

CÁLCULO DE LÍMITES

1. Se define la función signo(x) como:

$$f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Solución:

Calculamos los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, siendo la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 5 + \frac{x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 & \text{si } x > 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \\ 6 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 6 = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 5) = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \geq -2 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Demuestra que no existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{5}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

5. Hallar los límites laterales en $x = 1$, en las siguientes funciones:

a) $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la función parte entera de x

b) $f(x) = D(x)$, siendo $D(x)$ la función parte decimal: $D(x) = x - E(x)$

Solución:

a)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} E(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} E(x) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

b)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} D(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} D(x) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

6. Calcular el valor de m para que exista $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx - 1 & \text{si } x \geq -2 \\ 2x + 5 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Solución:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 5) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + mx - 1) = 3 - 2m \end{aligned} \right\} \rightarrow 3 - 2m = 1 \rightarrow m = 1$$

7. Hallar m para que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + mx - 6}{x^2 - 4}$ sea finito.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + mx - 6}{x^2 - 4} = \frac{4 + 2m - 6}{0}$$

Imponemos que $4 + 2m - 6 = 0 \rightarrow m = 1$

8. Sobre la función $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{3x^3 - 3x^2 + mx - 2}$ se sabe que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{3}{7}$, calcular:

a) El valor de m

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Solución:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{3}{7} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-6}{10 + 2m} = -\frac{3}{7} \rightarrow m = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 3x - 4)}{(x-1)(3x^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2} = -\frac{6}{5}$$

9. Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2x + 9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x+1} - \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^2} \right)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x + 2} \cdot \frac{x^2 + 5x}{4x^4 + 2x + 3}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2+5}{x^2-1} \right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 27}{3x - 9}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 5x}}{4x + 6\sqrt{x}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 2x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{x - 2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3 + 3x + 1}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x}}{\sqrt[6]{x^3 + x^2}}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}$$

Solución:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2x + 9} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos por x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2x + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^3}} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x^2+x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2+x+2)}{x+2} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+3} = -4$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-5}{x-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} \right) = \infty - \infty$$

Efectuamos la resta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x^2 + x - 2x^3 - 2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = -5$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x + 1} - \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^2} \right) = \infty - \infty$$

Efectuamos la resta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{3x + 1} - \frac{x^3 - x^2 + 1}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 3x^2 - 3x^4 + 3x^3 - 3x - x^3 + x^2 - 1}{3x^2(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 3x - 1}{9x^3 + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 3x - 1}{9x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{9 + \frac{3}{x}} = \frac{2}{9}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x + 2} \cdot \frac{x^2 + 5x}{4x^4 + 2x + 3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x + 2} \cdot \frac{x^2 + 5x}{4x^4 + 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5}{20x^5} = \frac{3}{20}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x + 1}{x - 1} : \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

Efectuamos el cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x + 1}{x - 1} : \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + 1)(x + 1)}{x^2 + 5} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 27}{3x - 9}} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 27}{3x - 9}} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{3(x - 3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 9}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 5x}}{4x + 6\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{x} + 5}}{4 + \frac{6}{\sqrt{x}}} = \frac{3 + 5}{4} = 2$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x) = \infty - \infty$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x - 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} + 1} = \frac{5}{2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{2x+1} + 3)}{2x + 1 - 9} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{2(x-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{2} = \frac{48}{2} = 24 \end{aligned}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 7 - 9}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x(\sqrt{x+7} + 3)} = \frac{1}{12}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Dividiendo por x:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{2 - 1}{1} = 1$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3+x^2}}{\sqrt{x^3+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}} = \sqrt{2}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[6]{x^3+x^2}} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo para simplificar la fracción:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)}}{\sqrt[6]{x^2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x} \sqrt[6]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{x+1}} = -1$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})} = 0$$

$$s) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3})}{(x+2-2x-3)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3})}{-(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$