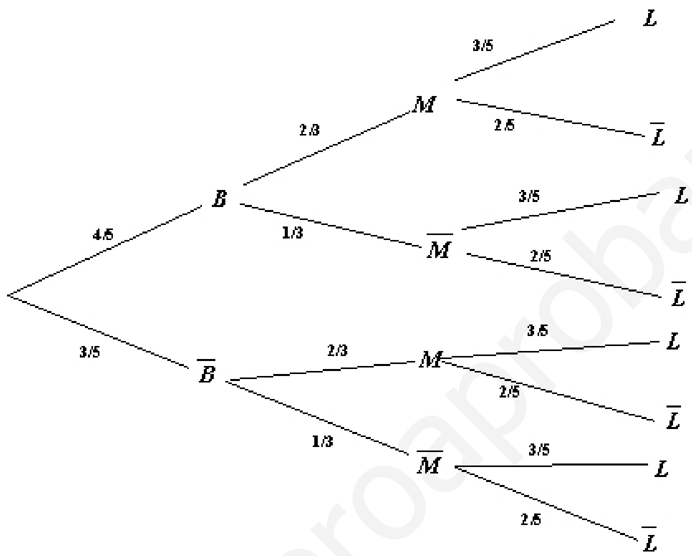
2. $P(S|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|S)\cdot P(S)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{43}{70}\cdot\frac{7}{25}}{1-\frac{289}{500}}=\frac{54}{211}=0,256$

Problema 334 En un centro de Secundaria aprueba Biología 4 de cada 5 alumnos, las Matemáticas las aprueban 2 de cada 3 y 3 de cada 5 alumnos aprueban Lengua. Elegido al azar un alumno matriculado de esas asignaturas en ese centro, calcula la probabilidad de que:

1. Suspenda esas tres asignaturas.

2. Suspenda solo una de ellas.

Solución:



1. $P(\text{Suspender las tres}) = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{75}$

2. $P(\text{suspender una}) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{34}{75}$

Problema 335 Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,5$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? Razona la respuesta.

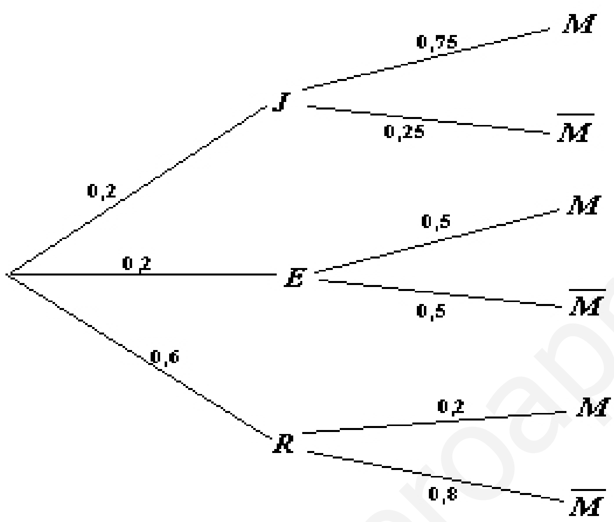
Solución:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,4 + 0,2 - 0,5 = 0,1 \neq 0$$

Luego los sucesos no son incompatibles.

Problema 336 El 20% de los habitantes de una determinada población son jubilados y otro 20% son estudiantes. La música clásica les gusta al 75% de los jubilados, al 50% de los estudiantes y al 20% del resto de la población. Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar a la que le gusta la música clásica sea jubilada.

Solución:



$$P(J|M) = \frac{P(J\cap M)}{P(M)} = \frac{0,2\cdot 0,75}{0,2\cdot 0,75+0,2\cdot 0,5+0,6\cdot 0,2} = 0,4$$

Problema 337 El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de Mayo eran españoles. De éstos, el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:

1. La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.

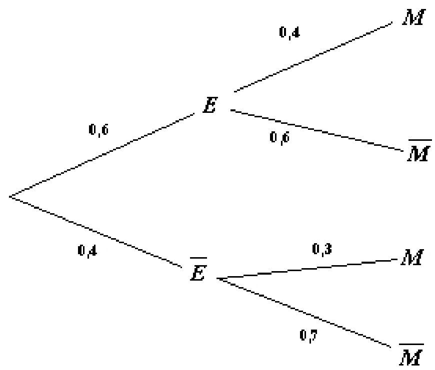
2. Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

Solución:

$E =$ Español

$M =$ Menos de 20 años

1. $P(M) = 0,6\cdot 0,4 + 0,4\cdot 0,3 = 0,36$

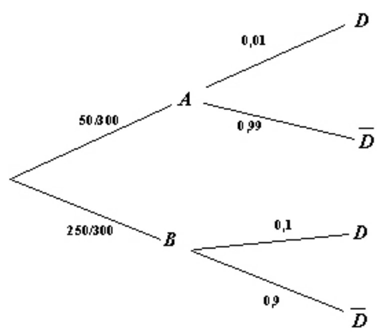


2. $P(\overline{E} \cap \overline{M}) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

Problema 338 Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10% respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:

1. La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.
2. La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A, si sabemos que es defectuosa.

Solución:



1. $P(\overline{D}\cap B)=\dfrac{250}{300}\cdot 0,9=0,75$

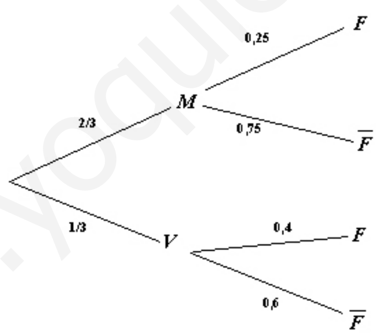
2.
$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{50}{300}\cdot 0,01}{\frac{50}{300}\cdot 0,01+\frac{250}{300}\cdot 0,1}=0,0196$$

Problema 339 En el segundo de bachillerato de cierto instituto se han matriculado el doble de mujeres que de varones. Sabiendo que un 25% de las mujeres fuman y que no lo hacen el 60% de los varones, dterminar la probabilidad de que seleccionada al azar una persona en el segundo curso de bachillerato de ese instituto resulte ser una persona fumadora. Justificar la respuesta.

Solución:

V varón, M mujer y F fumador.

$$\left\{\begin{array}{l} P(M)=2P(V)\\ P(M)+P(V)=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(M)=\frac{2}{3}\\ P(V)=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$



$$P(F)=\frac{2}{3}\cdot 0,25+\frac{1}{3}\cdot 0,4=0,3$$

Problema 340 En una empresa, el 20% de los trabajadores son mayores de 45 años, el 8% desempeña algún puesto directivo y el 6% es mayor de 45 años y desempeña algún puesto directivo.

1. ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 45 años y no desempeña ningún cargo directivo?

2. ¿Qué porcentaje de los trabajadores no es directivo ni mayor de 45 años?

3. Si la empresa tiene 150 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 45 años?

Solución:

M: mayor de 45 años

D: directivo

Elaboramos la siguiente tabla

	M	$\overline{M}$	
D	6	2	8
$\overline{D}$	14	78	92
	20	80	100

1. $M \cap \overline{D} = 14\%$

2. $\overline{D} \cap \overline{M} = 78\%$

3. $D \cap \overline{M} = 2\%$

Problema 341 Una urna A contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna B contiene 1 blanca y 2 negras. Se extrae una bola al azar de la urna A y se pone en la B.Depués se extrae de la urna B una bola al azar.

1. Calcule la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.

2. Suponiendo que la bola extraída de la urna B ha sido blanca, calcule la probabilidad de que la bola extraída de la urna A también haya sido blanca.

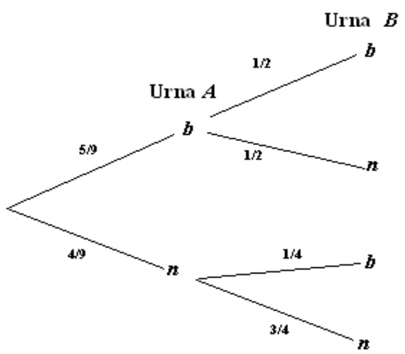
Solución:

1.

$$P\left(b_{\text{Urna } B}\right) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

2.

$$P\left(b_{\text{Urna } A} | b_{\text{Urna } B}\right) = \frac{P\left(b_{\text{Urna } A} \cap b_{\text{Urna } B}\right)}{P\left(b_{\text{Urna } B}\right)} = \frac{5/9 \cdot 1/2}{7/18} = \frac{5}{7}$$



Problema 342 Dos parejas de novios deciden ir al cine. Si se sientan al azar en cuatro butacas contiguas, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno esté sentado al lado de su pareja?

Solución:

Vamos a tener las parejas (X, x) e (Y, y). Los casos favorable serán (Xx, Yy), (Xx, yY), (xX, Yy), (xX, yY), (Yy, Xx), (Yy, xX), (yY, Xx) y (yY, xX) es decir, serán 8. Los casos posibles serán $4! = 24$. La probabilidad será:

$$P(\text{Parejas juntas}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Problema 343 Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa p_1 detecta la presencia de un virus con una probabilidad de 0,9 y el programa p_2 detecta la presencia de un virus con una probabilidad de 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de que un virus no sea detectado?

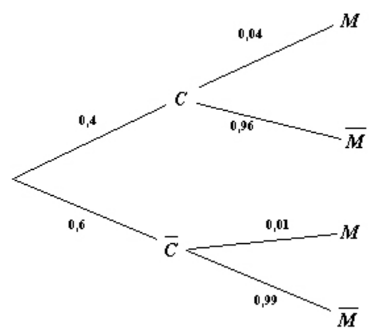
Solución:

$$P(\text{no detectado}) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$$

Problema 344 En un colegio el 4% de los chicos y el 1% de las chicas miden más de 175 cm de estatura. Además el 60% de los estudiantes son chicas. Si se selecciona al azar un estudiante y es más alto de 175 cm, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea chica?

Solución:

C: Chico, $\overline{C}$: Chica, M: mide más de 175 cm, $\overline{M}$: mide menos de 175 cm.



$$P(\overline{C}|M)=\frac{P(M|\overline{C})P(\overline{C})}{P(M)}=\frac{0,6\cdot 0,01}{0,4\cdot 0,04+0,6\cdot 0,01}=0,2727$$

Problema 345 La probabilidad de que un estudiante universitario termine su carrera en los años establecidos por el plan de estudios es 3/5 y de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es 2/3. Halla la probabilidad de que:

1. Ambos terminen sus estudios en los años establecidos.
2. Solo el varón los termine en el plazo fijado.
3. Al menos uno de los dos los termine en el tiempo establecido.

Solución:

V: Varón que termina en años establecidos.

H: Hermana que termina en años establecidos

1. $$P(V\cap H)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

2. $$P(V\cap\overline{H})=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

3. $$1-P(\overline{V}\cap\overline{H})=1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{15}$$

Problema 346 En un grupo de personas, al 50% les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12,5% no les han puesto nunca una multa pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, al 60% de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.

1. ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente ni les han puesto nunca una multa?
2. ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?
3. Entre las personas que nunca han tenido una multa, ¿qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?

Solución:

Podemos poner, A: accidente, M: multa. Y tenemos

$$P(M) = P(\overline{M}) = 0,5$$

$$P(\overline{M} \cap \overline{A}) = 0,5 - 0,125 = 0,375$$

El 60% de 0,375 es 0,625$\Longrightarrow P(A) = 0,625$ y $P(\overline{A} = 0,375$.

$$P(A \cup M) = 0,375 - 0,125 = 0,25; \ \ P(M \cup \overline{A}) = 0,5 - 0,25 = 0,25$$

	M	$\overline{M}$	
A	$0,25$	$0,125$	$0,375$
$\overline{A}$	$0,25$	$0,375$	$0,625$
	$0,5$	$0,5$	1

1. $P(\overline{A} \cup \overline{M}) = 0,375$, 37,5%
2. $P(\overline{A}) = 0,625$, 62,5%
3. $$P(\overline{A}|\overline{M}) = \frac{\overline{A} \cup \overline{M}}{\overline{M}} = \frac{0,375}{0,5} = 0,75 \Longrightarrow 75\%$$

Problema 347 En la urna U_1 hay 4 bolas blancas, numeradas de 1 a 4, y 2 bolas negras numeradas de 1 a 2, mientras que en la urna U_2 hay 2 bolas blancas, numeradas de 1 a 2, y 4 bolas negras numeradas de 1 a 4. S se extraen al azar dos bolas, una de cada urna, hallar:

1. La probabilidad de que tengan el mismo número.
2. La probabilidad de que sean del mismo color.

Solución:

1.

$$P(\text{mismo color}) = P(1,1) + P(2,2) + P(3,3) + P(4,4) =$$

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

2.

$$P(\text{mismo color}) = P(b,b) + P(n,n) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

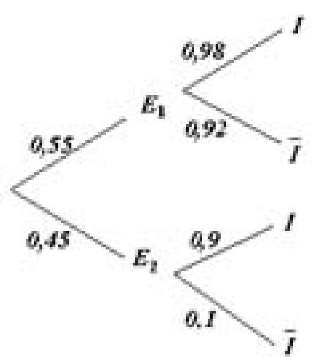
Problema 348 Para ir al trabajo, un individuo toma el bus, el 30% de las veces, o el metro (el 70% restante), y llega tarde el 40% de las veces que va en bus y el 20% de las que va en metro. Cierto día llegó tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que tomara el bus?

Solución:

$$P(B|T) = \frac{P(B\cup T)}{P(T)} = \frac{0,3\cdot 0,4}{0,3\cdot 0,4 + 0,7\cdot 0,2} = 0,46$$

Problema 349 Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es $0,55$ y por E_2 es $0,45$. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que de lugar a indemnización es 0,98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0,90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

Solución:

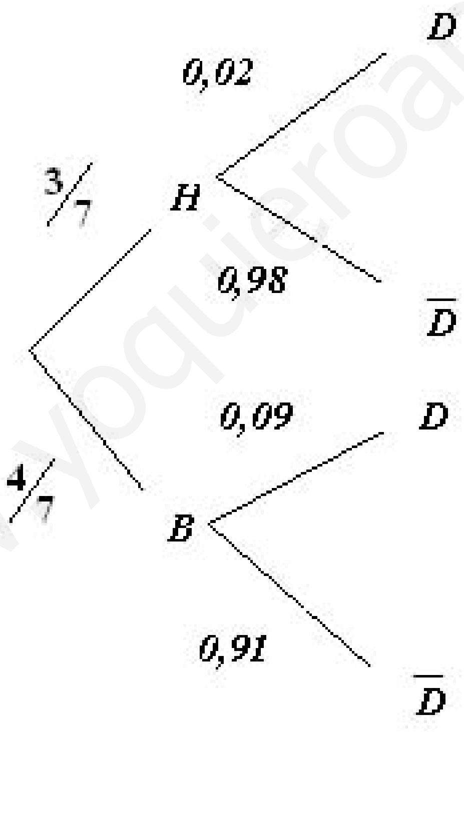


$$P(I) = P(I|E_1)P(E_1) + P(I|E_2)P(E_2) = 0,55 \cdot 0,98 + 0,45 \cdot 0,90 = 0,944$$

$$P(E_2|I) = \frac{P(I|E_2)P(E_2)}{P(I)} = \frac{0,9 \cdot 0,45}{0,944} = 0,429$$

Problema 350 En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0,02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0,09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?.

Solución:



$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|H)P(H) + P(\overline{D}|B)P(B) = \frac{3}{7} \cdot 0,98 + \frac{4}{7} \cdot 0,91 = 0,94$$

$$P(H|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|H)P(H)}{P(\overline{D})} = \frac{0,98 \cdot \frac{3}{7}}{0,94} = 0,4468$$

Problema 351 Una cierta instalación de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es $0,95$ y de que se active el segundo es $0,90$.

1. Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno de los indicadores.

2. Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

Solución:
LLamamos $A = \{\text{se enciende el indicador } 1^o\}$, $P(A) = 0,95$, $P(\overline{A}) = 0,05$
LLamamos $B = \{\text{se enciende el indicador } 2^o\}$, $P(B) = 0,90$, $P(\overline{B}) = 0,10$

1. $P(\text{se enciende uno sólo}) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = 0,95 \cdot 0,10 + 0,05 \cdot 0,90 = 0,14$

2. $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,05 \cdot 0,10 = 0,995$

Problema 352 En una población, el 40% son hombres y el 60% mujeres. En esa población el 80% de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionados al futbol.

1. Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al futbol.

2. Elegida al azar una person resulta ser aficionada al futbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?.

Solución:
LLamamos $H = \{\text{hombre}\}$, $M = \{\text{mujer}\}$, $A = \{\text{aficionado}\}$, $\overline{A} = \{\text{no aficionado}\}$.

1.
$$P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M) = 0,80 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,60 = 0,44$$

2.
$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,20 \cdot 0,60}{0,44} = 0,273$$

Problema 353 Una caja con una docena de huevos contiene dos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos.

1. Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado.
2. Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

Solución:

1. LLamamos $A = \{\text{sale un huevo en buen estado}\}$
   LLamamos $B = \{\text{sale un huevo roto}\}$
   $$P(AAAA) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{14}{99} = 0,1414141414$$
2.
   $$P(BAAA) + P(ABAA) + P(AABA) + P(AAAB) =$$
   $$4 \cdot P(BAAA) = 4 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{224}{495} = 0,4525252525$$

Problema 354 En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres unos", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos"y "Obtener una suma de cuatro".

Solución:

1. $P(111) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,00463$
2. $P(\textit{algún } 2) = 1 - P(\textit{ningún } 2) = 1 - P(\overline{222}) = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = 0,4213$
3. $P(3 \ \textit{distintos}) = 1 - P(3 \ \textit{iguales}) = 1 - 6P(111) = 0,972$
4. $P(\textit{suma} = 4) = P(211) + P(121) + P(112) = 3P(211) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,0139$

4.2 Problemas de Probabilidad sin Resolver

Problema 355 En un instituto se ofertan tres modalidades excluyetes, A, B y C, y dos idiomas excluyentes, inglés y francés. La modalidad A es elegida por un 50% de los alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%.

También se conoce que han elegido inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido francés el resto de los alumnos.

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto ha elegido francés?. (18%)
2. Si se elige al azar un estudiante de francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?. $(0,\widehat{5}\,)$

Problema 356 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

1. Justifica si A y B son independientes. (No lo son)
2. Calcula $P(A/\overline{B})$ y $P(B/\overline{A})$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son los contrarios de A y B, respectivamente. $(0,75$ y $0,\widehat{6}\,)$

Problema 357 *(3 puntos)*Tres bolsa identicas contienen bolas de cristal: la primera, 6 lisas y 4 rugosas; la segunda, 5 lisas y 2 rugosas; y la tercera 4 lisas y 7 rugosas.
Determina:

1. La probabilidad de que al extraer una bola al azar de una bolsa al azar sea rugosa. (0,44)
2. Se ha hecho una extración de una bola al azar y ha resultado ser lisa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido de la primera bolsa?. (0,36)
3. En la extracción anterior se nos ha caido la bola al suelo y se ha roto. ¿Cuáles son las probabilidades de que en una nueva extracción al azar salga rugosa?. (0,49)

Problema 358 En un experimento aleatorio,la probabilidad de un suceso A es dos veces la probabilidad de otro suceso B, y la suma de la probabilidad de A y la probabilidad del suceso contrario a B es 1,3. Se sabe, además, que la probabilidad de la intersección de A y B es 0,18. Calcular la probabilidad de que:

1. Se verifique el suceso A o se verifique el suceso B. (0,72)
2. Se verifique el suceso contrario de A o se verifique el suceso contrario de B. (0,82)
3. ¿Son independientes los sucesos A y B?. (Son independientes)

Problema 359 Se dispone de tres monedas. La primera de ellas está trucada, de forma que la probabilidad de obtener cara es 0,4. La segunda moneda tiene dos cruces y la tercera moneda también está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,6. Se pide:

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de estas tres monedas, sucesivamente y en el orden indicado.
$(E = \{(CXC), (CXX), (XXC), (XXX)\})$

2. Probabilidad de que se obtengan, exactamente, 2 cruces. (0,52)
3. Probabilidad del suceso A =(CARA, CRUZ,CARA). (0,24)
4. Prbabilidad de obtener, al menos, una cara. (0,76)

Problema 360 Tres máquinas, A, B y C, producen el 50%, el 30% y el 20%, respectivamente, del total de los objetos de una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son, respectivamente, el 3%, el 4% y el 5%.

1. Si selecciona un objeto al azar, ¿qué probabilidad tiene de salir defectuoso?. (0,037)
2. Suponiendo que es defectuoso, ¿cúal es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A?. (0,405)

Problema 361 En el experimento de lanzar sucesivamente tres monedas, sea el suceso A sacar más caras que cruces, y el suceso B, sacaruna o dos cruces. Hallar todos los casos que integran el suceso $A \cup B$.

Problema 362 En un estudio realizado en cierta universidad, se ha determinado que un 20% de sus estudiantes no utiliza transportes públicos para acudir a sus clases y que un 65% de los estudiantes que utilizan transportes públicos, también hacen uso del comedor universitario.

Calcula la probabilidad de que seleccionando al azar un estudiante en esa universidad, resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario. Justifica la respuesta. (0,52)

Problema 363 De los tornillos que produce una fábrica, el 60% son producidos por la máquina A, y el resto, por la máquina B.

Supóngase que el 12% de los tornillos producidos por A son defectuosos y que el 8% de los producidos por B son defectuosos.

1. Elegido al azar un tornillo producido por esa fábrica, ¿cúal es la probabilidad de que sea defectuoso?. (0,1)
2. Se elige al azar un tornillo y resulta que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A?. (0,72)

Problema 364 Un determinado club tiene un 75% de sus miembros que son hombres y un 25% que son mujeres. De este club tienen teléfono móvil un 25% de los hombres y un 50% de las mujeres.

1. Calcula el porcentaje de miembros de este club que no tienen teléfono móvil. (0,6875)

2. Calcula la probabilidad de que un miembro de este club elegido al azar entre los que tienen teléfono móvil sea mujer. (0,4)

Problema 365 Se ha realizado una encuesta entre los estudiantes de una universidad para conocer las actividades que realizan en el tiempo libre. El 80% de los entrevistados ve la televisión o lee; el 35% realiza ambas cosas y el 60%, no lee. Para un estudiante elegido al azar, calcula la probabilidad de que:

1. Vea la televisión y no lea. (0,4)
2. Lea y no vea la televisión. (0,05)
3. Haga solamente una de las dos cosas. (0,45)
4. No haga ninguna de las dos cosas. (0,2)

Problema 366 De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen, al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas estraidas sean blancas?.(0,4)
2. Si la segunda bola ha resultado negra, ¿cúal es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?. (0,2)

Problema 367 Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

1. Calcula $P(A \cap B)$ y razona si A y B son independientes. (0,1; no son independientes)
2. Calcula $P(A \cup B)$. (0,7)

Problema 368 De una baraja española (la de 40 cartas), se sacan al azar dos cartas. Encuentra la probabilidad de que:

1. Ambas sean oros. (con devolución: 1/16; sin devolución: 3/52)
2. Las dos sean de distinto palo. (con devolución: 3/4; sin devolución: 10/13)

Problema 369 En una urna A hay 5 bolas blancas y dos rojas, y en otra B hay 3 bolas verdes, 6 blancas y 5 rojas. Se lanza un dado trucado, con las caras numeradas del 1 al 6 y en el que la probabilidad de obtener un 6 es el doble que la de obtener cualquier otro número. Si en el lanzamiento del dado sale un número par, se saca una bola de la urna A, y si sale un número impar, la bola se saca de la urna B.

Determina la probabilidad de que la bola que se saque sea roja. (31/98)

Problema 370 Un tratamiento para el cancer produce mejoría en el 80% de los enfermos a los que se les aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide: (binomial)

1. Calcula la probabilidad de que los cinco pacientes mejoren. (0,3277)
2. Calcula la de probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría. (0,0576)
3. ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren? (4)

Problema 371 Dos compañeros de estudios comparten piso. El primero prepara la comida el 40% de los días y el resto de los días lo hace el segundo. El porcentaje de veces que se le quema al primero es el 5%, mientras que el del segundo es el 8%. Calcula la probabilidad de que un día, elegido al azar, la comida esté quemada. (0,068)

Si cierto día se ha quemado, calcula la probabilidad de que haya cocinado el primero. (0,294)

Problema 372 Dos jovenes aficionados a los juegos de azar se encuentran realizando un solitario con una baraja española de 40 cartas. Extraen una carta de dicha baraja y desean saber cúal es la probabilidad de "obtener rey" condicionado al suceso "obtener figura".

Caracteriza ambos sucesos. (1/3)

Problema 373 Se lanzan dos dados. Halla:

1. La probabilidad de que una de las puntuaciones sea par y la otra impar. (1/2)
2. La probabilidad (condicional) de que una de las putuaciones sea par, sabiendo sabiendo que la suma de las dos es 7. (1)

Problema 374 En una fábrica de tornillos, la máquina A produce un 40% del total y la máquina B, el 60%. De los tornillos fabricados por A, el 10% son defectuosos, y de los fabricados por B son defectuosos el 20%.

Si se elige al azar un tornillo y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecho por A.(1/4)

Problema 375 De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente, y sin reposición, dos cartas. Se pide calcular la probabilidad de que:

1. La primera carta sea de copas y la segunda de espadas. (5/78)

2. Una carta sea de copas y la otra de espadas. (5/39)
3. Ninguna sea de bastos. (29/52)
4. Las dos sean de oros. (3/52)

Problema 376 Dos urnas A y B, que contienen bolas de colores, tienen la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas
B: 4 blancas y 6 negras

También tengo un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?. (7/15)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?. (2/15)
3. La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cúal es la probabilidad de que proceda de la urna B?. (2/7)

Problema 377 En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: Sacar al menos una cara y una cruz.
B: Sacar a lo sumo una cara.

1. Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.
2. ¿Son independientes ambos sucesos? (son independientes)

Problema 378 De una baraja de cartas se extraen dos de ellas, una tras otra. Determinar:

1. La probabilidad de que las dos sean copas. (3/52)
2. La probabilidad de que al menos una sea copas. (23/52)
3. La probabilidad de que una sea copas y la otra espadas. (5/39)

Problema 379 Se dispone de un dado trucado de cuatro caras con puntuaciones: 1,2,3,4, de modo que $P(4) = 4P(1)$, $P(3) = 3P(1)$, $P(2) = 2P(1)$, en donde $P(4)$ indica la probabilidad de obtener un 4 y así sucesivamente.Se dispone también de dos urnas con la siguiente composición:

U_1: 1 bola roja y 2 verdes.
U_2: 2 bolas rojas y 3 verdes.

Se lanza el dado. Si sale un número par extraemos una bola de la urna U_1. Si sale un número impar extraemos una bola de la urna U_2. Se pide:

1. Determina las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras. (P(1)=1/10, P(2)=1/5, P(3)=3/10, P(4)=2/5)

2. Se lanza el dado y a continuación extremos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde. (16/25)

Problema 380 Un estuche contiene 5 lápices de igual forma y tamaño: 2 de color azul y 3 de color verde. Se extrae un lápiz del estuche y a continuación, sin reemplazamiento, se extrae otro lápiz. Se pide:

1. Escribir los sucesos elementales que definen los sucesos $M =${Sólo ha salido un lápiz de color verde} y $N =${El segundo lápiz extraido es de color azul}.

2. Calcula las probabilidades de los sucesos M, N y $M \cap N$. (3/10)

3. Estudia la independencia de los sucesos M y N. Razona la respuesta. (no son independientes)

Problema 381 En una asesoría fiscal se han contratado a tres personas para hacer declaraciones de la renta. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las declaraciones realizadas por la primera persona, el 1% son erroneas, la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.

1. Calcula la probabilidad de que, al elegir al azar una declaración de renta, esta sea erronea. (0,0215)

2. Al elegir una declaración que resulto correcta, ¿cúal es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?. (0,4461)

Problema 382 Se lanza un dado dos veces. Sea A el suceso {obtener 1 en la primera tirada} y sea B el suceso {obtener 2 en la segunda tirada}. Calcula $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?. (P(A)=P(B)=1/6, son independientes)

Problema 383 Consideremos el siguiente juego entre dos personas:

De una bolsa con bolas rojas y negras se sacan dos bolas. Si son del mismo color se gana el juego y si no, es el turno del otro jugador. El juego continua hasta que uno de los jugadores gana o en la bolsa no quedan bolas. Si en la bolsa hay 4 bolas rojas y 2 negras:

1. Halla la probabilidad de que el jugador que empieza gane en la primera tirada. (7/15)

2. El primer jugador no ha ganado. Es el turno del segundo jugador. Halla la probabilidad de que gane en esta tirada.(1/2)

Problema 384 Los sucesos A y B de un experimento aleatorio verifican que $A \in B$. Expresa las probabilidades $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ y $P(B - A)$ en función de $P(A)$ y $P(B)$. ($P(B)$, $P(A)$, $P(B) - P(A)$)

Problema 385 La ciudad A tiene el doble de habitantes que la ciudad B, pero un 30% de ciudaddanos de B lee literatura, en tanto que solo un 10% de ciudadanos de A lee literatura.

1. De un ciudadano solo sabemos que vive en la ciudad A o en la ciudad B. Calcular de forma razonada la probabilidad de que lea literatura. (1/6)

2. Si nos presentan a un ciudadano que vive en la ciudad A o en la ciudad B, pero del que sabemos que lee literatura, calcular razonadamente la probabilidad de que sea de la ciudad B. (0,6)

Problema 386 La baraja española consta de 10 cartas de oros, 10 de copas, 10 de espadas y 10 de bastos.

Se extraen tres cartas. Calcula razonadamente cúal es la probabilidad de que, al menos, una de las cartas sea oros en los siguientes supuestos:

1. No se devuelven las cartas después de cada extración. (291/494)

2. Después de cada extracción se devuelve la carta a la baraja antes de la siguiente extracción. (37/64)

Problema 387 El ganado ovino de una región es sometido a un control sanitario para comprobar que está libre de cierta enfermedad infecciosa. En el proceso de control cada animal es sometido a las pruebas $P1$, $P2$ y $P3$ (en ese orden). Por experiencia se sabe que en el 95% de los casos $P1$ da resultado negativo, que 10 de cada 100 ovejas sometidas a $P2$ dan resultado positivo y que con probabilidad $0,03$ $P3$ da resultado positivo. Sabiendo que si una prueba da resultado positivo el animal es sacrificado, determinar la posibilidad de que una oveja sometida a dicho proceso de control no sea sacrificada. Justificar la respuesta. (0,8293)

Problema 388 Cuando los motores llegan al final de una cadena de producción un inspector escoge los que deben pasar una inspección completa. Supóngase que se producen un 10% de motores defectuosos, y que el 60% de todos los motores defectuosos y el 20% de los buenos pasan una inspección completa. Calcúlese:

1. Probabilidad de que un motor elegido al azar sea defectuoso y haya pasado la inspección. (0,06)

2. Probabilidad de que un motor elegido al azar sea bueno y haya pasado la inspección. (0,18)

3. Si conocemos que el 24% de los motores pasan la inspección, ¿qué porcentaje de los mismos son defectuosos?. (0,25)

Problema 389 El 30% de los habitantes de una ciudad determinada lee el diario *La Nació*, el 13% el diario XYZ, y el 6% lee los dos.

1. ¿Qué porcentaje de habitantes de esta ciudad no lee ninguno de los dos diarios?. (63%)

2. Se elige un habitante de esta ciudad al azar entre los que no leen el diario XYZ, ¿cúal es la probabilidad de que lea el diario *La Nació*. (8/29)

Problema 390 Dos sucesos incompatibles, A y B, tienen probabilidades respectivas 0,2 y 0,60. Calcular la probabilidad de que suceda A pero no B. (0,2)

Problema 391 Entre los estudiantes matriculados en cierta asignatura de una carrera universitaria las chicas duplican a los chicos. Al final del curso han aprobado el 80% de las chicas y el 60% de los chicos. Calcula:

1. El porcentaje de chicas dentro del total de estudiantes matriculados. (66,7%)

2. El porcentaje de aprobados dentro del total de estudiantes matriculados. (73,3%)

3. El porcentaje de chicas dentro de los estudiantes que no han aprobado. (50%)

Problema 392 Una fabrica produce tres modelos de coches: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son del tipo A y el 30% del tipo B. El 30% de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30% de los coches del modelo A son de motor diesel y el 20% de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige al azar un coche. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. El coche es del modelo C. (0,1)
2. El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel. (0,6)
3. El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C. (0,6)

Problema 393 Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, de 0,02 para B y de 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?. (0,985)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?. (0,603)

Problema 394 A unas elecciones se presentan seis candidatos: A, B, C, D, E y F. Se es tima que B, C y D tienen la misma probabilidad de ganar, que es la mitad de la probabilidad de que gane A y que E y F tienen la misma probabilidad de ganar, que es el triple de la probabilidad de que gane A. Calcule:

1. La probabilidad que tiene de ganar cada candidato. ($P(A) = 2/17,\ P(B) = P(C) = P(D) = 1/17,\ P(E) = P(F) = 6/17$)
2. La probabilidad de que gane A o F. (8/17)

Problema 395 Dos urnas A y B contienen bolas. La A tiene 4 bolas rojas, 2 verdes y 3 negras. La B tiene 3 rojas, 2 blancas y 4 negras. De una baraja española de 40 cartas, se extrae una carta. Si la carta extraída es un oro o una figura, se extrae una bola de la urna A. En caso contrario la bola se extrae de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de que al realizar este proceso se obtenga una bola negra? (47/120)

Problema 396 Hay dos urnas, la primera con 7 bolas blancas y 3 negras, la segunda con 3 bolas blancas y 6 negras. Se extrae al azar una bola de la primera urna y se pasa a la segunda. De esta urna, también al azar se saca una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca. (37/100)

Problema 397 Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento sobre 120 personas aquejadas de cierta enfermedad. 30 de ellas ya habían padecido esta enfermedad co anterioridad. Entre las que la habían padecido con anterioridad, el 80% ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre las que no la habían padecido, ha sido el 90% el que reaccionó positivamente.

1. Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los 2 ya hayan padecido esta enfermedad?. (29/476)

2. Si elegimos un paciente al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no reaccione positivamente al nuevo tratamiento?. (0,125)

3. Si un paciente ha reaccionado positivamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad anterioridad?. (0,77)

Problema 398 De una urna, en la que hay 2 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras, se extraen 3 bolas simultáneamente. Hallar la probabilidad de que dos de ellas (y sólo dos) sean del mismo color. (55/84)

Problema 399 Supóngase que el tiempo (climatológico) sólo se puede clasificar como bueno o malo y que, en cierta zona, la probabilidad de que se produzca, de un día para otro, un cambio de tiempo es de 0,3. Si la probabilidad de que haga buen tiempo (en esa zona) el día 20 de Junio es de 0,4, ¿qué probabilidad hay de que el 21 de Junio haga buen tiempo?. (0,46)

Problema 400 En una empresa el 65% de sus empleados saben manejar un ordenador y de estos el 40% hablan inglés. La cuarta parte de los que no saben manejar el ordenador hablan inglés. Calcular la probabilidad de que elgido al azar un empleado de esta empresa:

1. Hable inglés y maneje el ordenador. (0,26)

2. Hable inglés. (0,35)

3. Maneje el ordenador, sabiendo que habla inglés. (0,74)bn ¡

Problema 401 Los alumnos de Bachillerato de un I.E.S. proceden de 3 localidades distintas, A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto, 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto, 2º.

1. Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S., ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?. (0,39)

2. Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese I.E.S. y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B?. (0,38)

Problema 402 Según la estadística de los resultados en las Pruebas de Acceso en una provincia andaluza, en septiembre de 2001, el número de alumnas presentadas es 840, de las que han aprobado un 70%, mientras que el número de alumnos presentados es 668, habiendo aprobado un 75% de éstos.

1. Elegida, al azar, una persona presentada a las Pruebas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado? (0,72)

2. Sabiendo que una persona ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?. (0,46)

Problema 403 En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca consecutivamente a 4, diferentes, a la pizarra. Se pide hallar:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnas? (4/45)

2. Siendo la primera alumna, ¿cuál es la probabilidad de que sean alternativamente una alumna y un alumno?. (22/195)

3. ¿Cuál es la probabilidad de que sean dos alumnas y dos alumnos?. (176/455)

Problema 404 Para la señalización de emergencia de una fábrica se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador A se accione en una avería es 0,99, mientras que la de que se accione el indicador B es 0,95. Si se produce una avería:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se accione un sólo indicador? (0,059)

2. ¿Cuál es la probabilidad de que no se accione niongún indicador? (0,005)

Problema 405 En el primer curso de una determinada Facultad hay dos grupos A y B. En el grupo A hay 60 varones y 40 mujeres, y en el grupo B hay 64 varones y 16 mujeres. La probabilidad de elegir un alumno del grupo A es $1/3$ y la de elegir uno del grupo B es $2/3$.

1. Calcular la probabilidad de elegir un varón. (0,73)

2. Si hemos elegido un varón, ¿cúal es la probabilidad de que esté en el grupo A?. (0,27)

Problema 406 Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es $1/6$ y la de que no ocurra ninguno es un $1/3$. Determina las probabilidades $P(A)$ y $P(B)$. (1/2, 1/3)

Problema 407 Se tira una moneda y si sale cara se una vez un dado y se anota lo que sale, y si sale cruz se tira dos veces y se anota la suma del resultado de ambas tiradas.

1. Calcula la probabilidad de que se haya anotado un 11 y la probabilidad de que se haya anotado un 6. (11/72)

2. Si el resultado anotado es un 6, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido cara al tirar la moneda?. (6/11)

Problema 408 La probabilidad de que un esquiador debutante se caiga en la pista es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que se caiga al menos tres veces. (B(5;0,4); 0,31744)

Problema 409 En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

1. Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música. (1/2)

2. Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B. (1/3)

Problema 410 Un alumno hace un examen tipo test que consta de 4 preguntas. Cada una de las preguntas tiene tres posibles respuestas de las cuales sólo una es correcta. Si un alumno aprueba contestando correctamente a dos o más preguntas, obtener de forma razonada la probabilidad de que aprueba si responde al azar a cada una de las preguntas. (B(4,1/3); 0,4)

Problema 411 Un examen de inglés consta de tres pruebas. En primer lugar se hace una prueba de gramática que suele ser superada por el 85% de los alumnos que se presentan. Esta primera prueba es eliminatoria y los alumnos que no la superan suspenden la asignatura. La segunda prueba es fonética y 7 de cada 10 alumnos que realizan la prueba la superan. Esta segunda prueba tiene recuperación y es conocido que el 50% de los alumnos que se presentan a dicha recuperación la superan. La última prueba es oral y a ella acceden los alumnos que han superado las dos pruebas anteriores. La prueba oral se supera con probabilidad 0,55. Sabiendo que la asignatura se aprueba cuando se han superado las tres pruebas, determinar la probabilidad de que un alumno apruebe el inglés. Justificar la respuesta. (0,3974)

Problema 412 En una ciudad, el 20% de los hogares están asegurados contra incendios. Con objeto de establecer una encuesta en el área, una compañía de seguros selecciona 5 hogares al azar. Se pide: (B(5;0,2))

1. Número de hogares que se espera que estén asegurados. (1)

2. Probabilidad de que dos hogares estén asegurados. (0,2048)

3. Probabilidad de que ninguno esté asegurado. (0,32768)

4. Probabilidad de que alguno esté asegurado. (0,67232)

Problema 413 En una determinada ciudad, aparte de su propia lengua, el 45% de los habitantes habla inglés, el 30% francés, y el 15%, inglés y francés.

1. Calcular la probabilidad de que un habitante de esta ciudad elegido al azar de entre los que hablan francés, hable también inglés. (1/2)
2. Calcular la probabilidad de que un habitante de esta ciudad elegido al azar no hable inglés ni francés. (0,4)

Problema 414 Se sabe que 2 de cada 8 habitantes de una ciudad utiliza el transporte público para ir al trabajo. Se hace una encuesta a 140 de esos ciudadanos. Determinar: (B(140;0,25))

1. Número esperado de ciudadanos que no van a su trabajo en transporte público. (35)
2. Probabilidad de que el número de ciudadanos que van al trabajo en transporte público esté entre 30 y 45. (0,8375)

Problema 415 Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras.

1. Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cúal es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?. (3/2)
2. Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cúal es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?. (1/2)

Problema 416 Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas:

1. Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble. (1/46656)
2. Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble. (125/46656)

Problema 417 De una baraja se extraen simultáneamente tres cartas al azar. Encuentre la probabilidad de que:

1. Las tres cartas sean bastos. (0,012)
2. Alguna de las cartas sea un oro. (0,589)

Problema 418 Una urna A contiene 2 bolas blancas y 1 negra, y otra urna B contiene 2 bolas negras y 1 blanca. Se extraen dos bolas de la urna A y, sin mirar el color, se introducen en la B. A continuación se extrae una bola de la urna B. ¿Cúal es la probabilidad de que esa bola sea negra?. (8/15)

Problema 419 En un estudio realizado sobre Navarra se recogen los siguientes datos:

- El 55% de la población son mujeres.
- El 12% de los hombres son estudiantes universitarios.
- El 15% de las mujeres son estudiantes universitarias.
- El 30% de las universitarias están cursando carrera de letras.

Según este estudio:

1. Calcular la probabilidad de que un habitante de Navarra, elegido al azar, sea mujer, universitaria y cursando una carrera de letras. (0.025)
2. ¿Qué porcentaje de la población de Navarra está cursando estudios universitarios?. (0,1365)
3. ¿Qué porcentaje de los universitarios de Navarra son hombres?. (0,3956)

Problema 420 En cierto curso de un centro de enseñanza el 62,5% de los alumnos aprobaron Matemáticas. Por otro lado, entre quienes aprobaron Matemáticas, el 80% aprobó también Física. Se sabe igualmente que sólo el 33,3% de quienes no aprobaron Matemáticas, aprobaron Física.

1. ¿Qué porcentaje consiguió aprobar ambas asignaturas a la vez?. (0,5)
2. ¿Cuál fué el porcentaje de aprobados en la asignatura de Física?. (62,5%)
3. Si un estudiante no aprobó Física, ¿qué probabilidad hay de que aprobara Matemáticas?. (0,333)

Problema 421 Se tienen tres urnas, A, B y C, en cada una de las cuales hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Si se extrae una bola de cada urna, ¿qué probabilidad hay de que la suma de los tres números sea un número par?. (1/2)

Problema 422 La probabilidad de existencia de radiación en cierto lugar es 0,2 y se dispone de un sistema de alarma que suena el 95% de las ocasiones en las que hay radiación. Cierto día suena la alarma. ¿Cuál es la probabilidad de que haya radiación?. (0,96)

Problema 423 Se tienen dos monedas, una sin trucar y otra trucada. Sabiendo que con la moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es triple que la probabilidad de obtener cara, calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas:

1. Se obtengan dos caras. (1/8)
2. No se obtenga ninguna cara. (3/8)

3. Se obtenga una cara y una cruz. (1/2)
4. Se obtengan dos caras o dos cruces. (1/2)

Problema 424 Se lanza un dado de seis caras numeradas del 1 al 6 dos veces consecutivas.

1. Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4. (1/12)
2. Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4. (1/3)

Problema 425 Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haya sido guardado en el envoltorio que la correspondía?.(2/3)

Problema 426 Se considera una célula en el instante $t = 0$. En el instante $t = 1$ la célula puede: bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir con probabilidad 1/4.
Si la celúla se divide, entonces en el tiempo $t = 2$ cada una de sus dos descendientes puede dividirse o morir con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro.

1. ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t = 2$.
2. ¿Con qué probabilidad?.(P(4)=27/64; P(2)=18/64; P(ninguna)=19/64)

Problema 427 De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen, al azar, sucesivamente y si reemplazamiento, dos bolas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extrídas sean blancas?. (2/5)
2. Si la segunda bola ha resultado negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?. (1/5)

Problema 428 Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$.

1. Calcula $P(A \cap B)$ y razona si los sucesos A y B son independientes. (imposible)
2. Calcula $P(A \cup B)$. (imposible)

Problema 429 Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor gasolina o diesel. Sabemos que el 60% de los modelos son tipo A y el 30% de tipo B. El 30% de los coches fabricados tiene motor diesel, el 30% de los coche modelo A son diesel y el 20% de los coches modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. El coche es del modelo C. (0,1)
2. El coche es del modelo A, sabiendo que tiene motor diesel. (0,6)
3. El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C. (0,6)

Problema 430 Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tonillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0,01 para A, 0,02 para B y 0,03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige un al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuosos?. (0,985)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A, sabiendo que no es defectuoso?. (0,603)

Problema 431 El 45% del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35% al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar a tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

1. Las tres personas votan al candidato A.
2. Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B.
3. Al menos una de las tres personas se abstiene.

Problema 432 De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

1. Tres reyes.
2. Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
3. Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

Problema 433 Tenemos una baraja española de 40 cartas. Se extraen sucesivamente tres cartas (sin devolución). Se pide calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

1. Sacar tres ases.
2. Sacar un cinco en la primera carta, el as de oros en la segunda y una figura en la tercera.
3. Sacar un as, una sota y un rey, en cualquier orden.

Problema 434 Para evaluar el grado de interés, que tienen los alumnos, por la asignatura de Matemáticas, en los colegios de Móstoles, se ha realizado una encuesta en tres de ellos; en el Villaeuropa, en el Liceo y en el Balmes. En el Villaeuropa encuestaron a 40 alumnos, en el Liceo a 20 y en el Balmes a 40.
Por encuestas internas se sabe que la probabilidad de que un alumno del Villaeuropa muestre interés por las Matemáticas es 0,4, en Liceo es de 0,3 y en el Balmes es del 0,3.
Se pide:

1. La probabilidad de que un alumno escogido al azar no tenga interés por las Matemáticas.
2. Sabiendo que hemos escogido a un alumno que no muestra interés por las Matemáticas, calcula la probabilidad de que éste sea del Villaeuropa.

4.3 Estadística

Problema 435 un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración , en horas, de las pilas que fabrica sigue un distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372.6,392.2).

1. Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.
2. ¿Cuál sería el error de estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86%?.

Solución:

1. Tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (372.6, 392.2) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x} - 1.96 \cdot \dfrac{60}{\sqrt{n}} = 372.6 \\ \\ \overline{x} + 1.96 \cdot \dfrac{60}{\sqrt{n}} = 392.2 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{x} = 382.4, \quad n = 144$$

2.

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ como } z_{\alpha/2} = 1.51 \text{ para } \alpha = 86.9\% \Longrightarrow E = \pm 6.04$$

Problema 436 El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley normal, con una desviación típica de 0.9 Kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtubieron los siguientes pesos en kilos:

9.5 10 8.5 10.5 12.5 13 12

1. Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados 'por la empresa.
2. Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0.3 kg, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

1. $\overline{x} = 11,\ \ \sigma = 0.9 \Longrightarrow N(11, 0.9),\ z_{\alpha/2} = 2.575$:
$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(11 - 2.575 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{9}}, 11 + 2.575 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{9}}\right) = (10.23, 11.77)$$

2. $$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ z_{\alpha/2} = 1.645 \Longrightarrow$$
$$0.3 = 1.645 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 24.35$$
El tamaño mínimo debe ser de 25.

Problema 437 Un determinado producto se envasa en paquetes cuyo peso, en gramos, se comporta como una normal $N(250, 35)$. Si con dichos paquetes se forman cajas de 100 unidades, se pide determinar:

1. El intervalo de confianza del 90% para los pesos medios de los paquetes en las cajas.
2. El número de paquetes de las cajas si queremos que el error cometido sea la décima parte que en el caso anterior, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

1. $\overline{x} = 250,\ \ \sigma = 35 \Longrightarrow N(250, 3.5),\ z_{\alpha/2} = 1.645$:
$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(250 - 1.645 \cdot \frac{35}{\sqrt{100}}, 250 + 1.645 \cdot \frac{35}{\sqrt{100}}\right) = (244.24, 255.76)$$

2.

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \;\; z_{\alpha/2} = 1.645 \Longrightarrow$$

$$E = 1.645 \cdot \frac{35}{\sqrt{100}} = 5.7575 \Longrightarrow \frac{E}{10} = 0.57575$$

$$0.57575 = 1.645 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 10000$$

El tamaño mínimo debe ser de 10000.

Problema 438 Las alturas, expresadas en centímetros, de los estudiantes de segundo de Bachillerato se distribuyen normalmente con una desviación típica de 20 cm. En un colectivo de 500 estudiantes de segundo de Bachillerato se ha obtenido una media de 160 cm.

1. Calcula, con una probabilidad del 98%, entre qué valores estará la media de la altura de la población total de estudiantes de segundo de Bachillerato.

2. Interpretar el significado del intervalo obtenido.

Solución:

1. $\overline{x} = 160$, $\sigma = 20 \Longrightarrow N(160, 0.8944271909)$, $z_{\alpha/2} = 2.33$:

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(160 - 2.33 cdot \frac{20}{\sqrt{500}}, 160 + 2.33 \cdot \frac{20}{\sqrt{500}}\right) = (157.16, 162.08)$$

2. la media de la altura de la población estará en el intervalo calculado en el apartado anterior en el 98% de las muestras que podamos obtener.

Problema 439 Se quiere estimar la media de la nómina mensual que reciben los directivos de las compañías multinacionales que operan en Europa.

1. Si la varianza de la nómina en la población es de 1000 euros^2. ¿Cuál es la varianza de la media muestral cuando el tamaño de la muestra es de 100?

2. Si en las condiciones del apartado anterior, la media muestral es de 4008 euros. ¿Se rechazaría, con un nivel de confianza del 0.95, la hipótesis de que la nómina media es de 4000 euros?

Solución:

1.

$$\sigma^2 = 1000 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{1000} \Longrightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{100}} = 10$$

2. El test de hipótesis sería el siguiente

$$\begin{array}{c} \mathrm{H}_0 : \mu = 4000 \\ \mathrm{H}_1 : \mu \neq 4000 \end{array}$$

La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(4000 - 1.96 \cdot \sqrt{10}, 4000 + 1.96 \cdot \sqrt{10}\right) = (3993.8, 4006.2)$$

Como 4008 no pertenece al intervalo rechazamos la hipótesis de que la media sea de 4000 euros con un nivel de confianza del 0.95.

Problema 440 La duración (en años) de la placa base de los ordenadores sigue una distribución normal de parámetros $\mu = 10$, $\sigma = 2$. Calcula la probabilidad de que una placa base dure más de 12 años.

Solución:

$$x \equiv N(10, 2)$$

$$P(x > 12) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{12-10}{2}\right) = P(z > 1) =$$

$$1 - P(z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Problema 441 En una población escolar se han comprobado que la estatura sigue un modelo Normal de probabilidad. A partir de una muestra de 81 escolares de dicha población se ha calculado una estatura media de 159 cm y una cuasivarianza de 169 cm^2. Teniendo en cuenta esta información:

1. Determinar el error máximo que cometeríamos, con una confianza de 99%, si estimamos en 159 cm la estatura media en esa población escolar.

2. ¿Podríamos rechazar, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis de que la estatura media en esa población es de 160 cm?

Solución:

1. Cuasivarianza$=\dfrac{n}{n-1}\sigma^2 \Longrightarrow \sigma=\sqrt{\dfrac{169\cdot 80}{81}}=12.92.$

   Para una confianza del 99% $\Longrightarrow z_{\alpha/2}=2.575$

   $$E=\pm z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.575\cdot\frac{12.92}{\sqrt{81}}=\pm 3.698$$

2. El test de hipótesis sería el siguiente

   $$\begin{array}{l}\mathrm{H}_0:\mu=160\\ \mathrm{H}_1:\mu\neq 160\end{array}$$

   La zona de aceptación, el I.C. sería

   $$z_{\alpha/2}=1.96$$

   $$\left(\mu-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=$$
   $$\left(160-1.96\cdot\frac{12.92}{9},160+1.96\cdot\frac{12.92}{9}\right)=(157.18,162.28)$$

   Como 159 pertenece al intervalo no podemos rechazar la hipótesis de que la altura media es de 160 cm con un nivel de significación del 5%.

Problema 442 Se sabe que el gasto semanal (en euros) en ocio para los jóvenes de una cierta ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ conocida.

1. Para una muestra aleatoria de 100 jovenes de esa ciudad, el intervalo de confianza al 95% para el gasto medio semanal μ es $(27,33)$. Hallar la correspondiente media muestral $\overline{x}$ y el valor de σ.

2. ¿Qué número de jóvenes tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con una confianza del 95%, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 2 euros semanales?

Solución:

1. Un intervalo de confianza es de la forma

   $$z_{\alpha/2}=1.96$$

   $$\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\overline{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}},\overline{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right)=(27,33)$$

   Tenemos, por tanto, el siguiente sistema:

   $$\left\{\begin{array}{l}\overline{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=27\\ \overline{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=33\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{x}=30\\ \sigma=15.3\end{array}\right.$$

2.

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ z_{\alpha/2} = 1.96 \Longrightarrow$$

$$E = 1.96 \cdot \frac{15.3}{\sqrt{n}} = 2 \Longrightarrow n = 224.82$$

El tamaño mínimo debe ser de 225.

Problema 443 El peso medio de una muestra aleatoria de 100 naranjas de una determinada variedad es de 272 g. Se sabe que la desviación típica poblacional es de 20 g. A un nivel de significación de 0.05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación de que el peso medio poblacional es de 275 g?

Solución:

Se trata de estudiar un test de hipótesis bilateral para la media.

$$\begin{array}{l} \mathrm{H}_0 : \mu = 275 \\ \mathrm{H}_1 : \mu \neq 275 \end{array}$$

La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(275 - 1.96 \cdot \frac{20}{10}, 275 + 1.96 \cdot \frac{20}{10}\right) = (271.08, 278.92)$$

Como 272 pertenece al intervalo no podemos rechazar la hipótesis de que el peso medio de las naranjas es de 275 g con un nivel de significación del 5%.

Problema 444 Se supone que la vida de las bombillas de un determinado tipo sigue una distribución normal de media 1000 horas y desviación típica 60 horas. Se toma una muestra al azar de 225 bombillas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que 996 horas?

Solución:

La distribución de $\overline{x}$ sigue una $N\left(1000, \frac{60}{\sqrt{225}}\right) = N(1000, 4)$

$$P\left(\overline{x} < 996\right) = P\left(\frac{\overline{x} - \mu}{\sigma} < \frac{996 - 1000}{4}\right) = P(z < -1) =$$

$$= 1 - P(z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Problema 445 Se hizo una encuesta aleatoria entre 130 estudiantes universitarios, de los cuales 85 eran mujeres, sobre el número de horas que estudian diariamente fuera del aula, obteniendose una media de 3.4 horas.

1. Si la desviación típica es de 1.1 horas, obtener un intervalo de confianza, al 98%, para la media del número de horas que estudian diariamente fuera del aula los estudiantes universitarios.

2. Obtener un intervalo de confianza, al 90%, para la proporpoción de mujeres entre los estudiantes universitarios.

Solución:

1. El I.C. sería
$$z_{\alpha/2} = 2.33$$
$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(3.4 - 2.33 \cdot \frac{1.1}{130}, 3.4 + 2.33 \cdot \frac{1.1}{130}\right) = (3.175, 3.625)$$

2. El I.C. sería para un proporción
$$p_r = \frac{85}{130} = 0.654, \quad q_r = 1 - p_r = 0.346$$
$$\left(p_r - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r q_r}{n}}, p_r + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r q_r}{n}}\right) =$$
$$\left(0.654 - 2.33\sqrt{\frac{0.654 \cdot 0.346}{130}}, 0.654 + 2.33\sqrt{\frac{0.654 \cdot 0.346}{130}}\right) =$$
$$(0.6123, 0.6957)$$

Problema 446 En un país se sabe que la altura de la población se distribuye según una normal cuya desviación típica es igual a 10 centímetros.

1. Si dicha media fuera de 170 centímetros, calcular la probabilidad de que la media muestral, de una muestra de 64 personas, difiera menos de un centímetro de la media de la población.

2. ¿Cuál es el tamaño muestral que se debe tomar para estimar la media de la altura de la población con un error menor de 2 centímetros y con un nivel de confianza del 95%

3. Y si, en el apartado anterior aumentamos el nivel de confianza al 99%, ¿que tamaño muestral se necesitará?

Solución:

1. $\overline{x}$ sigue una distribución $N\left(170, \frac{10}{\sqrt{64}}\right) = N(170, 1.25)$.

$$P(169 < \overline{x} < 171) = P\left(\frac{169-170}{1.25} < z < \frac{171-170}{1.25}\right) =$$

$$P(-0.8 < z < 0.8) = P(z < 0.8) - P(z < -0.8) =$$

$$2P(z < 0.8) - 1 = 0.5762$$

2.
$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \;\; z_{\alpha/2} = 1.96 \Longrightarrow$$

$$E = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 2 \Longrightarrow n = 96.04$$

   El tamaño mínimo debe ser de 97.

3.
$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \;\; z_{\alpha/2} = 2.575 \Longrightarrow$$

$$E = 2.575 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 2 \Longrightarrow n = 165.76$$

   El tamaño mínimo debe ser de 166.

Problema 447 Hace 10 años, se hizo un amplio estudio y se concluyó que, como máximo, el 40% de los estudiantes universitarios era fumadores. Para ver si actualmente se mantienen las mismas conclusiones, se tomó una muestra de 78 estudiantes entre los que 38 eran fumadores.

1. Con un nivel de significación del 10%, ¿se acepta que el porcentaje de fumadores entre los universitarios es menor o igual que el 40%?

2. Se amplió la encuesta hasta 120 personas, y se obtuvo que 54 eran fumadores. Con un nivel de significación del 5%, ¿se tomaría la misma decisión que en el apartado anterior?

Solución:

1. Es un test unilateral para una proporción

$$\begin{array}{l} \mathrm{H}_0 : p \leq 0.4 \\ \mathrm{H}_1 : p > 0.4 \end{array}$$

   La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.28$$

$$\left(-\infty, p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(-\infty, 0.4 + 1.28\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{78}}\right) =$$
$$(-\infty, 0.47)$$

Como $p_r = \dfrac{38}{78} = 0.487$ no pertenece al intervalo, no aceptamos la hipótesis de que el porcentaje de fumadores sea menor o igual del 40% con un nivel de significación del 10%.

2. La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.645$$
$$\left(-\infty, p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = \left(-\infty, 0.4 + 1.645\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{78}}\right) =$$
$$(-\infty, 0.4735)$$

Como $p_r = \dfrac{54}{120} = 0.45$ si pertenece al intervalo, y aceptamos la hipótesis de que el porcentaje de fumadores sea menor o igual del 40% con un nivel de significación del 5%.

Problema 448 En un centro comercial se sabe que el 35% de los clientes pagan con tarjeta.

1. Si en una caja han pagado 120 clientes, ¿cuál es el número esperado de clientes que no han pagado con tarjeta?
2. Si en una caja han pagado 200 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que hayan pagado con tarjeta entre 60 y 85 clientes?
3. Si en una caja han pagado 400 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 260 no lo hayan hecho con tarjeta?

Solución:

1.

$$B(120, 0.65);\ \ \mu = np = 120\cdot 0.65 = 78$$

Es decir, 78 clientes no pagan con tarjeta.

2.

$$\mu = np = 200\cdot 0.35 = 70,\ \ \sigma = npq = 200\cdot 0.65\cdot 0.35 = 6.74$$
$$\Longrightarrow N(70, 6.74)$$
$$P(60 < X < 85) = P\left(\frac{60-70}{6.74} < z < \frac{85-70}{6.74}\right) =$$
$$P(-1.56 < z < 2.3) = P(z < 2.3) + P(z < 1.56) - 1 = 0.93$$

3.

$$\mu = np = 400 \cdot 0.35 = 260, \;\; \sigma = npq = 400 \cdot 0.65 \cdot 0.35 = 9.54$$

$$\Longrightarrow N(70, 6.74)$$

$$P(X \geq 260) = P\left(z \geq \frac{259.5 - 260}{9.54}\right) =$$

$$P(z \geq -0.05) = P(z < 0.05) = 0.5199$$

Problema 449 En una máquina, en la que se ha roto el indicador de la longitud de las piezas que está fabricando, se sabe que la desviación típica de la longitud de las piezas que produce es de 0.2 cm. Un trabajador cree que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud igual a 5 cm.

1. Si se toma una muestra de 16 piezas y se obtiene una media de 5.12 cm con un nivel de significación del 5%, ¿se acepta la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina estaba regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

2. Si la media muestral del apartado anterior se hubiese obtenido de una muestra de tamaño 36 y el nivel de significación fuera del 1%, ¿aceptaríamos la hipótesis del trabajador frente a la hipótesis de que la máquina está regulada para fabricar piezas de una longitud mayor?

Solución:

1. El problema es un contraste de hipótesis unilateral:

$$\begin{array}{l} \mathrm{H}_0 : \mu \leq 5 \\ \mathrm{H}_1 : \mu > 5 \end{array}$$

   La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$\left(-\infty, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, 5 + 1.645 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$(-\infty, 5.082)$$

   Como $5.12 \notin (-\infty, 5.082)$ no se acepta la hipótesis del trabajador con un nivel de significación del 5%.

2.

$$z_{\alpha/2} = 2.33$$

$$\left(-\infty, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, 5 + 2.33 \cdot \frac{0.2}{\sqrt{36}}\right) =$$

$$(-\infty, 5.078)$$

Como $5.12 \notin (-\infty, 5.078)$ no se acepta la hipótesis del trabajador con un nivel de significación del 1%

Problema 450 La estatura de los miembros de una población se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica 9 cm. Con el fin de estimar la media se toma una muestra de 9 individuos de la población, obteniéndose para ellos una media aritmética igual a 170 cm.

1. Calcula el intervalo de confianza al nivel del 95% para la estatura media de la población.

2. Calcula el tamaño muestral necesario para estimar la media de la población con una precisión de ± 5 cm y un nivel de confianza del 99%.

Solución:

1. Un intervalo de confianza es de la forma

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(170 - 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}}, 170 + 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}}\right)$$
$$= (164.12, 175.88)$$

2.

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \;\; z_{\alpha/2} = 2.575 \Longrightarrow$$

$$E = 2.575 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n = 21.48$$

El tamaño mínimo debe ser de 22.

Problema 451 Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\overline{x} = 8.1$ días; $s = 9$ días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95% para la estancia media.

Solución:

Un intervalo de confianza es de la forma

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8.1 - 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{800}}, 8.1 + 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{800}}\right)$$
$$= (7.476, 8.723)$$

Problema 452 Se quiere comprobar con un nivel de significación de 0.05 si una muestra de tamaño $n = 20$ con media $\overline{x} = 10$ procede de una población que se distribuye según una normal de media igual a 14 y desviación típica igual a 3.

Solución:

Se trata de estudiar un test de hipótesis bilateral para la media.

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 14$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq 14$$

La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(14 - 1.96 \cdot \frac{23}{20}, 14 + 1.96 \cdot \frac{3}{20}\right) = (12.685, 15.315)$$

Como 10 no pertenece al intervalo podemos rechazar la hipótesis de que la muestra proceda de una $N(14, 3)$ con un nivel de significación del 5%.

Problema 453 El salario medio correspondiente a una muestra de 900 personas de una población dada es de 725 euros. Se sabe que los salarios de esta población siguen una normal con desviación típica de 84 euros. ¿Se puede afirmar que el salario medio de dicha población es de 700 euros con un nivel de confianza del 95%?

Solución:

Se trata de estudiar un test de hipótesis bilateral para la media.

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 700$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq 700$$

La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(700 - 1.96 \cdot \frac{84}{900}, 700 + 1.96 \cdot \frac{84}{900}\right) = (694.512, 15.705.488)$$

Como 725 no pertenece al intervalo podemos rechazar la hipótesis de que el salario mínimo de dicha población sea de 700 euros con un nivel de significación del 5%.

Problema 454 En los últimos años el consumo familiar diario de cierta ciudad en electricidad (en Kw) se guía una normal de media 6.3 con una desviación típica de 1.2. Sin embargo, desde hace unos meses las tarifas electricas han experimentado varias reducciones, y se piensa que esto ha podido repercutir en el consumo. Recientemente, para una muestra de 47 familias se ha obtenido un consumo medio diario de 6.8. Suponiendo que el consumo sigue siendo aproximadamente Normal y que la desviación típica se ha mantenido:

1. Plantea un test para contrastar que el abaratamiento de las tarifas no ha influido en el consumo, frente a que ha tenido la repercusión que se piensa, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media de consumo se ha mantenido y realmente subió ¿cómo se llama el error cometido?

2. ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(6.8) = 1$, $F(2.86) = 0.998$, $F(2.33) = 0.99$, $F(0.01) = 0.504$)

Solución:

1. El problema es un contraste de hipótesis unilateral:

$$\begin{array}{l} \mathrm{H}_0 : \mu \leq 6.3 \\ \mathrm{H}_1 : \mu > 6.3 \end{array}$$

   Si aceptamos que la media de consumo se ha mantenido cuando realmente ha subido, estamos aceptando la hipótesis nula como verdadera cuando en realidad es falsa. El error cometido es del tipo II.

2. La zona de aceptación, el I.C. sería

$$z_{\alpha/2} = 2.33$$

$$\left(-\infty, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(-\infty, 6.3 + 2.33 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{47}}\right) =$$

$$(-\infty, 6.7)$$

   Como $6.8 \notin (-\infty, 6.7)$ no se acepta la hipótesis nula, la reducción de las tarifas hantenido repercusión en el consumo con un nivel de significación del 1%.

Problema 455 El jugador (de baloncesto) A encesta un 60% de los tiros libres que lanza, mientras que B encesta el 70%. Si cada uno de ellos hace 300 lanzamientos ¿qué es más probable: que A consiga más de 193 canastas o que B consiga menos de 196?.

Solución:

Para el jugador A tenemos la binomial $B(n, p) = B(300, 0.6)$ que aproximamos por la normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(180, 8.8485)$

$$P(X > 193) = P(Y > 193.5) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{193.5 - 180}{8.485}\right) =$$

$$P(Z > 1.59) = 1 - P(Z < 1.59) = 1 - 0.9441 = 0.0559$$

Para el jugador B tenemos la binomial $B(n, p) = B(300, 0.7)$ que aproximamos por la normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(210, 7.937)$

$$P(X < 196) = P(Y < 195.5) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{195.5 - 210}{7.937}\right) =$$

$$P(Z < -1.82) = 1 - P(Z < 1.582) = 1 - 0.9656 = 0.0344$$

Lo más probable es que A consiga las 193 canastas.

Problema 456 Según una encuesta preelectoral, la intención de voto a cierto partido político está entre el 42% y el 48%. Se trata de un intervalo de confianza, pero en la ficha técnica no figura el tamaño de la muestra, ni tampoco el nivel de confianza utilizado.

1. Suponiendo que la muestra haya sido de 1056 individuos ¿cuál es el nivel de confianza?
2. Con una muestra más pequeña, ¿el nivel de confianza sería mayor o menor que el anterior? Justifica la respuesta.

Solución:

1. El intervalo de confianza facilitado es de una proporción, $p = 0.45$ que es el punto medio de $(0.42, 0.48)$.

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0.45 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{1056}} = 0.42 \\ \\ 0.45 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{1056}} = 0.48 \end{array}\right. \Longrightarrow 0.0153 z_{\alpha/2} = 0.03 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

El nivel de confianza es del 95%.

2.

$$E = \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

Está claro que, manteniendo un mismo error; si aumenta n disminuye $\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ lo que ocasiona que disminuya $z_{\alpha/2}$. Por tanto, aumenta $\alpha/2$ y $1-\alpha$ disminuye.

Problema 457 En un pais se seleciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no. Determinar un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95%, explicando los pasos realizados para su obtención.

Solución:

Se trata de una normal con porcentajes

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

$$p = \frac{289}{900} = 0.32, \quad q = 0.68, \quad n = 900 \Longrightarrow N(0.32, 0.0155)$$

El intervalo de confianza con $z_{\alpha/2} = 2.33$ será

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) =$$

$$\left(0.32 - 1.96\sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{900}}, 0.32 + 1.96\sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{900}}\right) =$$

$$(0.2896, 0.3504)$$

Luego, el porcentaje de votos para el partido X estará en un intervalo $(28.96\%, 35.04\%)$ con un nivel de confianza del 95%.

Problema 458 En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención es una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra de 25 clientes no supere los 9 minutos.

2. ¿Cuál es la distribución de la media muestral, si se toman muestras aleatorias de 64 clientes?. Especificar sus parámetros.

Solución:

$N(10,2)$, normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$.

1.

$$n = 25 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{25}}\right) = N\left(10, \frac{2}{5}\right) = N(10; 0,4)$$

$$P(\overline{x} \leq 9) = P\left(z \leq \frac{9-10}{0,4}\right) = P(z \leq -2,5) = 1 - P(z \leq 2,5) =$$

$$= 1 - 0,9938 = 0,0062$$

2.

$$n = 64 \Longrightarrow N\left(10, \frac{2}{\sqrt{64}}\right) = N\left(10, \frac{2}{8}\right) = N(10; 0,25)$$

Se trata de una normal de media 10 y desviación típica 0,25.

Problema 459 El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

1. Construir un intervalo de confianza al 98% para la media poblacional.
2. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99%, el error de estimación del precio no supere los 50 euros

Solución:

$N(\mu, 100)$, normal de media μ y desviación típica $\sigma = 100$, $\overline{x} = 178,89$.

1.

$$1 - \alpha = 0,98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Longrightarrow P(z \leq z_{\alpha/2}) = 0,99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,32$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(178,89 - 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}; 178,89 + 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101,56; 256,22)$$

2.

$$1-\alpha=0,99\Longrightarrow\frac{\alpha}{2}=0,005\Longrightarrow P(z\le z_{\alpha/2})=0,995\Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2,56$$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 50=2,56\frac{100}{\sqrt{n}}\Longrightarrow\sqrt{n}=\frac{2,56\cdot 100}{50}\Longrightarrow n=26,2144$$

Luego $n=27$.

Problema 460 Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos 88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89.

Hallar un intervalo de confianza al 95% para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

$$\overline{x}=\frac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9}=89,\ \ n=9,\ \ \sigma=1,8$$

$$1-\alpha=0,95\Longrightarrow\alpha=0,05\Longrightarrow\frac{\alpha}{2}=0,025$$

$$P(z\le z_{\frac{\alpha}{2}})=1-0,025=0,975\Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$$

$$I.C.=\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(89-1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}};\ 89+1,96\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C.=(87,824;\ 90,176)$$

Problema 461 Calcular el tamaño mínimo que debe de tener una muestra aleatoria para garantizar que, en la estimación de la media de una población normal con varianza igual a 60, al 90% de confianza, el error de estimación cometido no sea superior a 3 unidades.

Solución:

$$1-\alpha=0,9\Longrightarrow\alpha=0,1\Longrightarrow\frac{\alpha}{2}=0,05\Longrightarrow P(z\le z_{\frac{\alpha}{2}})=0,95\Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,64$$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,64\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{n}}=3\Longrightarrow n=17,93$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n=18$.

Problema 462 En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

1. Hallar un intervalo de confianza al 80% para la media poblacional.

2. Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?.

Solución:

1.

$$1-\alpha = 0,80 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,1 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,9 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$$

$$I.C. = \left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10.000}}; 5 - 1,28\frac{2}{\sqrt{10.000}}\right) = (4,9744; 5,0256)$$

2.

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} \Longrightarrow n = 245,8624$$

Luego $n = 246$.

Problema 463 Para una población $N(\mu, \sigma = 25)$, ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una probabilidad mayor o igual que 0,95?.

Solución:

$$1-\alpha = 0,95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 5 = 1,96\frac{25}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 25}{5} \Longrightarrow n = 96,04$$

Luego $n = 97$.

4.4 Problemas de Estadística sin resolver

Problema 464 La altura de los jovenes andaluces se distribuye según una normal de media desconocida y varianza $25cm^2$. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 95%, se ha construido un intervalo para la media poblacional cuya amplitud es de $2,45cm$.

1. ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra selecionada?. (16)
2. Determina el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la muestra dio una altura media de 170*cm*. (167,55; 172,45)

Problema 465 Se conoce que el número de días de permanencia de los enfermos de un hospital sigue una normal de media 8,1 días y desviación típica 9 días. Se elige al azar una muestra de 100 enfermos:

1. Razona cuál es la distribución de la media muestral. ($N(8,1;0,9)$)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 8 y 10 días?. (0,5219)

Problema 466 Tomada una muestra al azar de 500 personas de una determinada comunidad, se encontró que 300 leían la prensa diaria regularmente.

1. Halla, con un intervalo de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de lectores entre las personas de esa comunidad. (0,5638;0,6362)
2. A la vista del resultado anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,05% con el mismo nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?.(n=260)

Problema 467 Queremos estimar la media de una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una desviación típica de 3,2. Para ello, se toma una muestra de 64 individuos, obteniéndose una media de 32,5. ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la media de la población está entre 31,5 y 33,5?. (98,76%)

Si la desviación típica de la población fuera 3, ¿cuál es el tamaño que debería tener la muestra con la que estimamos la media poblacional si queremos que el nivel de confianza sea del 99% y el error admisible no supere el valor de 0,75?. (107)

Problema 468 A partir de la información suministrada por una muestra aleatoria de 100 familias de cierta ciudad, se ha determinado el intervalo de confianza al 99% $(42,58)$ para el gasto medio mensual por familia (en euros) en electricidad.

Determina, justificando las respuestas:

1. La estimación puntual que daríamos para el gasto medio mensual por familia en electricidad en esa ciudad. (50 euros)

2. ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizarnos, con una confianza del 99%, una estimación de dicho gasto medion con un error máximo no superior a 3 euros?. (712 familias)

Problema 469 .

1. Un fabricante de medicamentos afirma que cierta medicina cura una enfermedad de la sangre en el 80% de los casos. Los inspectores de sanidad utilizan el medicamento en una muestra de 100 pacientes y deciden aceptar dicha información si se curan 75 o más.

   Si lo afirma el fabricante es realmente cierto, ¿Cuál es la probabilidad de que los inspectores rechacen dicha información?. (0,1056)

2. Si en la muestra anterior se curaron 60 individuos, con una confianza del 95%, ¿cuál es el error máximo cometido al estimar que el porcentaje de efectividad del medicamento es del 60%?. (8 personas)

Dato: $\hat{p} \in N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Problema 470 Se supone que la altura de las alumnas de segundo de bachillerato de una detreminada ciudad sigue una distribución normal de $165cm$ y desviacción típica de $11cm$.

Se toma una muestra al azar de 121 de estas alumnas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que $164cm$?. (15,87%)

Problema 471 El peso de las 100 vacas de una ganadería se distribuye según una normal de media $600\,kg$ y una desviación típica de $50\,kg$. Se pide:

1. ¿Cuántas vacas pesan más de $570\,kg$?. (73 vacas)
2. ¿Cuántas pesan menos de $750\,kg$?. (Todas)
3. ¿Cuántas pesan entre 500 y 700 kg?. (96 vacas)

Problema 472 En una muestra aleatoria de 300 votantes, 180 se mostraron favorables al partido A.

1. Estima en tanto por ciento, y con un nivel de confianza del 99%, entre qué límites se encuentra la proporción de votantes del partido A. (entre el $52,79\%$ y el $67,21\%$)

2. Con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para que se realice una estimación con un error menor o igual a 0,05?. (369 votantes)

Problema 473 Una variable aleatoria X tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.

1. Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?. ($N(\mu, 3/4)$)
2. Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se debrían tomar en la muestra?. ($n = 60$)

Problema 474 Se selecciona aleatoriamente una muestra de 600 personas en una ciudad y se les pregunta si consideran que el tráfico en la misma es aceptablemente fluido. Responden afirmativamente 250 personas.

¿Cuál es el intervalo de confianza de la proporción de ciudadanos de esa ciudad que consideran aceptable la fluidez del tráfico, con un nivel de confianza del 90%?. ((0,3654;0,4680))

Problema 475 Se va a realizar una encuesta entre la población española mayor de edad. Si se admite un margen de error del 2%, ¿a cuántas personas habrá que entrevistar con un nivel de confianza del 95%?. ($n = 9604\,\sigma^2$)

Problema 476 En una población, los ingresos anuales siguen una distribución normal con una media de 2 millones de pesetas y una desviación típica de 800000 pta.

Si la proporción de pobres es el 4% y la de ricos el 2%, ¿cuáles son los ingresos anuales que marcan los límites de la pobreza y de la riqueza en esa población?. (600000;3640000)

Problema 477 La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,02?.

Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta. ($n = 1801$)

Problema 478 En una ciudad el peso de los recién nacidos se ha distribuido según la ley normal de media $X = 3100\,grm$ y desviación típica $\sigma = 150grm$. Halla los parámetros de la distribución que siguen las medias de las muestras de tamaño 100. N(3100 ; 15)

Problema 479 La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media $1,62\,m$ y desviación típica $0,12\,m$.

1. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor de $1,60\,m$?. (0,9452)

2. b) ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de las alumnas se encuentre entre $1,59\,m$ y $1,65\,m$ en dicha muestra aleatoria?. (0,9876)

Problema 480 Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de la ciudad y se han encontrado los siguientes precios; 95, 108 , 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110. Suponiendo que los precios de éste producto se distribuyen según una normal de varianza 25 y media desconocida;

1. ¿Cuál es la distribución de la media muestral?. $N(104; 1,25)$

2. Determine el intervalo de confianza al 95% para la media poblacional. (101,55 ; 106,45)

Problema 481 Calcular el parámetro $Z_{\alpha/2}$ sabiendo que el nivel de confianza o coeficiente de confianza es:

1. 95%. (1,96)

2. 99%. (2,575)

3. 99,9%. (3,27)

Problema 482 Una encuesta realizada sobre 40 aviones comerciales revela que la antigüedad media de éstos es de 13,41 años con una desviación típica muestral de 8,28 años; se pide:

1. ¿Entre qué valores con un 90% de confianza, se encuentra la antigüedad media de la flota comercial?

2. Si se quisiera obtener un nivel de confianza del 95% cometiendo el mismo error de estimación que en el apartado anterior, ¿cuántos elementos deberían componer la muestra?

Problema 483 Se desea hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros científicos. Para ello se elige una muestra aleatoria formada por 34 libros y se determina que la media muestral es de 3490 pesetas con una desviación típica de 450 pesetas. Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros científicos al nivel 99%. (3291,24 ; 3688,76)

Problema 484 La desviación típica de la altura de los habitantes de un país es de 10 cm. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra de habitantes de dicho país para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 cm con un nivel de confianza del 99%. ¿ Y si el nivel de confianza es del 95%?. (385 personas)

Problema 485 Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de $110\,mg/cc$. Se sabe que la desviación típica de la población es de $20\,mg/cc$.

1. Obtener un intervalo de confianza al 90% para el nivel de glucosa en sangre en la población. (106,71 ; 113,29)
2. ¿ Qué error máximo se comete con la estimación anterior?. (E=3,29)

Problema 486 La media de edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la Universidad es de 18 años y la desviación típica 0,6 años.

1. De los alumnos anteriores se elige al azar una muestra de 100 ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra esté comprendida entre 17,9 y 18,28 años? (0,951)
2. Qué tamaño debe tener una muestra de dicha población para que su media esté comprendida entre 17,9 y 18,3 años, con un grado de confianza del $99,5\%$?. (n=71,06)

Problema 487 Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 bolas hechas por una determinada máquina, dieron una media de $2\,cm$ y una desviación típica de $0,1\,cm$. Hallar los intervalos de confianza con un grado de confianza de:

1. $68,26\%$ (1,9929 ; 2,007)
2. $95,44\%$ (1,9858; 2,014)
3. $99,73\%$ (1,9787; 2,021)

Problema 488 Un estudio realizado sobre 100 usuarios revela que un automóvil recorre anualmente un promedio de $15200\,Km$ con una desviación típica de $2250\,Km$.

1. Determine un intervalo de confianza, al 99%, para la cantidad promedio de kilómetros recorridos. (14620,6;15779,4)
2. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido no sea superior a $500\,Km$, con igual confianza?. (n=135)

Problema 489 La cantidad de hemoglobina en sangre del hombre sigue una ley normal con desviación típica de $2\,g/dl$.

Calcule el nivel de de confianza de una muestra de 12 extraciones de sangre que indique que la media poblacinal de hemoglobina en sangre está entre 13 y 15 gramos por decílitro. $(91, 64\%)$

Problema 490 Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de una Universidad se encontró que un tercio hablaban inglés.

1. Hallar, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de alumnos que hablan inglés entre los alumnos de esa Universidad. (0,233; 0,433)

2. A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de eror del 0,01 con el nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?. (n=6014)

Problema 491 Según un estudio realizado por una empresa hotelera durante el año 1992, la distribución del tiempo de estancia de cada viajero fue normal con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días. A lo largo del año 2000 se analizó el tiempo de estancia de 49 viajeros elegidos al azar, obteniéndose una media de 3,5 días. ¿Podemos afirmar que esta diferencia es debida al azar con una confianza del 98%?. Con el mismo nivel de confianza, ¿cambiaría la respuesta si esta media de 3,5 días se hubiera obtenido al analizar el tiempo de estancia de 100 viajeros elegidos al azar?. (Si,No)

Problema 492 .

1. La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un intervalo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?. (93% no cumplen)

2. Una fábrica de conservas desea conocer el tiempo que tarda en estropearse un producto que tiene almacenado. Elige una muestra de 40 unidades, resultando que el tiempo de descomposición de estos productos es de 172 horas. Por experiencias anteriores se conoce la desviación típica de la variable normal "tiempo de descomposición"de 5 horas. Con un nivel de confianza del 95%, ¿entre qué valores se encuentra el tiempo medio de descomposición para la totalidad del producto almacenado?. Dato: $\overline{X} \in N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; (171,5;172,5)

Problema 493 Para estimar la proporción de habitantes de una determinada ciudad que poseen ordenador personal se quiere utilizar una muestra aleatoria de tamaño n. Calcule el valor mínimo de n para garantizar que, con un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación no sea superior al 2%. (Como se desconoce la proporción, se tiene que tomar la más desfavorable, que será 0,5). (625)

Problema 494 La altura media de una muestra tomada al azar de 121 recién niños nacidos es de $51\,cm$ y la desviación típica es de $5,5\,cm$. Calcule el intervalo de confianza aproximado para la media poblacional para un nivel de confianza del 95%. (50,02;51,98)

Problema 495 El peso de las peras de una cosecha se distribuye según una normal de media 115 gramos y desvición típica igual a 25 gramos.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una pera elegida al azar pese más de 120 gramos?. (0,4207)

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 peras esté entre 112 y 119 gramos?. (0,7312)

Problema 496 Sesabe que el consumo semanal de refrescos (en litros) entre los jóvenes de una ciudad es una variable normal con desviación típica igual a 0,6 litros. Se pregunta a 100 jóvenes sobre el consumo semanal de refrescos y se obtiene una media muestral de 1,5 litros.

1. Hallar el intervalo de confianza de nivel 0,95 para la media de consumo semanal de refrescos de la población de jóvenes. ((1,3824;1,6176))

2. Si se acepta un error de 0,1 litros y se toma un nivel de confianza del 99%, ¿cuál es el tamaño de la muestra de jóvenes que habría que considerar?. (n=239)

Problema 497 En una empresa de microcircuitos se ha comprobado que el 10% de éstos son defectuosos. Si se compra un paquete de 300 microcircuitos procedentes de la fábrica, determinar: $B(300; 0,1)$

1. Número esperado de microcircuitos no defectuosos. (270)

2. Probabilidad de que se encuentre más del 9% de microcircuitos defectuosos. (0,6844)

3. Probabilidad de que el número de microcircuitos defectuosos esté entre 20 y 30. (0,4297)

Problema 498 Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación típica de $1\,kg$. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de $6\,kg$.

1. Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de esa variedad de sandía. ((5,804;6,196))

2. ¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de $5\,kg$, frente a que sea diferente, con un nivel de significación de 0,05?. (No)

Problema 499 El peso medio de una muestra de 64 jóvenes de 18 años ha sido de $70\,kg$. Sabiendo que los pesos de los jóvenes de 18 años se distribuyen con una desviación típica de $12\,kg$, encuentre el intervalo de confianza para la media de los pesos de la población de jóvenes de 18 años, con un nivel de confianza del 95%. (67,06;72,94)

Problema 500 Un fabricante de pilas alcalinas sabe que la desviación típica de la duración de las pilas que fabrica es de 80 horas. Calcule el tamaño de la muestra que debe someterse a prueba para tener una confianza del 95% de que, al tomar la duración media de la muestra como valor de la duración media de la población total de pilas, el error que se cometa sea menor de 16 horas. ($n = 97$)

Problema 501 Una muestra aleatoria extraída de una población normal de varianza igual a 100, presenta una media muestral de 160. Sabiendo que el tamaño de la muestra es 144 se pide:

1. Calcular un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional. (158,4; 161,6)

2. Calcular un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional. (158,6; 161,4)

3. Si se quiere tener una confianza del 95% de que el error máximo es $1,2\,cm$, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?. (n=267)

Problema 502 En una granja avícola pueden usar dos sistemas de alimentación para sus gallinas: A y B. Con ambos sistemas se recoge aproximadamente el mismo número de huevos, pero cuando se usa el A el peso de los huevos sigue una normal, de $62\,gr$ de media y $3,5\,gr$ de desviación típica, mientras que usando el B la distribución (también normal) tiene $63,5\,gr$ de media y $4,5\,gr$ de desviación típica. Si hay que deshechar, por inutilizables a todos los efectos, los huevos de menos de $55\,gr$:

1. ¿Cuál de los dos sistemas es preferible?. (A)

2. ¿Cuántos huevos fueron deshechados en cierta temporada en la que se usó el sistema A y se produjeron 1000 docenas de huevos?. (274)

Problema 503 En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declararon su intención de votar al partido A.

1. Estimar, con un nivel de confianza del $95,45\%$ entre qué valores se encuentra la intención de voto al susodicho partido en todo el censo. (0,2689; 0,3311)

2. Discutir razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento, o la disminución del nivel de confianza.

Problema 504 En cierta población cercana a una estación de esquí se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% la proporción de habitantes que practican el esquí. Se toma una muestra de 400 habitantes de la población de la que 240 afirman que practican este deporte. Determinar el correspondiente intervalo de confianza. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. (0,553; 0,647)

Problema 505 Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica $6\,cm$.
Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos que da una media de $176\,cm$.

1. Obtenga un intervalo, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. (174,97; 177,03)

2. Calcule el mínimo tamaño de muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a $1\,cm$ y una confianza del95%. (n=139)

Problema 506 Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuyen según una ley normal de media μ horas y de desviación típica $\sigma = 2$ horas.

1. A partir de una muestra de 64 alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (7,26; 8,14) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo. $(92,16\%)$

2. Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 98%. $(n = 39)$

Problema 507 En una universidad se toma al azar una muestra de 100 alumnos y se encuentra que han aprobado todas las asignaturas 62. Se pide hallar:

1. Con un nivel del 95%, un intervalo para estimar el porcentaje de los alumnos que aprueban todas las asignaturas. (0,5249; 0,7151)

2. A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,03, con el mismo nivel de confianza del 95%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?. (n=1006)

Problema 508 Se sabe, por trabajos realizadospor expertos, que la velocidad lectora media de los niños de 6 años es de 40 palabras por minuto, siendo la desviación típica de 12. Hemos tomado una muestra aleatoria de 49 niños de 6 años y les hemos medido su velocidad lectora, resultando una media de 42 palabras por minuto. ¿Podemos afirmar que nuestra media es compatible con la de los expertos a un nive de confianza del 99%. Razona la respuesta. (Si)

Problema 509 Un estudio de un fabricante de televisores indica que la duración media de un televisor es de 10 años, con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración media de los televisores sigue una distribución normal:

1. Calcula la probabilidad de que un televisor dure más de 9 años. (0,9222)
2. Calcula la probabilidad de que dure entre 9 y 11 años. (0,8444)

Problema 510 En una población de estudiantes de Bachillerato se quier estimar la proporción de estudiantes que tienen posibilidad de conectarse a Internet desde su domicilio. SE selecciona al azar una muestra de 300 estudiantes de dicha población y a partir de la información obtenida con esos, se determina el intervalo de confianza (0,22;0,28) para dicha proporción con una confianza del 99%. Teniendo en cuenta esta información, contestar justificando las respuestas:

1. ¿Qué estimación puntual daríamos a la proporción de estudiantes de esa población que puede conectarse a Internet desde su domicilio?. (25%, 75)
2. ¿Qué número mínimo de estudiantes tendríamos que seleccionar al azar con objeto de conseguir, con un intervalo de confianza del 99%, un error máximo en la estimación de dicha proporción menor que 0,05?. ($n = 498$)

Problema 511 En cierta prueba, el 35% de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25%, entre 4 y 6, y el 40% inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, hállese la nota media y la desviación típica. ¿Qué porcentaje de la población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades?. ($47,14\%$)

Problema 512 Se sabe que los recién nacidos en una determinada población sigue una distribución normal de media $3600\,gr$ y desviación típica

280 gr. Se toma una muestra al azar de 196 de estos recién nacidos y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 3580 y 3620?. (0,6826)

Problema 513 En una muestra aleatoria de 400 personas de una población hay 80 que tienen teléfono móvil. Calcular el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 95%. (0,1608; 0,2392)

Problema 514 Un laboratorio farmacéutico afirma que el el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una variable normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les suministra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32.

1. Encontrar un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%. (29,94; 34,06)
2. Si el nivel de significación es igual a 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con error menor de 3 horas?. ($n = 28$)

Problema 515 En una muestra de 600 personas de una ciudad se observa que 30 son inmigrantes.

1. Determinar un intervalo de confianza de nivel 0,95 para el porcentaje de inmigrantes en la ciudad. (0,032; 0,068)
2. Si se quiere estimar el porcentaje de inmigrantes con un error máximo de 0,02, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar si se usa un nivel de significación del 1%. (n=788)

Problema 516 Cuando una máquina funciona correctamente, produce piezas cuya longitud sigue una ley normal de media 12 cm y desviación típica 1 cm. El encargado del control de calidad ha tomado una muestra de 25 piezas obteniendo una media de $11,5\,cm$.

1. Contrasta la hipótesis de que la máquina está funcionando correctamente, con un nivel de significación igual a 0,05.
2. Calcula el intervalo de confianza al nivel de 95% para la longitud media de las piezas que está produciendo la máquina. (11,108; 11,892)

Problema 517 La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se hace una encuesta entre 50 llamadas telefónicas y la media de duración obtenida en esa muestra es 35 segundos. Calcular el intervalo de confianza al 99% para la duración media de las llamadas. (31,36; 38,64)

Problema 518 Preguntadas 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, sólo 40 han contestado que sí. Encuentre un intervalo de confianza, con nivel de confianza del 99%, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana. (0,274;0,526)

Problema 519 En un examen, al que se presentaron 2000 estudiantes, las puntuaciones se distribuyeron normalmente, con media 72 y desviación típica 9.

1. ¿Cuántos estudiantes obtubieron una puntuación entre 60 y 80?. (1438)
2. Si el 10% superior de los alumnos recibió la calificación de sobresaliente, ¿qué puntuación mínima había que tener para recibir tal calificación?. (A partir de 84)

Problema 520 Con el fin de estimar la edad media de los habitantes de una gran ciudad, se tomó una muestra aleatoria de 300 habitantes que arrojó una edad media de 35 años y una desviación típica de 7 años.

1. Hallar el intervalo de 95% de confianza en el que se encontrará la edad media de la población. (34,20; 35,79)
2. ¿Qué vivel de confianza se debería usar para que el intervalo fuera $35 \pm 0,44$?. $(72,42\%)$

Problema 521 La desviación típica del número de horas diarias que duermen los alumnos de cierta universidad es 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes que revela una media de sueño de 7 horas. Hallar un intervalo de confianza de 95% para la media de horas de sueño de los estudiantes de esa universidad. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. (6,07; 7,93)

Problema 522 Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de éstos sigue una distribución normal con media $\mu = 100$ meses y desviación típica $\sigma = 12$ meses.
Determínese el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0,98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentra entre 90 y 110 meses. $(n = 8)$

Problema 523 Una variable aleatoria X tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.

1. Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variabla aleatoria media muestral?. $\left(\overline{X} = N\left(\mu, \frac{3}{4}\right)\right)$
2. Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 unidad de la media de la población, con probabilidad de 0,99, ¿cuántos elementosm, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?. $(n = 60)$