3

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 73

REFLEXIONA Y RESUELVE

Determinantes de orden 2

■ **Resuelve los siguientes sistemas y calcula el determinante de cada matriz de coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 127 \\ 8x - 7y = 48 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ *Solución:* $x = 4,\ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda,\ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *Solución:* $x = 5,\ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda,\ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 127 \\ 8x - 7y = 48 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$ *Solución:* $x = 13,\ y = 8$

Resolución de sistemas 2 × 2 mediante determinantes

- **Resuelve, aplicando la regla anterior, los sistemas de ecuaciones a), c) y f) del apartado anterior.**

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - \ \ y = \ \ 5 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 29 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -44$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 29 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -77$

Por tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-44}{-11} = 4$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-77}{-11} = 7$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 17 & 1 \\ 19 & 2 \end{vmatrix} = 15$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = -9$

Por tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{15}{3} = 5$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-9}{3} = -3$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 127 \\ 8x - \ 7y = \ \ 48 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 127 & 11 \\ 48 & -7 \end{vmatrix} = -1\,417$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 127 \\ 8 & 48 \end{vmatrix} = -872$

Por tanto: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-1\,417}{-109} = 13$; $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-872}{-109} = 8$

Página 75

1. Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

a) $3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 17$

b) 0, porque la 2.ª fila es proporcional a la 1.ª.

c) 0, porque la 2.ª fila solo tiene ceros.

d) $7 \cdot (-2) = -14$

2. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ ac & bc \end{vmatrix}$

a) $a \cdot d - b \cdot c$

b) $a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2(b - a)$

c) 0, porque la 2.ª fila solo tiene ceros.

d) $a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c = 0$, o también obsérvese que la 2.ª fila es proporcional a la 1.ª.

Página 76

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2. Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 78

3. Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª:

(3.ª = (–2) · 1.ª) (propiedad 6)

c) La 3.ª fila es combinación lineal de las dos primeras:

(3.ª = 1.ª + 10 · 2.ª) (propiedad 9)

d) La 1.ª fila es combinación lineal de las otras dos:

(1.ª = 10 · 2.ª + 3.ª) (propiedad 9)

4. Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Página 79

1. Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz *M*.

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2. Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43} de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Página 80

1. Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4.ª fila.

También podríamos haber observado que la 4.ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

Página 81

1. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{8} \\ \mathbf{12} & \mathbf{10} & \mathbf{6} & \mathbf{23} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \cline{1-2} 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Observamos que la 3.ª fila es la suma de las dos primeras, y que la 4.ª fila es la suma de la 2.ª y la 3.ª. Por tanto, $ran\ (A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$.

Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Las 3 primeras filas son linealmente independientes.}$$

Veamos si la 4.ª fila depende linealmente de las anteriores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, las tres primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, entonces $ran\ (C) = 4$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la 1.ª, 2.ª y 4.ª fila son linealmente independientes.

La 3.ª fila es la suma de las dos primeras. Luego *ran* $(D) = 3$.

Página 82

1. Averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

$|A'| = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2$

El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ y $|A| = 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (pues la 1.ª y la 3.ª columnas son iguales) $\rightarrow ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$

El sistema es *compatible*.

Observación: Como la 4.ª columna de A' y la 1.ª son iguales, necesariamente $ran\,(A') = ran\,(A)$; es decir, el sistema es compatible.

d) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran\,(A) = 2$ (ver apartado c) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$

El sistema es *incompatible*.

Página 83

1. Resuelve mediante la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - 3y + 5z = -24} \\ \mathbf{2x - y + 4z = -8} \\ \mathbf{x + y = 9} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y - z = 2} \\ \mathbf{x - y + z = 8} \\ \mathbf{2x + 3y = 10} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$; $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2$; $|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + \ y - z = 2 \\ x - \ y + z = 8 \\ 2x + 3y \qquad = 10 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

2. Resuelve aplicando la regla de Cramer:

a) $$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2x - 5y + 3z = \ 4} \\ \mathbf{x - 2y + \ z = \ 3} \\ \mathbf{5x + \ y + 7z = 11} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x - 4y - \ z = \ 4} \\ \mathbf{y + \ z = \ 6} \\ \mathbf{2x + 5y + 7z = -1} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 3z = \ 4 \\ x - 2y + \ z = \ 3 \\ 5x + \ y + 7z = 11 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - \ z = \ 4 \\ y + \ z = \ 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\,(A) < 3$.

Como hay menores de orden 2 distintos de cero, $ran\,(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 3$$

Por tanto, este sistema es *incompatible*.

Página 84

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x - \ y + 3z = 1} \\ \mathbf{3x - \ y + 2z = 3} \\ \mathbf{-2y + 7z = 0} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x - \ y + 3z = \ 1} \\ \mathbf{3x - \ y + 2z = \ 3} \\ \mathbf{-2y + 7z = 10} \end{array}\right.$$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la 1.ª y la 3.ª columnas son iguales)} \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \;\; y = 7\lambda, \;\; z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabemos, por el apartado a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

4. Resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \ \rightarrow \ ran\,(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 85

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 5y + z = 0} \\ \mathbf{x - 2y + z = 0} \\ \mathbf{x + y \quad = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x + 11y - 4z = 0} \\ \mathbf{-2x + 4y + z = 0} \\ \mathbf{x + y - 2z = 0} \\ \mathbf{2x - 16y + 5z = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y \quad = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Por tanto, $ran\,(A) = 3 =$ *n.° de incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 3 =$ *n.° de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

2. Resuelve estos sistemas:

$$\textbf{a)}\left\{\begin{array}{l} x - \ \ y - \ \ z = 0 \\ x + \ \ y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{b)}\left\{\begin{array}{l} x + y + 5z \qquad = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + \ \ z - \ \ t = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - \ \ y - \ \ z = 0 \\ x + \ \ y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 2$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\}$$

Soluciones: $x = -\lambda, \ \ y = -2\lambda, \ \ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z \qquad = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + \ \ z - \ \ t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad = 2t \\ x - y + \ \ z = t \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Soluciones: $x = \lambda, \ \ y = -\lambda, \ \ z = 0, \ \ t = 2\lambda$

Página 87

1. Discute y resuelve:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+az=\ \ 0 \\ ax-\ \ y \qquad\ =-1 \\ x+4y+\ 6z=\ \ 0 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y=\ \ k \\ kx-\ \ y=13 \\ 5x+3y=16 \end{array}\right.$$

$$\text{a)}\left.\begin{array}{l} x+\ \ y+az=\ \ 0 \\ ax-\ \ y \qquad\ =-1 \\ x+4y+\ 6z=\ \ 0 \end{array}\right\} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2-5a-6=0 \;\rightarrow\; a=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{121}}{8}=\frac{5\pm 11}{8} \begin{array}{l} a=2 \\ a=\dfrac{-3}{4} \end{array}$$

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A')=3\neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -3/4$**, queda:

$$A'=\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A')=3\neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** → *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *n.° de incógnitas* = 3, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2-5a-6}=\frac{6-4a}{4a^2-5a-6}; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2-5a-6}=\frac{a-6}{4a^2-5a-6};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2-5a-6}=\frac{3}{4a^2-5a-6}$$

Solución: $x=\dfrac{6-4a}{4a^2-5a-6},\; y=\dfrac{a-6}{4a^2-5a-6},\; z=\dfrac{3}{4a^2-5a-6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = \ \ k \\ kx - \ \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$, $\quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ k & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A}$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $\boldsymbol{k = 2}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n.^\circ \textit{ de incógnitas}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A}$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

- **Si $\boldsymbol{k = 5/3}$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \qquad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix}}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n.^\circ \textit{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{2}, \ y = \dfrac{-23}{6}$

- **Si $\boldsymbol{k \neq 2}$ y $\boldsymbol{k \neq 5/3}$** $\rightarrow$ $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema es *incompatible*.

2. **Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{(a-1)x + \quad\quad\; y = 0} \\ \mathbf{(a-1)x + (a+1)y = 0} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + \quad\quad\;\; y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = 1 \end{array}$$

- **Si $a = 0$,** queda:

  $$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

  Soluciones: $x = \lambda, \; y = \lambda$

- **Si $a = 1$,** queda:

  $$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

  Soluciones: $x = \lambda, \; y = 0$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$** → $ran\,(A) = 2$

  El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \; y = 0$

Página 88

1. **Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 94

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Determinantes

1 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$ **b)** $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

a) Propiedad 8: si a una columna de una matriz se le suma la otra columna multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

b) Propiedad 5: si multiplicamos cada elemento de una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Propiedad 3: si permutamos las dos columnas, el determinante cambia de signo.

d) Propiedad 7: si una fila es suma de dos, el determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes.

2 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes?:

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(2) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(3) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 **Calcula el valor de estos determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

4 **¿Qué valor de *a* anula estos determinantes?:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a+6} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{a-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \boldsymbol{a^2} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a+1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$$

$$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = \ \ 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$$

5 **Prueba, sin desarrollarlos, que el determinante a) es múltiplo de 3 y que el b) es múltiplo de 5:**

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

☛ ***a) Suma la 1.ª y 2.ª columnas a la 3.ª.***

$$\text{a)}\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3.ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$\text{b)}\ |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3.ª fila la 2.ª.

Rango de una matriz

6 **Estudia el rango de las siguientes matrices:**

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) El rango es 3, ya que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

b) 4.ª fila = 2.ª fila – 1.ª fila

3.ª fila = 1.ª fila + 2.ª fila

Por tanto: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango es 2

7 **Estudia el rango según el valor del parámetro:**

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

- **Si** $\boldsymbol{a = 2} \rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$
- **Si** $\boldsymbol{a \neq 2} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 + 2 - 2a = 4a^2 - 2a = 2a(2a - 1) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1/2 \end{matrix} \right.$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (B) \geq 2$

- **Si** $\boldsymbol{a = 0} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$
- **Si** $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran\ (B) = 2$
- **Si** $\boldsymbol{a \neq 0}$ **y** $\boldsymbol{a \neq \frac{1}{2}} \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran\ (B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \left\langle \begin{matrix} a = -8 \\ a = \ \ 1 \end{matrix} \right.$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran\ (C) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $\boldsymbol{a = 1}$** $\rightarrow$ $|C| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (C) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = -8}$** $\rightarrow$ $|C| = 0$ $\rightarrow$ $ran\ (C) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ y $\boldsymbol{a \neq -8}$** $\rightarrow$ $|C| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (C) = 3$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - a - 1 = -a^2 + 1 = 0 < \begin{matrix} a = -1 \\ a = 1 \end{matrix}$

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$** $\rightarrow$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|D| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (D) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = 1}$** $\rightarrow$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|D| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (D) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$ y $\boldsymbol{a \neq 1}$** $\rightarrow$ $|D| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (D) = 3$

8 Estudia el rango de estas matrices:

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a \end{pmatrix}}$ **b)** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & a-1 \\ a & a & 6 \end{pmatrix}}$

a) El rango de la matriz A será menor o igual que 2, porque solo tiene dos filas.

Buscamos los valores que anulan el determinante formado por las dos filas y las dos primeras columnas:

$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 < \begin{matrix} a = 1 \\ a = -1 \end{matrix}$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ y $\boldsymbol{a \neq -1}$:** $ran\ (A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = 1}$** $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $ran\ (A) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = -1}$** $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $ran\ (A) = 2$

El rango de A es 2 para cualquier valor de a.

b) El rango de B será menor o igual que 2, porque solo tiene dos filas.

Resolvemos $\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a^2 - 2a - a = 0 \rightarrow a^2 - 3a = 0 < \begin{matrix} a = 0 \\ a = 3 \end{matrix}$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 3}$:** $ran\ (B) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = 0}$** $\rightarrow$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, $ran\ (B) = 2$
- **Si $\boldsymbol{a = 3}$** $\rightarrow$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Las dos filas son proporcionales $\rightarrow$ $ran\ (B) = 1$

Regla de Cramer

9 Resuelve aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{rcl} 3x - y & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 0 \\ 3y + 2z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & -2 \\ x - 2y - 3z & = & 1 \\ -x - y + z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\text{c)}\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ 3x + 2y - 2z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{d)}\left\{\begin{array}{rcl} x + y - z + t & = & 1 \\ x - y \quad - t & = & 2 \\ z - t & = & 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rcl} 3x - y & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 0 \\ 3y + 2z & = & -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right.\right) \to |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \quad y = -5, \quad z = 7$

b) $$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & -2 \\ x - 2y - 3z & = & 1 \\ -x - y + z & = & -3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} \left|\, \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right.\right) \to |A| = -11 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2$

c) $$\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array}\right\} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto: $x = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{-1}{3}$

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \quad\quad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \qquad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $\left(\dfrac{3+\lambda}{2}, \dfrac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$

s10 **Estudia y, cuando sea posible, resuelve:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) $\left.\begin{array}{r} x - \;\; y = \;\;\,6 \\ 4x + \;\; y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & -1\\ 4 & 1\\ 5 & 2\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}6\\ -1\\ -5\end{matrix}\right)$. Como $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *n.° de incógnitas* = 2

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$\left.\begin{array}{r} x - y = \;\;\,6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \;\rightarrow\; x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\}$ *Solución:* $x = 1,\; y = -5$

b) $\left.\begin{array}{r} x + \;\; y - \;\;\, z = -2 \\ 2x - \;\; y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = \;\;\,0 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -2\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}-2\\ -3\\ 0\end{matrix}\right)$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* (*A*) = 2

Como $\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* (*A'*) = 2 ≠ *ran* (*A*) = 2

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

11 **Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible, aplicando la regla de Cramer:**

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + \;\;\, z = -2 \\ -2x + \;\;\, y + \;\;\, z = -2 \\ x + \;\;\, y - 2z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = \;\;\,0 \\ -x - \;\;\, y \qquad = \;\;\,1 \\ -\;\; y - z = -1 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{r} x + y \qquad = \;\;\,5 \\ x + \qquad z = \;\;\,6 \\ y + z = \;\;\,7 \\ 2x + y + z = 11 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{matrix}}_{A}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}0\\ 0\\ 1\end{matrix}\right)$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *n.° de incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego $ran\ (A') = 3 \neq ran\ (A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ -x - y \phantom{{}-z} = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que:

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -1 - y \\ z = 1 - y \end{array}\right\} \to x = -1 - y;\ \ y = y;\ \ z = 1 - y$$

Soluciones: $(-1 - \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y = 5 \\ x+z = 6 \\ y+z = 7 \\ 2x+y+z = 11 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\2&1&1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}5\\6\\7\\11\end{matrix}\end{array}\right)$$

Tenemos que:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1&1&0&5\\1&0&1&6\\0&1&1&7\\2&1&1&11 \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)\\(4.^a)-2\cdot(1.^a)}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1&1&0&5\\0&-1&1&1\\0&1&1&7\\0&-1&1&1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1&1&1\\1&1&7\\-1&1&1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1&1&0\\1&0&1\\0&1&1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Luego *ran* (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3.

El sistema es *compatible determinado.*

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5&1&0\\6&0&1\\7&1&1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5&5&0\\1&6&1\\0&7&1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1&1&5\\1&0&6\\0&1&7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $x = 2, \ y = 3, \ z = 4$

Página 95

Discusión de sistemas mediante determinantes

s12 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro *m*:**

a) $$\left\{\begin{array}{r} 7y+5z=-7 \\ 3x+4y+mz=-1 \\ 7x+5z=7 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} mx+y-z=1 \\ x-2y+z=1 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+2y+mz=6 \\ mx=0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 7y+5z=-7 \\ 3x+4y+mz=-1 \\ 7x+5z=7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}0&7&5\\3&4&m\\7&0&5\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}-7\\-1\\7\end{matrix}\end{array}\right)$$

El sistema tendrá solución si $ran\ (A) = ran\ (A')$, según el teorema de Rouché.

Buscamos los valores que hacen $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 49m - 245 = 0 \;\rightarrow\; m = 5$$

- **Si $m = 5$** $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49 + 196 - 147 = 0 \;\rightarrow\; ran\ (A') = 2$$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 5$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$, el sistema es *compatible determinado.*

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4m - 4 + 3 - 6 - 4m + 2 = -5$$

Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m, $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. El sistema es *compatible determinado* para todo m.

c) $$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ m \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 5 - 10 + 10 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & m \end{vmatrix} = -4m - 5 + 15 + 10 + 30 - m = -5m + 50 = 0 \;\rightarrow\; m = 10$$

- **Si $m = 10$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado.*
- **Si $m \neq 10$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

d) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + mz = 6 \\ mx \qquad\quad = 0 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & m \\ m & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\left|\begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & m \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = m(m-2) = 0 < \begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}$$

- **Si $m = 0$** → $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $m = 2$** → $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0;$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$

  El sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

s13 **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - ay + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ x - y + 12z = 0 \end{array}\right.$ $\qquad$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x \qquad - z = 0 \\ \quad ay + 3z = 0 \\ 4x + y - az = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - ay + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ x - y + 12z = 0 \end{array}\right\}$

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles porque $ran\,(A) = ran\,(A')$. Pueden tener solución única o infinitas soluciones. Estudiamos el rango de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -a & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 4 - 7a - 4 + 14 + 12a = 5a + 30 = 0 \to a = -6$$

- **Si $a = -6$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$, porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq -6$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{array}{r} x \qquad - \ z = 0 \\ ay + 3z = 0 \\ 4x + \ y - az = 0 \end{array}\right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

- **Si $a = 1$** → $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 3$** → $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq 3$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$

  El sistema es *compatible determinado*.

s14 **¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:**

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ con $\underbrace{}_{A}$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$$

- **Si $a = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

$ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$ → El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -3$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado.*

  Por tanto, no existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a-1 \\ a \\ 1 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ Contradictorias. El sistema es *incompatible.*

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right.\right).$$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

  luego $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado.*

  Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

Matriz inversa

15 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (A) \longrightarrow (Adj\ (A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \;\to\;$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \;\to\;$ Existe C^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(C) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(C))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \;\to\;$ Existe D^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(D) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(D))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|D|}(Adj\,(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

s16 Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \;\; 2)$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenemos:

$$A \cdot X = B \;\to\; X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = -3 \neq 0 \;\to\;$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $B \cdot A^{-1}$:

$$(1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6 \quad -7)$$

La solución es: $X = (6 \quad -7)$

s17 Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Después, resuelve estas ecuaciones:

a) $\boldsymbol{AX = B}$ **b)** $\boldsymbol{XB = A}$

- Calculamos $|A| = 3 - 2 = 1$

  Hallamos los adjuntos de los elementos de A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj\,(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $|B| = 2 + 6 - 6 = 2$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$Adj\ (B) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj\ (B)]^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

b) $XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

18 **Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:**

a) $$\left\{ \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

b) $$\left\{ \begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned} \right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 12x - 3y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran\ (A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{\lambda}{3},\ y = \dfrac{2\lambda}{3},\ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} 9x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 8x + y + 4z &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: $ran\ (A) = 3 =$ *n.° de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

19 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to A \cdot X = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \to X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (A) \longrightarrow (Adj\ (A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\ (A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = -2$, $y = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \to A \cdot X = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \to$$

$$\to X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = -20 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\hspace{2em}} Adj\,(A) \xrightarrow{\hspace{2em}} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\hspace{2em}} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \to \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \dfrac{2}{5}$, $y = 0$, $z = \dfrac{7}{5}$

20 **Estudia y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right.$ $\qquad$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right)$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\,(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+3z=1\\ 3x\quad\;\;+z=3\end{array}\right\}\begin{array}{l}2x+y=1-3z\\ 3x\quad\;\;=3-z\end{array}\left\}\begin{array}{l}x=\dfrac{3-z}{3}=1-\dfrac{z}{3}\\ y=1-3z-2x=-1-\dfrac{7z}{3}\end{array}\right\}\text{ Hacemos } z=3\lambda.$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ \ y = -1 - 7\lambda,\ \ z = 3\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r}x+\;\;y+\;\;z=\;\;2\\ x-2y-7z=\;\;0\\ y+\;\;z=-1\\ 2x+3y\qquad=\;\;0\end{array}\right\}\qquad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&-2&-7&0\\0&1&1&-1\\2&3&0&0\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&-7\\0&1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$ y $|A'|=0$, tenemos que:

ran (A) = *ran* (A') = *n.° de incógnitas* = 3

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\0&-2&-7\\-1&1&1\end{vmatrix}}{5}=\frac{15}{5}=3;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&-7\\0&-1&1\end{vmatrix}}{5}=\frac{-10}{5}=-2;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&0\\0&1&-1\end{vmatrix}}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Solución: $x = 3,\ \ y = -2,\ \ z = 1$

s21 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l}mx+y+\;\;z=4\\ x+y+\;\;z=m\\ x-y+mz=2\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l}x+\;\;y+\;\;z=m-1\\ 2x+\;\;y+mz=m\\ x+my+\;\;z=1\end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l}x+2y+3z=0\\ x+my+\;\;z=0\\ 2x+3y+4z=2\end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l}x+my+z=4\\ x+3y+z=5\\ mx+\;\;y+z=4\end{array}\right.$

a) $\left\{\begin{array}{l}mx+y+\;\;z=\;4\\ x+y+\;\;z=m\\ x-y+mz=\;2\end{array}\right.$

El sistema tendrá solución si $ran\,(A) = ran\,(A')$, según el teorema de Rouché. Las matrices A y A' son:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

Como A y A' tienen tres filas, su rango no puede ser mayor que 3.

Para estudiar el rango, buscamos en primer lugar los valores de m que anulan el determinante de A, por ser A una matriz cuadrada:

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array} \right.$$

- **Si $m = 1$**:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

  La 1.ª y la 2.ª ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = -1$**:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

  La 1.ª y la 3.ª ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$**: $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

  Resolvemos el sistema en este caso ($m \neq 1$ y $m \neq -1$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{-m^2 + 3m + 4}{m^2 - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m^3 - 7m + 6}{m^2 - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + 3m - 10}{m^2 - 1}$$

$$\text{b)}\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

El sistema tendrá solución si $ran\,(A) = ran\,(A')$, según el teorema de Rouché. Las matrices A y A' son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A y A' tienen tres filas, su rango no puede ser mayor que 3.

Para estudiar el rango, buscamos, en primer lugar, los valores de m que anulan el determinante de A, por ser A una matriz cuadrada:

$$|A| = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} < \begin{matrix} m = 1 \\ m = 2 \end{matrix}$$

- **Si $m = 1$:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ con } |A| = 0.$$

Buscamos en A un menor de orden 2 distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ luego } ran\,(A) = 2.$$

Buscamos en A' un menor de orden 3 distinto de 0. El menor que tomamos en A es también un menor de A'. Si lo ampliamos con la 3.ª fila y la 4.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ luego } ran\,(A') = 3.$$

Por ser $ran\,(A) \neq ran\,(A')$, el sistema es *incompatible.*

(Podríamos haber observado en A' que la 1.ª y la 3.ª son contradictorias y, por ello, el sistema es *incompatible*).

- **Si $m = 2$:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ con } |A| = 0.$$

Como en el caso anterior, encontramos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$

Ampliamos ese menor con la 3.ª fila y la 4.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2$$

Al ser $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Como tiene 3 incógnitas y el rango es 2, las soluciones dependen de un parámetro.

Resolvemos el sistema en este caso. Eliminamos una ecuación y tomamos z como parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \ z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \ z = \lambda \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 1 - \ \lambda \\ 2x + y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

$x = 1 - \lambda - y$

$2 - 2\lambda - 2y + y = 2 - 2\lambda \rightarrow y = 0$

$x = 1 - \lambda$

Las soluciones son: $x = 1 - \lambda,\ \ y = 0,\ \ z = \lambda$

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$**: $|A| \neq 0$ y, por ello, $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

  Resolvemos el sistema en este caso $(m \neq 1$ y $m \neq 2)$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{-m^3 + 2m^2 + m - 2}{-m^2 + 3m - 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 2 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{m^2 - 4m + 4}{-m^2 + 3m - 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{-3m^2 + 4m - 2}{-m^2 + 3m - 2}$$

c) Razonando como en los casos a) y b), hacemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$$

- **Si $m = 1$**:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces: $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$

El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 1}$: $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{4 - 6m}{2 - 2m} = \frac{3m - 2}{m - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{4}{2 - 2m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{2m - 4}{2 - 2m} = \frac{m - 2}{1 - m}$$

d) Razonando como en los casos a) y b), tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = 0 \ \to \ m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- **Si** $\boldsymbol{m = 3}$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias.

El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m = 1}$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ La 1.ª y la 3.ª ecuación son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

Resolvemos el sistema para $m = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + \ \ y + \ \ z = 0 \end{array}\right\}$$ Hemos eliminado la 3.ª ecuación. Tomamos $z = \lambda$:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -3\lambda \\ x + y &= -\lambda \end{aligned}\right\} \begin{aligned} y &= -2\lambda \\ x &= \lambda \end{aligned}$$

Las soluciones son: $x = \lambda,\ \ y = -2\lambda,\ \ z = \lambda$.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$**: *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado.*

  Resolvemos el sistema en este caso $(m \neq 1$ y $m \neq 3)$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ m & 4 & 1 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{5m^2 - 16m + 11}{m^2 - 4m + 3}$$

s22 **Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \\ 3x - 4y - az &= 0 \end{aligned}\right\}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que *ran* (A) = *ran* (A').

$|A| = -5a - 25 = 0 \ \ \to \ \ a = -5$

- **Si $a = -5$** $\to$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \ \to$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2

  El sistema es *compatible indeterminado.*

  Lo resolvemos tomando las dos primeras ecuaciones y pasando z al segundo miembro:

  $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -z \\ x + 2y &= 3z \end{aligned}\right\}$ Restamos a la 1.ª ecuación el doble de la 2.ª. Sumamos a la 2.ª ecuación el doble de la 1.ª.

$$\left.\begin{array}{l} -5y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7}{5}z \\ 5x = z \;\rightarrow\; x = \dfrac{z}{5} \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda.$$

Soluciones: $x = \dfrac{\lambda}{5},\; y = \dfrac{7}{5}\lambda,\; z = \lambda$

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -5}$ → Solo tiene la solución trivial: $x = 0,\; y = 0,\; z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + \;\;z = 0 \\ ax \quad\; + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} a = -3 \\ a = \;\;2 \end{array}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = -3}$ **o** $\boldsymbol{a = 2}$ → Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

  —Lo resolvemos si $a = -3$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + \;\;z = 0 \\ -3x + \qquad 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

  Prescindimos de la 3.ª ecuación y pasamos z al segundo miembro:

  $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x + y = \;\;-z \\ -3x \quad\;\; = -2z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}z \\ 3y = -5z \;\rightarrow\; y = \dfrac{-5}{3}z \end{array} \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda.$$

  Soluciones: $x = \dfrac{2}{3}\lambda,\; y = \dfrac{-5}{3}\lambda,\; z = \lambda$

  —Lo resolvemos si $a = 2$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y + \;\;z = 0 \\ 2x + \qquad 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

  Prescindimos de la 3.ª ecuación y pasamos z al segundo miembro:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y = \;\;-z \\ 2x \quad\;\; = -2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z = \lambda.$$

  Soluciones: $x = -\lambda,\; y = 0,\; z = \lambda$

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -3}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 2}$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial: $x = 0,\; y = 0,\; z = 0$.

23 **Estudia, según los valores del parámetro, el rango de cada matriz:**

a) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$ **b)** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Observamos que $ran\ (A) \le 3$.

Hallamos los valores de k que anulan el determinante formado por las tres primeras filas y las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow \ 6k - 18 = 0 \ \rightarrow \ k = 3$$

Para $k = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \ne 0$.

Buscamos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \ne 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 3$$

Por tanto, $ran\ (A) = 3$ para cualquier valor de k.

b) $B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} k = \ \ 1 \\ k = -1 \end{array} \right.$

- **Si** $\boldsymbol{k = 1}$ $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \ne 0 \rightarrow ran\ (B) = 3$

- **Si** $\boldsymbol{k = -1}$ $\rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \ne 0 \rightarrow$

  $\rightarrow ran\ (B) = 2$

- **Si** $\boldsymbol{k \ne -1}$ $\rightarrow ran\ (B) = 3$

Página 96

s24 **a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA.**

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to ran\,(AA^t) = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to ran\,(A^tA) = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -z \\ 2x + y &= -z \end{aligned}\right\} \to x = z,\ y = -3z$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = -3\lambda,\ z = \lambda$

c) Como $ran\,(AA^t) = 2 =$ *n.° de incógnitas*, el sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0$

s25 **Dadas $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Halla A^{-1} y B^{-1}.

b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

a) $|A| = 2 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(B) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(B))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $|A \cdot B| = 4 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(AB) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(AB))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|AB|}(Adj\,(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

s26 **Dada** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, **determina la matriz** B **que verifica** $B - I = A^t A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|B| = A^t \cdot A^{-1} + I$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

s27 **Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso $a = 4$:**

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y \qquad\qquad = a} \\ \boldsymbol{x \quad + \qquad a^2z = 2a + 1} \\ \boldsymbol{x - y + a(a-1)z = 2a} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y \qquad\qquad = a \\ x \quad + \qquad a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0,\ a = 1$$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$** → $ran\,(A) = 3 = ran\,(A')$

  El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

Solución: $x = \dfrac{a^2 - a - 1}{a - 1},\ y = \dfrac{-1}{a-1},\ z = \dfrac{1}{a-1}$

- **Si $a = 0$** → $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ → $ran\,(A) = 2$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 2.$$ El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x \qquad = 1 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 1,\ y = 1,\ z = \lambda$

- **Si $a = 1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = 4$**, se trata de un sistema *compatible determinado*, resuelto en el primer caso, con solución:

  $$x = \frac{11}{3},\ y = \frac{-1}{3},\ z = \frac{1}{3}$$

s28 **Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) $|A| = x + 3x - 3x = x$

Si $x \neq 0$, A tiene inversa.

b) Si $x = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s29 **Dadas las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica $\boldsymbol{AB + CX = D}$.

$$AB + CX = D \;\rightarrow\; CX = D - AB \;\rightarrow\; X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculamos C^{-1} $(|C| = -2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe $C^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(C) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(C))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s30 **Halla $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{3AX = B}$, siendo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3AX = B \;\rightarrow\; X = \frac{1}{3}\,A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1} $(|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

s31 **Resuelve la ecuación *AXB* = *C* siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$AXB = C \;\to\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\to\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1$ $\to$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

s32 **Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz *X* tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

☛ ***Multiplica dos veces por A^{-1}, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0$ $\to$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1}\,AX\,AA^{-1} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A^{-1}$$

(En el 1.^{er} miembro tenemos $A^{-1}A = AA^{-1} = I \to IXI = X$).

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s33 **Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:**

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación no tiene solución.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \quad \to \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \to \quad X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \xrightarrow{\qquad} Adj\,(A) \xrightarrow{\qquad} (Adj\,(A))^t \xrightarrow{\qquad} \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

34 **Resuelve esta ecuación:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Como*** $AX + B = C \to X = A^{-1}(C - B)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&0&5\\1&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}}_{B}$$ Calculamos A^{-1} ($|A|=16\neq 0 \;\to\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\-5&7&2\\-5&-9&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&2\\5&7&-2\\-5&9&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\to\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Por tanto:

$$A\cdot X=B\;\to\;X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3&5&-5\\1&7&9\\2&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}16\\-16\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; es decir: $x=1,\; y=-1,\; z=1$

35 **Resuelve la ecuación siguiente:**

$$\boldsymbol{X\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}}$$

Sea $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$. Entonces:

$$X\cdot A-B=C\;\to\;X\cdot A=C+B\;\to\;X\cdot A\cdot A^{-1}=(C+B)\cdot A^{-1}\;\to\;X=(C+B)\cdot A^{-1}$$

$$C+B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&6\\4&2&9\end{pmatrix}\;\to\;|A|=1\neq 0\;\to\;\text{Existe }A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}24&3&-10\\5&1&-2\\-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}24&-3&-10\\-5&1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

36 **¿Existe algún valor de *a* para el cual este sistema tenga infinitas soluciones?:**

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \quad \to \quad a = -3$$

- **Si *a* = –3**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ \hdashline 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

  $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$ → El sistema es *incompatible.*

- **Si *a* = –3** → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → *Compatible determinado*

  Por tanto, no existe ningún valor de *a* para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

Página 97

CUESTIONES TEÓRICAS

37 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución?**

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que:

$$ran\ (A) = ran\ (A') = = n.° \text{ de incógnitas} = 3$$

El sistema sería *compatible determinado*. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

38 **En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0.**

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser *compatible indeterminado* si *ran* (A) = *ran* (A') < *n.° de incógnitas*.

b) No, pues al ser *ran* (A) < *n.° de incógnitas*, el sistema no puede ser *compatible determinado*.

c) Sí, si es *compatible*, pasando al segundo miembro las incógnitas que sea necesario.

39 **a) ¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?**

b) ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

b) $\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

40 **Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?**

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

41 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1.**

¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

PARA PROFUNDIZAR

42 **Prueba, sin desarrollar, que estos determinantes son cero:**

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

☛ ***a) Hay dos líneas proporcionales. b) Suma la 3.ª fila a la 2.ª.***

a) La 1.ª y la 3.ª columnas son proporcionales (la 3.ª es –5 por la 1.ª).

b) Sumamos la 3.ª fila a la 2.ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \ \text{(pues tiene dos filas iguales).}$$

43 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) Vamos a transformar en ceros los elementos de la 1.ª columna, excepto el 1, mediante operaciones que no cambien el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{c}\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (4.^a) - 3\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -108 - 192 - 12 + 24 + 144 + 72 = -72$$

(1) Desarrollamos por los elementos de la 1.ª columna.

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \xrightarrow{\begin{array}{c}\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3\cdot(2.^a) \\ (4.^a)\end{array}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -14 - 6 + 10 + 8 + 5 - 21 = -18$$

(1) Hacemos “ceros” en la 4.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 4.ª columna.

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Observamos que $c_4 = c_2 + c_3 - c_1$. Si en un determinante hay una línea que es combinación lineal de las demás, el determinante es igual a 0.

d) $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + 7 \cdot (1.^a)}} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 13 & 23 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -5 & 10 & 4 \\ 13 & 23 & 9 \end{vmatrix}$$

Vamos a convertir en ceros los elementos de la 1.ª.

Operando por columnas:

$$\xrightarrow{\substack{\text{COLUMNAS} \\ (1.^a) - 4 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (3.^a) \\ (3.^a)}} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -21 & -10 & 4 \\ 49 & 68 & 9 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} -21 & -10 \\ 49 & 68 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 10 \\ 49 & 68 \end{vmatrix} = 938$$

(1) Desarrollamos por los elementos de la 1.ª fila.

44 **¿Para qué valores de a se anula cada uno de estos determinantes?:**

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] =$$

$$= -(8a - 16) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a)}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= a - 14 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 14$$

Página 97

AUTOEVALUACIÓN

1. Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{r} x - \ \ y + \ \ z = a \\ ax + 2y - \ \ z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{array}\right.$$

El sistema será *compatible* si el rango de la matriz de coeficientes, M, coincide con el rango de la matriz ampliada, M'.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}; \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M buscando los valores de a que anulan el determinante de M:

$$|M| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- **Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$:**

  $ran\ (M) = ran\ (M') = 3$, y el sistema es *compatible determinado*.

- **Si $a = -2$:**

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ \to \ ran\ (M) = 2$$

  $$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \ \to \ ran\ (M') = 3$$

  $ran\ (M) = 2 < ran\ (M') = 3 \ \to$ El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = 3$:**

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \to \ ran\ (M) = 2$$

  $$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ ran\ (M') = 2$$

  $ran\ (M) = ran\ (M') = 2 <$ *n.° de incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible indeterminado.*

Resolvemos ahora el sistema para $a = 3$:

$$\left.\begin{aligned} x - \;\; y + \;\; z &= 3 \\ 3x + 2y - \;\; z &= 9 \\ 2x + 3y - 2z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación, pasamos z al segundo miembro y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x - \;\; y &= 3 - z \\ 3x + 2y &= 9 + z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9+\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-\lambda}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 3 & 9+\lambda \end{vmatrix}}{5} = \frac{4\lambda}{5}, \quad z = \lambda$$

2. Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$.

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^3 - 1 + a + a - a) = 2(-a^3 + a)$$

$$|M| = 0 \;\rightarrow\; -2(a^3 - a) = 0 \;\rightarrow\; -2a(a^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right.$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |M| = -12$$

$M_{11} = 3$; $\quad M_{12} = -6$; $\quad M_{13} = 6$

$M_{21} = -5$; $\quad M_{22} = 6$; $\quad M_{23} = -2$

$M_{31} = 1$; $\quad M_{32} = -6$; $\quad M_{33} = -2$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ij})^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{12}(M_{ij})^t$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, calcula:**

a) $\begin{vmatrix} a & 3b - a \\ c & 3d - c \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} b + 2a & a \\ d + 2c & c \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & 3b - a \\ c & 3d - c \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$

b) $\begin{vmatrix} b + 2a & a \\ d + 2c & c \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -4$

(1) A la 2.ª columna le sumamos la 1.ª. Esto no cambia el valor del determinante.

(2) Sacamos el 3 como factor común, puesto que los elementos de la 2.ª columna son múltiplos de 3.

(3) No cambia el valor del determinante si a la 1.ª columna le restamos el doble de la 2.ª.

(4) Al permutar las dos columnas, el determinante cambia de signo.

4. **Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:**

a) $A^{-1} X A = B$

b) $(A + X)B = I$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**.**

a) $A^{-1} X A = B$

Multiplicamos por A por la izquierda y por A^{-1} por la derecha:

$$\underbrace{AA^{-1}}_{I} X \underbrace{AA^{-1}}_{I} = ABA^{-1} \rightarrow IXI = ABA^{-1} \rightarrow X = ABA^{-1}$$

Calculamos A^{-1} $(|A| = -3 + 2 = -1)$:

$$A_{11} = -1;\ A_{12} = 2;\ A_{21} = -1;\ A_{22} = 3 \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X)\,B = I \;\rightarrow\; AB + XB = I \;\rightarrow\; XB = I - AB$

Multiplicamos por B^{-1} por la derecha:

$$\underbrace{XBB^{-1}}_{I} = (I - AB)B^{-1} \;\rightarrow\; XI = (I - AB)B^{-1} \;\rightarrow\; X = (I - AB)B^{-1}$$

Calculamos B^{-1} $(|B| = 1 + 2 = 3)$:

$$B_{11} = 1;\; B_{12} = -2;\; B_{21} = 1;\; B_{22} = 1 \;\rightarrow\; (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; (B_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ij})^t \;\rightarrow\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $I - AB$:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; I - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5. El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas es 2. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? ¿Cuántas soluciones puede tener el sistema?

La matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas tiene tres filas y dos columnas. La matriz ampliada tendrá tres filas y tres columnas, y, por tanto, su rango puede ser 2 ó 3.

Si el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema será *compatible determinado*; tendrá solución única.

Si el rango es 3, el sistema será *incompatible*; no tendrá solución.

6. Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - \;\; y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + \;\; z = 0 \end{cases}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{matrix}}_{A}} & \begin{matrix} 1 \\ a \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 6a + 3 = 0 \;\rightarrow\; 3(a - 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; a = 1$$

- **Si $a \neq 1$**:

  $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$, y el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de $a \neq 1$, tenemos un sistema con solución única.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 2 & 4 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -3 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2}$$

- **Si $a = 1$**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A') = 3$$

  El sistema es *incompatible*.