SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

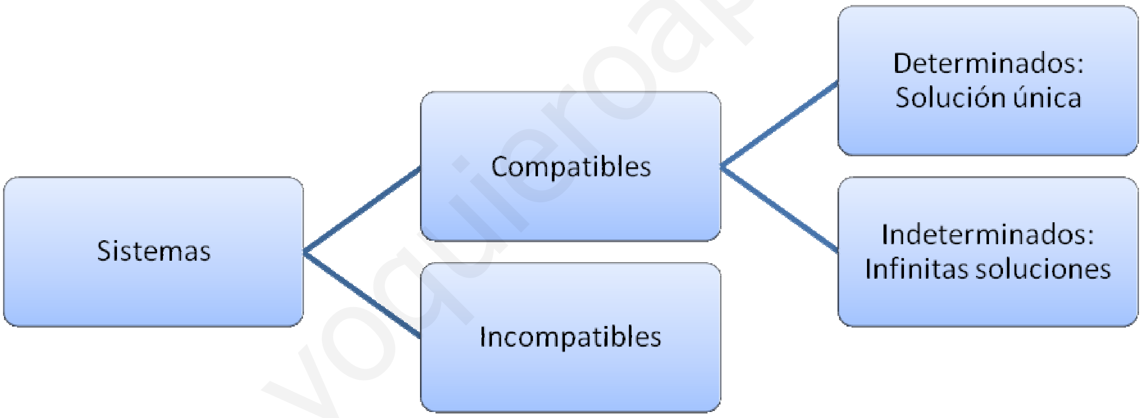
Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde los números reales a_{11}, a_{12},……., $a_{mn,}$ son los coeficientes y x_1, x_2,…….., x_n, las incógnitas y b_1, b_2,…….,b_m los términos independientes.

Resolver un sistema es hallar los valores de las incógnitas para los que se verifican todas las ecuaciones del sistema.

Atendiendo al número de soluciones de un sistema, se tiene la siguiente clasificación:



Ejemplo.- El sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ es compatible determinado, ya que la única solución que tiene es x = 4, y = 3. Un sistema incompatible vendrá dado por ecuaciones incompatibles, tal y como sucede en el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$. Un sistema con infinitas soluciones es $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{array}\right\}$.

Discutir un sistema es averiguar si tiene o no tiene solución y, caso de tenerla, saber si es única o si no lo es. Es decir, es establecer si es compatible o incompatible, y en caso de ser compatible, si es determinado o indeterminado.

Expresión matricial de un sistema

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar matricialmente mediante la expresión A·X=B, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz columna de las incógnita y B la matriz de los términos independientes. Así, en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

SISTEMAS ESCALONADOS.-

Un ***sistema escalonado* o *triangular*** es un sistema de ecuaciones lineales del tipo:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}. \text{ Por ejemplo } \quad \left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 0 \\ 7y - 4z = -1 \\ 6z = 12 \end{array}\right\}$$

La ventaja de estos sistemas es que son muy sencillos de resolver. Se saca el valor de una incógnita en la última ecuación y se va sustituyendo en las ecuaciones anteriores para obtener el valor del resto de las incógnitas. En el ejemplo anterior, fácilmente se obtiene que z = 2, y = 1, x = 0.

MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones consiste en pasar de un sistema en otro equivalente triangular, realizando las transformaciones elementales adecuadas.

Las transformaciones elementales que se pueden realizar en el sistema son:

- Intercambiar el orden de las ecuaciones.
- Sustituir una ecuación por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número.

- Sustituir una ecuación i o la ecuación j por la suma de ambas, multiplicadas por números no nulos.

Ejemplo 1.- Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss utilizando la notación matricial:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=-1 \\ -2x \qquad +4z=\text{-}6 \\ x\text{ - }2y+z=0 \end{array}\right\}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y en ella haremos las transformaciones elementales:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & b_i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_3-F_1]{2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiamos la 2ª con la 3ª fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{6F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Ya tenemos el sistema escalonado:

2 z = -2, de donde z = -1. Ssutityendo en la ecuación de arriba y = 0, y por tanto x =8.

Ejemplo 2.-

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & b_i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

Dividimos la 2ª fila por 2 y nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que $\boxed{x=1,\ y=2,\ z=-1}$

Ejemplo 3.- Resolvamos el siguiente sistema utilizando las matrices:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right)$$ Multiplicamos la 2ª fila y la tercera por 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right)$$ Tenemos un sistema escalonado con solución $\boxed{x=1,\ y=-2,\ z=3}$

<u>Ejercicio 1.-</u> Resuelve los siguientes sistemas compatibles determinados:

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 3z & = & -2 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & + & 4y & - & 7z & = & 1 \end{array}\right\} \quad \boxed{x=\frac{3}{2},\ y=\frac{-1}{2},\ z=0}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -2 \\ -2x & & & - & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}\right\} \quad \boxed{x=1,\ y=1,\ z=-1}$$

<u>RESOLUCIÓN DE SISTEMAS COMPATIBLES INDETERMINADOS</u>

Recordamos que un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones. Estos sistemas se caracterizan porque al aplicar el método de Gauss y eliminar las filas nulas, nos resulta un sistema con un número de ecuaciones menor al número de incógnitas.

Para expresar la solución de un sistema compatible indeterminado, igualamos una incógnita a un parámetro y escribimos las demás en función de dicho parámetro. Veámoslo con un ejemplo:

<u>Ejemplo 1.-</u> Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ Como nos salen dos filas iguales podemos eliminar una directamente, pues si seguimos aplicando Gauss nos saldrá una fila de 0.

Nos queda el sistema: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$ Despejamos una incógnita en la última ecuación, por ejemplo $y = 1 + z$. En este caso no tenemos condiciones sobre z y, por tanto, puede tomar cualquier valor real. De esta forma la solución del sistema queda:

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1+\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}$$

<u>Ejemplo 2.-</u> Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & 7 \end{array}\right\}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, por lo que nos queda un sistema compatible indeterminado (más incógnitas que ecuaciones)

$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son $\left\{\begin{array}{l} x = 5-2\lambda \\ y = 1+\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.$

<u>DISCUSIÓN DE SISTEMAS</u>

Discutir un sistema de ecuaciones lineales es clasificarlo, atendiendo al número de sus soluciones en compatible, determinado o indeterminado, e incompatible.

Para discutir un sistema mediante el método de Gauss, una vez terminado el proceso nos fijamos en la última fila de la matriz en la que todos sus elementos no sean nulos.

- Si la fila es del tipo:

  $\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & b \end{array}\right)$ Si a_1 o a_2 son distintos de 0 y tenemos más incógnitas que ecuaciones válidas, el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO

- Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{array}\right)$$ Si $a \neq 0$ y tenemos tantas ecuaciones válidas como incógnitas, el sistema será COMPATIBLE DETERMINADO.

- Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$ Si $b \neq 0$ tenemos la ecuación 0 = b, ecuación imposible. El sistema será INCOMPATIBLE.

<u>Ejemplo.-</u> Clasifica, según el número de soluciones, el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ La última fila nos da la ecuación 0 = -1, que es una ecuación imposible. El sistema es incompatible.

<u>Ejemplo.-</u> Clasifica, según el número de soluciones, el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo si es compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 4 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Al ser la última ecuación de 0 podemos eliminarla y nos queda un sistema con 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Por tanto es compatible indeterminado. Resolvámoslo:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ & & -y & + & z & = & -2 \end{array}\right\} \text{de donde } \begin{cases} x = -3+2\lambda \\ y = \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2+\lambda \end{cases}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si sus términos independientes son 0. Estos sistemas son compatibles, ya que siempre tienen a 0 como solución.

SISTEMAS DEPENDIENTES DE PARÁMETROS

Un **sistema lineal** se dice **dependiente de un parámetro** cuando alguno de sus coeficientes o términos independientes es un parámetro.

Para resolver sistemas dependientes de un parámetro (*m*) se siguen los siguientes pasos:

1º Aplicamos el método de Gauss.

2º Determinamos los valores del parámetro *m* para los cuales se obtiene una ecuación absurda. Para esos valores el sistema es incompatible.

3º Para el resto de valores de *m* el sistema es compatible, y:

- Si el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.
- Si el número de ecuaciones es igual que el número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Ejemplo.-

Discute, en función del parámetro λ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & \lambda \\ \lambda x & + & 2y & - & z & = & 3\lambda \\ 2x & + & \lambda y & - & z & = & 6 \end{array}\right\}$$

Aplicamos Gauss intercambiando la primera y la tercera columna (siempre intentaremos que los parámetros estén lo más a la derecha posible)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 2 & 3\lambda \\ -1 & 2 & \lambda & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1 & -2\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & \lambda-6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda & -\lambda-6 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & \lambda-6 \end{array}\right)$$

Intercambiamos la 2ª y la 3ª fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & \lambda-6 \\ 0 & -\lambda & -\lambda & -\lambda-6 \end{array}\right) \xrightarrow{-\lambda F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda & -\lambda^2+5\lambda-6 \end{array}\right)$$

Analizamos la última fila. Resolviendo la ecuación $\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0, \lambda=2$. Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $\lambda=0$, nos queda la última matriz:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$ que tiene la última ecuación absurda. Por tanto, SISTEMA INCOMPATIBLE.

- Si $\lambda=2$, nos queda la última matriz:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Al ser la última fila de 0 se puede eliminar y nos queda un sistema con más incógnitas que ecuaciones. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

<u>Ejercicio.-</u> Discute el siguiente sistema en función de los valores del parámetro m:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & = & 2m \\ -3x & - & 2y & + & mz & = & -4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & my & - & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$

EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN

Ejercicio 1.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss:

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 3x & & & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\} \boxed{x = 3,\ y = 2,\ z = 1}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & -5 \\ 2x & - & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & -4 \end{array}\right\} \boxed{x = -1,\ y = -2,\ z = -3}$$

Ejercicio 2.- Discute los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss:

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\} \text{Sol: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 3 \\ & - & y & - & 2z & = & 7 \end{array}\right\} \text{Sol: SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

Ejercicio 3.- Escribe mediante ecuaciones este sistema y resuélvelo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sol: x = 1, y = 1, z = 1

Ejercicio 4.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo si es compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -2 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 3z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Sol: Sistema compatible indeterminado. Las soluciones son:

$$x = \frac{-2+5\lambda}{5},\ y = \frac{2+5\lambda}{5},\ z = \lambda,\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo si es compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Sol: Sistema incompatible

Ejercicio 6.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & & & + & z & = & -1 \end{array}\right\} \text{Sol: } x = 1,\ y = 2,\ z = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 4 \\ -x & - & 3y & + & z & = & -8 \\ & - & 2y & & & = & -4 \end{array}\right\} \text{Sol: } x = 0,\ y = 2,\ z = -2$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right\} \text{Sol: } x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

Ejercicio 7.- Discute el siguiente sistema en función de los valores de m:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & 2z & = & 2m \\ -3x & - & 2y & + & mz & = & -4 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $m \neq 2 \to$ Sistema compatible determinado.
- Si $m = 2 \to$ Sistema incompatible.

Ejercicio 8.- Discute el sistema según los valores de a y resuelve en los casos en los que sea compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & ay & - & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $a \neq -9 \to$ Sistema compatible determinado. x = 0, y = 0, z = 0

- Si $a=-9 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. $x=0,\ y=\frac{\lambda}{3},\ z=\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 9.-

En una fábrica trabajan 22 personas entre obreros, oficinistas y directivos. El doble del número de oficinistas más el triple del número de directivos, es igual al doble del número de obreros. ¿Es posible saber con estos datos el número de obreros que hay? **Sol: No es posible.**

Ejercicio 10.-

El precio de la estancia diaria en un hotel es de 30 € por persona. A los niños se les cobra el 50 % y a los jubilados el 70 % de ese precio.

Determina el número de niños y de jubilados que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25 % del número de niños y se recaudaron 4620 € por la estancia de todos. **Sol: hay 80 niños, 20 jubilados y 100 personas que no son niños ni jubilados.**

Ejercicio 11.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & 13z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & -3 \end{array}\right\}$ Sol: x = 1, y = 3, z = -2

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$ Sol: x = -2, y = 2, z = -1

c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 12 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$ Sol: x = 1, y = 3, z = -2

d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & 3y & + & z & = & 3 \\ 3x & + & 4y & & & = & 11 \\ -2x & & & + & 2z & = & -8 \end{array}\right\}$ Sol: x = 1, y = 2, z = -3

e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & z & = & -1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$ Sol: $x=1,\ y=\frac{3}{5},\ z=\frac{4}{5}$

f) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & - & z & = & 12 \\ 3x & & & + & 2z & = & 7 \\ 5x & - & 6y & + & 4z & = & 5 \end{array}\right\}$ Sol: Sistema incompatible

g) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ -x & + & 2y & + & 5z & = & -2 \\ 3x & + & 4y & + & 19z & = & 8 \end{array}\right\}$ Sol: $x=\dfrac{12-9\lambda}{5},\ y=\dfrac{1-17\lambda}{5},\ z=\lambda,\ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$

h) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & 7y & + & z & = & -4 \end{array}\right\}$ Sol: $x=1+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=-2-3\lambda,\ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$

i) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ -3x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -3 \end{array}\right\}$ Sol: $x=\dfrac{12-5\lambda}{7},\ y=\dfrac{15-\lambda}{7},\ z=\lambda,\ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$

Ejercicio 12.- El siguiente sistema depende de un parámetro m.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & m \\ 2x & + & 3y & + & z & = & m \\ x & + & y & - & mz & = & m \end{array}\right\}$$

Discute este sistema de ecuaciones lineales en función de los distintos valores del parámetro m

Solución.-

- Si $m\neq 0\rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $m=0\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Ejercicio 13.- Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & + & 4z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & a^2z & = & 3a \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $a\neq -1,1\rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a=-1\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $a=1\rightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicio 14.- Discute en función del parámetro a el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ 5x & + & y & - & z & = & 11 \\ 3x & - & y & + & az & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $a \neq -3 \longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = -3 \longrightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicio 15.- Estudia para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & a-1 \\ 2x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución.-

- Si $a \neq 1, 2 \longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1 \longrightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 2 \longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado. En este caso las soluciones del sistema son $x = 1-\lambda,\ y = 0,\ z = \lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 16.- Discute según los valores de m el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} mx & - & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $m \neq -1 \longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $m = 1 \longrightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicio 17.- Se considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & + & (a-2)z & = & 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Halla todas las soluciones cuando a = 3.

Solución.-

a)

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) Para a = 3 el sistema es compatible determinado. $x = 3,\ y = 1,\ z = 0$

Ejercicio 18.- Discute este sistema y resuélvelo cuando m = 6.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & & & = & 0 \\ x & - & 2y & + & mz & = & m \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Para m = 6 el sistema es compatible determinado. $x = 18,\ y = -12,\ z = -6$

Ejercicio 19.- Discute el sistema y resuélvelo en el caso que sea compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & - & y & - & 4z & = & 1 \\ x & + & ay & - & 2z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & -a \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $a \neq 1, -3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = -3 \rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. En este caso las soluciones del sistema son $x = \lambda,\ y = \frac{-\lambda - 3}{3},\ z = \frac{\lambda}{3}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 20.- Discute el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left.\begin{array}{l} ax + y = 2 \\ y + z = 1 \\ x + ay = 1 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $a \neq 1, -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a = -1 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Ejercicio 21.- Con 450 gramos de medicamento se fabricaron 60 pastillas de tres tipos. Grandes, medianas y pequeñas. Las pastillas grandes pesan 20 gramos, las medianas 10 gramos y las pequeñas 5 gramos. Si el total de pastillas grandes y medianas es la mitad del número de pastillas pequeñas, ¿cuántas se fabricaron de cada tipo?

Solución.-

Sean
x: Número de pastillas grandes.
y: Número de pastillas medianas.
z: Número de pastillas pequeñas

El sistema es: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 10x+10y+2z=450 \\ x+y=z/2 \end{array}\right\}$ La solución es x = 5; y = 15; z = 40.

Ejercicio 22.- Dado el sistema: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

a) Añade una ecuación tal que el sistema resultante sea incompatible.
b) Ídem para un sistema compatible indeterminado.
c) Ídem para un sistema compatible determinado.

Ejercicio 23.- Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$ Sol: $x=1,\ y=-2,\ z=3$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 4y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 5x & - & y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$ Sol: Sistema incompatible

c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 4 \end{array}\right\}$ Sol: $x=-3+2\lambda,\ y=\lambda,\ z=-2+\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & 5z & = & 7 \end{array}\right\}$ Sol: $x=\frac{9}{2}-7\lambda,\ y=\frac{5}{2}-3\lambda,\ z=2\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 24.- Discute en función del parámetro k y resuelve cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 2y & & & = & k \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ kx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución.-

- Si $k \neq 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 3 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. En este caso las soluciones del sistema son $x = \frac{3-4\lambda}{4},\ y = 2\lambda,\ z = \frac{-5+4\lambda}{4}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 25.- Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$ Sol: $x = 3,\ y = -2,\ z = 0$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\}$ Sol: $x = \frac{-\lambda}{2},\ y = \frac{-\lambda}{2},\ z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$ Sol: $x = -1-3\lambda,\ y = 2+4\lambda,\ z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & z & = & 3 \\ 6x & - & 6y & + & 2z & = & -16 \\ x & - & y & + & 2z & = & -6 \end{array}\right\}$ Sol: $x = -1,\ y = 1,\ z = -2$

e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$ Sol: $x = \frac{3}{2},\ y = -2,\ z = \frac{1}{2}$

Ejercicio 26.- Discute los siguientes sistemas y resuelve cuando sea posible:

a) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & ky & - & 3z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$

Solución.-

- Si $k \neq -8 \rightarrow$ Sistema compatible determinado. x = 0, y = 0, z = 0

- Si $k=-8 \to$ Sistema compatible indeterminado. $x=\frac{\lambda}{19},\ y=\frac{7\lambda}{19},\ z=\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & & & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & kz & = & 0 \end{array}\right\}$

Solución.-

- Si $k \neq 0 \to$ Sistema compatible determinado. x = 1, y = -1, z = 0
- Si $k=0 \to$ Sistema compatible indeterminado. $x=1+\lambda,\ y=-1-\lambda,\ z=\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & ky & + & z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & -2 \end{array}\right\}$

Solución.-

- Si $k \neq 1 \to$ Sistema compatible determinado. x = -1, y = 0, z = 1
- Si $k=1 \to$ Sistema compatible indeterminado. $x=2-3\lambda,\ y=4-4\lambda,\ z=\lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 27.-

Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A, de 9,80 €/kg; el B, de 8,75 €/kg, y el C, de 9,50 €/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de 10,5 kg a 9,40 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada tipo debe mezclar si tiene que poner del tipo C el doble de lo que ponga del A y del B?

Solución.-

Sean
x: Cantidad de A
y: Cantidad de B.
z: Cantidad de C

El sistema es: $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 10,5 \\ & & & & z & = & 2(x+y) \\ 9,8x & + & 8,75y & + & 9,5z & = & 10\cdot 9,4 = 98,7 \end{array}\right\}$

La solución es x =1,5; y = 2; z = 7

Debe mezclar 1,5 kg de A, 2 kg de B y 7 kg de C.

Ejercicio 28.-

Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés; una cantidad B, al 5%, y el resto, al 6%, ganando 1 050 € de intereses. El otro invierte la misma cantidad A al 5%; la B, al 6%, y el resto, al 4%, ganando 950 €. Determina las cantidades A, B y C.

Solución.- *A* = 5 000 €; *B* = 5 000 €; *C* = 10 000 €

Ejercicio 29.-

Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad que el de copias en buen estado, ¿a cuántas copias se les aplicó el 30% de descuento? Sol: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

Ejercicio 30.-

Por un helado, dos horchatas y cuatro batidos, nos cobraron en una heladería 17 € un día. Otro día, por cuatro helados y cuatro horchatas nos cobraron 22 €. Un tercer día tuvimos que pagar 13 € por una horchata y cuatro batidos. Razona si hay o no motivos para pensar que alguno de los días nos presentaron una factura incorrecta.

Ejercicio 31.-

Una compañía tiene tres camiones (P, Q y R), en los que caben exactamente un cierto número de contenedores de tres tipos (A, B y C) , de acuerdo con la siguiente tabla:

	A	**B**	**C**
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los hacen totalmente llenos? Sol: 5 viajes el camión P, 4 el Q y 3 el R.

Ejercicio 32.-

El señor García nombra a sus hijos herederos de todo su dinero con las siguientes condiciones: al mayor le deja la media aritmética de lo que les deja a los otros dos más 30.000 €; al mediano, exactamente la media de lo de los otros dos, y al pequeño, la media de lo de los otros dos menos 30.000 €. Conociendo estas condiciones solamente, ¿pueden los hijos saber cuánto dinero ha heredado cada uno? Sol: 40.000 el mayor, 20.000 el mediano y nada el pequeño

Ejercicio 33.-

Una oveja, una cabra y una ternera cuestan juntas 870 €. Por el precio de una ternera pueden comprarse 4 ovejas. Además, sabemos que 5 ovejas y una cabra cuestan 620 €. Calcula el precio de cada animal. Sol: No se pueden calcular los datos de los animales con los datos del problema

Ejercicio 34.-

La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. El hijo mayor le lleva 12 años al menor. Sabemos que dentro de 20 años la edad del padre doblará la edad del hijo mayor. ¿Cuáles son sus edades respectivas?. Sol: No tiene sentido la solución

Ejercicio 35.-

Mario vende ropa en una tienda. Además de un sueldo fijo cobra una comisión de 1 € por cada camisa vendida; 1,50 € por cada pantalón y 2 € por cada chaqueta. Ayer, por vender el doble de pantalones que de chaquetas y 5 pantalones más que camisas, ganó 40,50 € . ¿Cuántas prendas vendió? Sol: La solución no tiene sentido.

Ejercicio 36.-

Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2000 €, 4000 € por una en la urbanización B y 6.000 € por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un 50 % más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B. Sol: Se han vendido 30 plazas de garaje en A, 15 en B y 20 en C.

Ejercicio 37.-

Los 176 niños de una población rural están distribuidos en tres colegios A, B y C. Los matriculados en C suponen la cuarta parte de los matriculados en A, y la diferencia entre el número de alumnos de A y el de alumnos de B es inferior en una unidad al doble de matriculados en C. Averigua cuántos niños recibe cada uno de los colegios. Sol: En el colegio A hay 100 alumnos, 51 en B y 25 en C.

Ejercicio 38.-

El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino, por un importe total de 3000 € (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3260 €. Halla el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6%, el 10% y el 14%, respectivamente. Sol: los valores iniciales eran 1500 € de refrescos, 1000 € de cerveza y 500 € de vino.

Ejercicio 39.-

Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga un céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres. Sol: Julia reparte 550 hojas y recibe 5,50 €; Clara reparte 300 hojas y recibe 3 €; Miguel reparte 650 hojas y recibe 6,50 €.

Ejercicio 40.-

El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10, 20 y 50 €. Hemos sacado 290 € del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 € que nos ha dado es el doble del de 20 €. Halla el número de billetes de cada tipo que nos ha dado el banco. Sol: 2 billetes de 10 €, un billete de 20 € y 5 billetes de 50 €.