1	**Una recta es paralela a dos planos secantes, ¿a quién es también paralela?**

SOLUCIÓN:

Una recta paralela a dos planos secantes también es paralela a la arista que determinan ambos planos.

2	**Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto A(1, 0, 1) y es paralela a la recta de r** $$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de la recta r: $\vec{u}$ = (1, 1, 1) x (2, -2, 1) = (3, 1, -4)

Ecuación de la recta s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-4}$

3	**Dados los puntos M(-3,0,1), P(3,2,-8) y la recta r:** $$r \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{3}$$ **Trazar por M y P sendas rectas paralelas a r y averiguar si son distintas de r o coincidentes con ellas.**

SOLUCIÓN:

Dos rectas son paralelas si sus vectores de dirección son paralelos, es decir, proporcionales.

Recta paralela a r que pase por M: s: $\equiv \frac{x+3}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$

Recta paralela a r que pase por M: $t \equiv \frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+8}{3}$

Dos rectas con vectores de dirección paralelos pueden ser paralelas o coincidentes.

Sea $r \equiv A+<\vec{u}>$ y $s \equiv B+<\vec{v}>$

- r es paralela a s si el rango de la matriz formada por $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\}$ es de rango 2.
- r es coincidente con s si el rango de la matriz formada por $\{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\}$ es de rango 1.

Sea A = (-1,4,-2) un punto de r y $\vec{u}\,(-2,1,3)$ un vector de dirección de r.

$\overrightarrow{AM}$ = (-2, -4, 3) $\rightarrow \{\vec{u}, \overrightarrow{AM}\}$ no son proporcionales $\rightarrow$ r y s son paralelas.

$\overrightarrow{AP}$ = (4, -2, -6) $\rightarrow \{\vec{u}, \overrightarrow{AP}\}$ son proporcionales $\rightarrow$ r y t son coincidentes.

4	**Dado el plano $\pi \equiv x+y+z+1=0$, ¿cuál es la ecuación del haz de planos paralelos al mismo? Justifica tu respuesta.**

SOLUCIÓN:

La ecuación del haz de planos es:

x + y + z + k = 0 siendo k cualquier nº real.

Al tener todos los planos el mismo vector normal son paralelos.

5	**¿Qué condición han de cumplir las coordenadas de los vectores direccionales de dos rectas para que sean paralelas?**

SOLUCIÓN:

Sea $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ los vectores direccionales de r y s, respectivamente.

Si las rectas r y s son paralelas sus vectores direccionales también lo son, luego las coordenadas son proporcionales:

$$r \parallel s \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

6	**a) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OXY?** **b) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OXZ?** **c) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OYZ?**

SOLUCIÓN:

a) Los planos paralelos a OXY están definidos por $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.
Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (0,0,1) = 0 \rightarrow z - z_0 = 0 \rightarrow z = z_0$$

b) Los planos paralelos a OXZ están definidos por $\left(A, \vec{i}, \vec{k}\right)$, siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$.
Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (0,1,0) = 0 \rightarrow y - y_0 = 0 \rightarrow y = y_0$$

c) Los planos paralelos a OYZ están definidos por $\left(A, \vec{j}, \vec{k}\right)$, siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$.
Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (1,0,0) = 0 \rightarrow x - x_0 = 0 \rightarrow x = x_0$$

7	**¿Qué condición deben verificar los coeficientes de dos planos dados en forma general para que sean paralelos?**

SOLUCIÓN:

Dos planos $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ son paralelos si los vectores normales son proporcionales, es decir, se verifica:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}:$$

8	**Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto A(0, 1, 2) y es paralela a la recta** $\mathbf{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}}$

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta viene determinada por el punto A y el vector director de r $\vec{u} = (2, 3, 5)$:

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

9	**Calcular la ecuación de un plano que pasa por el punto P(1, -1, 2) y es paralelo al plano π de ecuación 2x + 3y – z – 4 = 0**

SOLUCIÓN:

Dos planos ax + by + cz + d = 0 y a´x + bý + c´z + d´ = 0 son paralelos si verifican $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}$:

- Serán distintos si $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}\neq\frac{d}{d´}$
- Serán coincidentes si $\frac{a}{a´}=\frac{b}{b´}=\frac{c}{c´}=\frac{d}{d´}$

Un plano $\pi´ \parallel \pi$ es de la forma $2(x-x_0)+3(y-y_0)-(z-z_0)=0$, siendo $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto de $\pi´$:

$$\pi´: 2(x – 1) + 3(y + 1) – (z – 2) = 0 \rightarrow \pi´: 2x + 3y – z + 3 = 0$$

10	**a) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OX?** **b) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OY?** **c) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OZ?** **Calcula el vector normal de dichos planos.**

SOLUCIÓN:

Sea π: Ax + By + Cz + D = 0. Su vector normal es $\vec{n}$=(A,B,C).

a) El vector direccional de eje OX es $\vec{i}=(1,0,0)$.

Si π es un plano paralelo a OX $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{i} \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{i}=0 \rightarrow$ A = 0

El vector normal del plano es de la forma: (0, B, C) $\rightarrow$ Ecuación general: By + Cz + D = 0

b) El vector direccional de eje OY es $\vec{j}=(0,1,0)$.

Si π es un plano paralelo a OY $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{j} \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{j}=0 \rightarrow$ B = 0

El vector normal del plano es de la forma: (A, 0, C) $\rightarrow$ Ecuación general: Ax + Cz + D = 0

c) El vector direccional de eje OZ es $\vec{k}=(0,0,1)$.

Si π es un plano paralelo a OZ $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{k} \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{k}=0 \rightarrow$ C = 0

El vector normal del plano es de la forma: (A, B, 0) $\rightarrow$ Ecuación general: Ax + By + D = 0

11	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a las rectas :** $\mathbf{r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-8}{4}} \qquad \mathbf{s \equiv x=y=z}$

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto O(0, 0, 0) y por los vectores direccionales $\vec{u}$ = (2, 3,4) y $\vec{v}$ = (1, 1, 1):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{-x + 2y – z = 0} \rightarrow \text{x – 2y + z = 0}$$

12	**Averiguar si la recta r de ecuación:** $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$ **es paralela al plano** $\pi \equiv 2x + 3y + z - 2 = 0$

SOLUCIÓN:

El vector normal al plano es $\vec{n} = (2,3,1)$

El vector de dirección de r es $\vec{u} = (-1,3,-2)$ y unos de sus puntos es P(2, -1, 0)

- $\pi \parallel r$ si $\vec{n} \perp \vec{u} \leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $P \notin \pi$
- r está contenida en el plano π $(r \subset \pi)$ si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $P \in \pi$
- π y r se cortan si $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$

(2,3,1) · (-1,3, -2) = -2 + 9 – 2 = 5 $\neq 0 \rightarrow \pi$ y r se cortan en un punto.

Para determinar el punto de corte sustituimos las ecuaciones de r en la ecuación del plano:

$2(2 - t) + 3(-1 + 3t) - 2t - 2 = 0 \rightarrow 5t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{5}$

Por tanto, el punto de intersección es (sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de r):

$$Q\left(\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

13	**Hallar la ecuación de un plano que pasa por la recta r:** $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \\ 4x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **y es paralelo a la recta** $s \equiv \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-17}{-1}$

SOLUCIÓN:

El haz de planos que contiene a r es de la forma:

$$\alpha(3x + 2y - 5z + 2) + \beta(4x - 3y - 2z + 1) = 0, \text{ siendo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad [1]$$

$$(3\alpha + 4\beta)x + (2\alpha - 3\beta)y + (-5\alpha - 2\beta)z + (2\alpha + \beta) = 0$$

Como es paralelo a la recta s debe verificarse que el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir:

$$3\cdot(3\alpha + 4\beta) - 2(2\alpha - 3\beta) - (-5\alpha - 2\beta) = 0 \rightarrow 10\alpha + 20\beta = 0 \rightarrow \alpha = -2\beta$$

Sustituyendo en [1]:

$$-2\beta x - 7\beta y + 12\beta z - 3\beta = 0 \rightarrow -2x - 7y + 12z - 3 = 0$$

14	**Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 0, 0) y es paralelo al plano π de ecuación x – 2y + 4z + 2 = 0**

SOLUCIÓN:

Un plano $\pi' \parallel \pi$ es de la forma $(x - x_0) - 2(y - y_0) + 4(z - z_0) = 0$, siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de π':

$$\pi': (x - 1) - 2y + 4z = 0 \rightarrow \pi': x - 2y + 4z - 1 = 0$$

15	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, 1, 2) y es paralelo a las rectas r y s:** $r \equiv \begin{cases} 3x+y=0 \\ 4x+z=0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} 2x-2y=4 \\ y-z=-3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u}$ = (3, 1, 0) x (4, 0, 1) = (1, -3, -4)

Vector director de s: $\vec{v}$ = (2, -2, 0) x (0, 1, -1) = (2, 2, 2) → $\vec{v}$ = (1, 1, 1)

El plano está determinado por el punto A(1, 1, 2) y por los vectores direccionales $\vec{u}$ = (1, -3,-4) y $\vec{v}$ = (1, 1, 1):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) - 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \rightarrow x - 5y + 4z - 4 = 0$$

16	**Dados los puntos A(1, 0, 2), B(0, 1, 3), C(-1, 2, 0) y D(2, -1, 3), hallar la ecuación del plano que contiene a la recta AB y es paralelo a la recta CD.**

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto A(1, 0, 2) y por los vectores directores $\overline{AB}$ =(-1, 1,1) y $\overline{CD}$ =(3, -3, 3):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6(x-1) + 6y = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0$$

17	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, 0, 0) y contiene a la recta r dada por** $r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3-3t \\ z=4+2t \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Sea B(2, 3, 4) un punto de r y $\vec{u}$ = (1, -3, 2) un vector director de r.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\overline{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -18(x-1) - 2y + 6z = 0 \rightarrow 9x + y - 3z - 9 = 0$$

18	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(-1, 2, 0) y contiene a la recta** $r \equiv \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

El plano pertenece al haz de planos determinado por la recta r:

x – 2y + z – 3 + k(y + 3z – 5) = 0 siendo k cualquier nº real.

Como pasa por el punto A(-1, 2, 0), se obtiene: -1 – 4 – 3 + k(2 – 5) = 0 → k = -8/3

Por tanto la ecuación del plano es: $x - 2y + z - 3 - \frac{8}{3}(y + 3z - 5) = 0 \rightarrow 3x - 14y - 21z + 31 = 0$

19	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta** $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$

<u>*SOLUCIÓN:*</u>

Vector director de r: $\vec{u} = (2, 3, 4)$ Punto de r: A(1, 1, 1)

La ecuación del plano viene determinada por el origen y por los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

20	**Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta** $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ **y es paralela a la recta s que pasa por los puntos B(2, 0, 0) y C(0, 1, 0)**

<u>*SOLUCIÓN:*</u>

Un punto de la recta r es A(1,1,0) y un vector director $\vec{u} = (2, 3, 1)$

Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{BC} = (-2, 1, 0)$.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 + 2(y - 1) - 8z = 0 \rightarrow x + 2y - 8z - 3 = 0$$

21	**Hallar la ecuación de un plano que contiene a la recta** $r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ **y es paralelo a la recta** $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$

<u>*SOLUCIÓN:*</u>

Resolviendo el sistema obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2x+z=y \end{cases} \xrightarrow{y=t} \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=y-2x=t-2+2t=-2+3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

Un punto de la recta r es A(1, 0, -2) y un vector director es $\vec{u} = (-1, 1, 3)$.

Un vector director de la recta s es $\vec{v} = (2, 3, -4)$.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -13(x - 1) + 2y - 5(z + 2) = 0 \rightarrow 13x - 2y + 5z + 3 = 0$$

22	**Hallar la ecuación de un plano que contiene a la recta** $r \equiv \begin{cases} 3x-2y-z+2=0 \\ x-y-2z+1=0 \end{cases}$ **y es paralelo a la recta** $s \equiv \frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-17}{-1}$

SOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} 3x-2y-z+2=0 \\ x-y-2z+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-2y=z-2 \\ x-y=2z-1 \end{cases} \rightarrow \frac{\begin{cases} 3x-2y=z-2 \\ -2x+2y=-4z+2 \end{cases}}{x=-3z} \rightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=1-5z \end{cases} \xrightarrow{z=t} \begin{cases} x=-3t \\ y=1-5t \\ z=t \end{cases}$$

Un punto de la recta r es A(0, 1, 0) y un vector director es $\vec{u}$ = (-3, -5, 1).

Un vector director de la recta s es $\vec{v}$ = (3, -2, -1).

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x + 21z = 0 \rightarrow x + 3z = 0$$