54325

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones en los casos que sea necesario:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-2x}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\dfrac{x^2}{x-2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

6) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x}$

10) $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{3-x}$

13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}-2x\right)$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2+1}$

17) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)$

19) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x-2}}$

20) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-1}$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt{1-x^3}}$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-2}{\sqrt{x^3+2x}}$

23) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+x-12}{x^3-27}$

24) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$

25) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x+2}{x^2-1}$

26) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}$

Ejercicio 2. Calcula el valor de a para que exista el límite en x = 1 de la función f(x)

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-3a+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcula el valor de m para que se verifique:

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+mx+3}=2$$

Ejercicio 4. Hallar los siguientes límites del tipo del número e

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{2x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{5x+2}\right)^{5x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)^{x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{6}{x}\right)^{x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{x}{x^2-1}\right)^{x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)^{-2x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x^2+1}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3x-1}{2x}\right)^{2x-1}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+7}{x+2}\right)^{x+2}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}+1}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{3x}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}\right)^{2x}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)^{-3x}$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)^{1-x}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+3}{x-4}\right)^{\frac{3x+1}{2}}$

SOLUCIONES

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones en los casos que sea necesario:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4-2x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2(2-x)}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-2) = -2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x^2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x-2}\right) = -2$

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{(x+1)}{x} = \frac{3}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-3)}{(x+2)} = -\frac{2}{3}$

5) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)}{(x+4)} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{(4-x-2)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{(2-x)}{(x-2)(2+\sqrt{x+2})} =$

$= \lim\limits_{x\to2^+}\frac{-1}{(2+\sqrt{x+2})} = \frac{-1}{4}$

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)} = \infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$

10) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{2x}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{2x-(x+3)}{x^2-9}\right) = \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{2x-x-3}{x^2-9}\right) = \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) = \frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) = \lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to3}\frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{6}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^3}{x^2+1}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-1-x^4-2x^3}{(x+2)(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3-1}{(x+2)(x^2+1)} = -2$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x^2+1}\right)^{3-x} = 2^{-\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{x+4}-2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to0}\frac{3x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{3x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \lim\limits_{x\to0}3(\sqrt{x+4}+2) = 12$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}} = 3$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-2x\right)=\ \infty-\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}-2x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x-4x^2}{\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-3x}{\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)}=-\infty$$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2+1}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

17) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2x+5)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{9}{5}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)=\ \infty-\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3-x-1}{\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}\right)}=0$$

19) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x-2}}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt[3]{\ }}=\lim\limits_{x\to2}\sqrt[6]{\dfrac{(x+2)^3(x-2)^3}{(x-2)^2}}=\lim\limits_{x\to2}\sqrt[6]{(x+2)^3(x-2)}=0$

20) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x-2\right)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x+1\right)}=0$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt{1-x^3}}=+\infty$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-2}{\sqrt{x^3+2x}}=0$

23) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3-27}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+4)}{(x^2+3x+9)}=\dfrac{7}{27}$

24) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1-1}=\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x-1}+1\right)=2$

25) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x+2}{x^2-1}=-\infty\ \ (x^2<1)$

26) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x}=0$

Ejercicio 2. Calcula el valor de a para que exista el límite en x = 1 de la función f(x)

$$f(x)=\begin{cases}2^x+a & \text{si}\quad x\le1\\ x^2-3a+5 & \text{si}\quad x>1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(2^x+a\right)=2+a$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-3a+5\right)=6-3a$

Para que exista el límite en x = 1, debe verificarse que:

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\ \Rightarrow\ 2+a=6-3a\Rightarrow 4^a=4\Rightarrow a=1\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=3$

54325

Ejercicio 3. Calcula el valor de m para que se verifique: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+mx+3}=2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+mx+3}=\frac{0}{12+3m}\Rightarrow 12+3m=0\Rightarrow m=-4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1}=\frac{4}{2}=2$$

Ejercicio 4. Hallar los siguientes límites del tipo del número e:

Recuerda: $\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+3}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1+\frac{7}{x}-1\right)\cdot(2x+3)=\frac{7(2x+3)}{x}\to 14$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+3}=e^{14}$$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{5x+2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1+\frac{3}{5x+2}-1\right)\cdot(5x+2)=\frac{3(5x+2)}{5x+2}=3\to 3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{5x+2}\right)^{5x+2}=e^{3}$$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x-4}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1+\frac{4}{x^2}-1\right)\cdot(x-4)=\frac{4(x-4)}{x^2}\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x-4}=e^{0}=1$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x+2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1+\frac{6}{x}-1\right)\cdot(x+2)=\frac{6(x+2)}{x}=6$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^{x+2}=e^{6}$$

5) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{x^2-1}\right)^{x^2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1-\frac{x}{x^2-1}-1\right)\cdot x^2=\frac{x\cdot x^2}{x^2-1}=\frac{x^3}{x^2-1}\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{x^2-1}\right)^{x^2}=e^{+\infty}=+\infty$$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{-2x}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(1+\frac{3}{x^2}-1\right)\cdot(-2x)=-\frac{6x}{x^2}\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{-2x}=e^{0}=1$$

7) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+1}{x}\right)^{2x^2+1}=2^{+\infty}=+\infty$

8) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x-1}{2x}\right)^{2x-1}=\left(1+\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=+\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}-1\right)\cdot x=\left(\frac{x+2-x+3}{x-3}\right)\cdot x=\frac{5x}{x-3}\to 5 \quad\to \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=e^{5}$$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+2}\right)^{x+2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{x+7}{x+2}-1\right)\cdot(x+2)=\left(\frac{x+7-x-2}{x+2}\right)\cdot(x+2)=\frac{5(x+2)}{x+2}\to 5$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+7}{x+2}\right)^{x+2}=e^{5}$$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}+1}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x+3}{3}=\frac{x+3}{3x}\to\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}+1}=e^{\frac{1}{3}}$$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{3x}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)(3x)=\frac{x+1-x+2}{x-2}(3x)=\frac{9x}{x-2}\to 9$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{3x}=e^{9}$$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)==\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)\cdot x^2=\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\cdot x^2=\frac{x^2}{x^2-1}\to 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=e$$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2-2}\right)^{2x}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{x^2+3x}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x=\frac{x^2+3x-x^2+2}{x^2-2}\cdot 2x=\frac{3x+2}{x^2-2}\cdot 2x=\frac{6x^2+4x}{x^2-2}=6$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-2}\right)^{2x}=e^{6}$$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)^{-3x}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-1\right)\cdot(-3x)=\frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\cdot(-3x)=\frac{4(-3x)}{\sqrt{x}-2}\to-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right)^{-3x}=e^{-\infty}=0$$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x}\right)^{1-x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\infty}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty}\to 0$

54325

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$

$$[f(x)-1]\cdot g(x)=\left(\frac{2x+1}{2x}-1\right)(3x-2) = \frac{2x+1-2x}{2x}(3x-2)=\frac{3x-2}{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2} = e^{\frac{3}{2}}$$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{x-4}\right)^{\frac{3x+1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$