1 TASA DE VARIACIÓN MEDIA

La tasa de variación media de una función nos da una idea de la rapidez con que crece o decrece en un intervalo.

Sea $y = f(x)$ una función que relaciona la variable dependiente (y) con la variable independiente (x), se llama:

- **Incremento de x**, y se denota por Δx, a la diferencia que existe entre los valores de la variable

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

- **Incremento de la función**, y se denota por Δy, a la diferencia que existe entre los valores de la función:

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

- Dada una función $y = f(x)$, la **tasa de variación media** de una función f en el intervalo $[x_0,x_1]$ viene dado por el cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

La tasa de variación media puede ser negativa, positiva o nula, dependiendo del incremento de y.

La variación media en el intervalo $[x_0,x_1]$ representa gráficamente la pendiente de la recta que pasa por $P(x_0,f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$

Ejemplo 1

Un comerciante, tras muchos años de experiencia, establece la siguiente relación:

$$V = -0{'}2 \cdot p + 100$$

Siendo: V = nº de unidades vendidas de cierto producto p = precio unitario en €

Para un precio p = 10 € las ventas ascienden a V = 98 €.

Si el precio aumenta en 10 €, las ventas descienden a 96 €.

La tasa de variación media en dicho intervalo es:

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{96-98}{20-10} = -0{'}2$$

Este cociente indica cómo desciende las ventas al aumentar el precio en una unidad.

La tasa de variación media no es igual aunque el incremento de la variable, Δx, sea el mismo.

Ejemplo 2

Sea $f(x) = x^2$ en los intervalos $I_1 = [2,4]$, $I_2 = [4,6]$, $I_3 = [6,8]$

$$T_{I1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4^2-2^2}{4-2} = \frac{16-4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$T_{I2} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6^2-4^2}{6-4} = \frac{36-16}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$T_{I3} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8^2-6^2}{6-4} = \frac{64-36}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

2 TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

La tasa de variación media permite estudiar el comportamiento de una magnitud en un intervalo, pero en ocasiones es interesante conocer su comportamiento en un instante.

Por ejemplo, si se trata del movimiento de un coche, lo que nos interesa es conocer qué velocidad lleva en cada momento.

La solución se reduce a estudiar la variación instantánea en un punto cualquiera x_0, para ello basta tomar intervalos de la forma $[x_0, x_0 + h]$ cada vez más pequeños, es decir, determinar la variación cuando h se aproxime a 0.

Sea y = f(x) una función que relaciona la variable dependiente (y) con la variable independiente (x):

- La **tasa de variación instantánea** es el límite de las tasas de variación media cuando los intervalos de la variable independiente se hacen cada vez más pequeños.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La tasa de variación instantánea representa gráficamente la pendiente de la recta tangente de una función en un punto dado.

Las siguientes situaciones son otros ejemplos en los que se presenta el concepto de tasa de variación instantánea:

- Presión del agua en cada uno de los puntos de una presa.
- Pendiente que tiene una carretera de montaña en cada punto.
- Aceleración y velocidad de un móvil en un instante dado.

Ejemplo 3

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la ecuación $f(t) = 2t^2$ (expresado en m)

¿Cuál es la velocidad en instante t = 4s?

Calculamos la tasa de variación instantánea para t = 4:

$$V(4) = \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot(4+h)^2-2\cdot 4^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{32+16h+2h^2-32}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{16h+2h^2}{h} = \frac{0}{0}$$

Descomponiendo y simplificando, obtenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{16h+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(16+2h)\cdot h}{h} = \lim_{h\to 0}(16+2h) = 16$$

Por tanto, la velocidad en el instante t = 4 es v = 16 m/s

3 EL PROBLEMA DE LA TANGENTE

Uno de los problemas que ha dado origen al estudio del cálculo diferencial es el de la determinación de la tangente a una curva en uno de sus puntos.

Como al conocer la pendiente de una recta y un punto de ella, la recta queda completamente determinada, se tiene que el problema de trazar una recta tangente a una curva dada, por un punto de ésta, se reduce a encontrar la pendiente de la recta.

Intuitivamente la tangente en un punto P se suele considerar como la recta hacia la que tienden las rectas que pasan por P y Q cuando Q se mueve libremente hacia P.

Sea $P(x_0,y_0)$ un punto fijo de la curva correspondiente a la gráfica de la función $y = f(x)$.

La ecuación de la recta es $y - y_0 = m(x - x_0)$, siendo $y_0 = f(x_0)$

Vamos a ver cómo determinar la pendiente m, pero primero veamos un ejemplo:

Ejemplo 4

Sea la curva correspondiente a la gráfica de la parábola $y = x^2$

Calculamos la tangente a dicha curva en el punto P de abscisa x = 1.

Sea un punto Q de la curva, dicho punto tendrá coordenadas (b,b^2), donde b es un nº real.

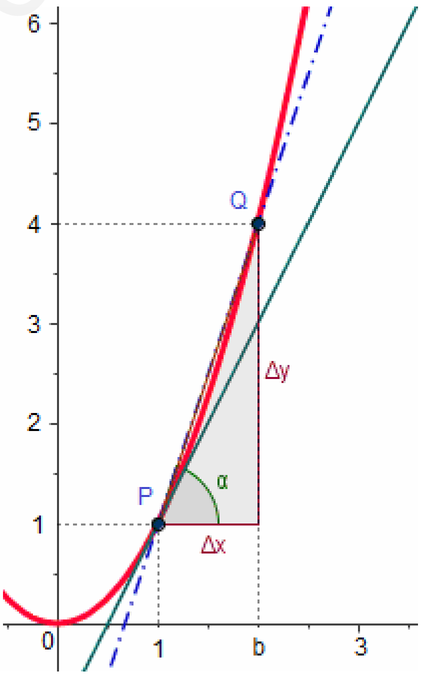
Intuitivamente, la tangente en P se suele considerar como la recta hacia la que tienden las rectas secantes que pasan por los puntos P y Q cuando Q se mueve hacia P.

La ecuación de la recta secante que pasa por P y Q es:

$$y-1=\frac{b^2-1}{b-1}(x-1)\text{, cuya pendiente es } m = \frac{b^2-1}{b-1}$$

Dicha pendiente m es la tangente del ángulo α que forma la recta secante con la dirección positiva del eje X, es decir:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b^2-1}{b-1}$$



¿Qué ocurre cuando el punto Q se mueve aproximándose a P?

Si el punto Q se aproxima a P, las sucesivas secantes se van aproximando cada vez más a la recta tangente, con lo cual, las pendientes de las rectas secantes se aproximarán al valor de la pendiente de la tangente.

Decir que Q tiende a P equivale a decir que $b \to 1$

Pendiente de la tangente: $m = \lim_{b\to 1}\frac{b^2-1}{b-1}=\lim_{b\to 1}\frac{(b-1)(b+1)}{b-1}=\lim_{b\to 1}(b+1)=2$

Luego la tangente a la curva en el punto P(1,1) es la recta cuya pendiente es 2.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-1=2\cdot(x-1)$

Generalizando

Sea y = f(x) una función, vamos a determinar la recta tangente a la curva correspondiente a una función en un punto $P(x_0, f(x_0))$.

La recta tendrá por ecuación: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$

Sea Q un punto de dicha curva distinto de P, cuyas coordenadas son $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$

La tasa de variación media en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ coincide con la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por P y Q.

Además, la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje X.

Por tanto, si consideramos que α_h es el ángulo que forma la recta PQ con el eje OX, tenemos:

$$\text{tg}\ \alpha_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A este cociente se le denomina "cociente incremental en el punto x_0". Este cociente incremental indica la **rapidez promedio** de variación de la función en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

Cuando h tiende a cero, la recta secante se convierte en la recta tangente a la curva en el punto P, por tanto, la pendiente de la recta secante en la pendiente de la recta tangente.

Si denotamos por m la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0,f(x_0))$, entonces

$$m = \text{tg}\ \alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si denotamos como $x = x_0 + h$, entonces $h = x - x_0$.

Si $h \to 0$, se verifica que $x - x_0 \to 0$, con lo cual $x \to x_0$

De esta forma, el límite anterior quedaría:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ejemplo 5

1. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto (1,-2)

La ecuación de la recta tangente es: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Utilizando la definición anterior vamos a averiguar la pendiente en el punto (1,-2).

1ª forma: $m(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-(-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1$

2ª forma: $m(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-3(1+h)-(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-h}{h} = \lim_{h\to 0}(h-1) = -1$

Luego m(1) = -1, por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y + 2 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 - 2 \Rightarrow y = -x - 1$$

- Dada una función y = f(x) la ***pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0,f(x_0))$*** es:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

La ecuación de la recta es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

- Se dice que la ***recta normal a una curva en el punto $P(x_0, y_0)$***, es la línea que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

La ecuación de la recta es:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$$

Recordemos que dos rectas son perpendiculares, si y solo si el producto de sus pendientes es -1, es decir:

Si m_T es la pendiente de la recta tangente y m_N la de la recta normal, entonces: $m_N = -\frac{1}{m_T}$

Ejemplo 6

1. Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva con ecuación $f(x) = 2x^2 - 5$ en el punto de coordenadas (1,-3).

Averiguamos primero la pendiente de la recta tangente:

$$m_T = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5-(-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}2(x+1) = 4$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente: $y + 3 = 4\cdot(x - 1)$.

Si $m_T = 4 \Rightarrow$ Pendiente de la recta normal es $m_N = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ Ecuación de la recta: $y + 3 = -\frac{1}{4}(x - 1)$.

2. Determinar en qué puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ es paralela al eje OX. Encuentra la ecuación de las rectas.

La derivada de la función $y = x^3 - 3x + 1$ es $y' = 3x^2 - 3$.

La recta tangente es paralela al eje OX $\rightarrow$ su pendiente es 0

Imponiendo que $y' = 0$: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- Si $x = 1 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto (1, –1) $\rightarrow$ Recta tangente: $y = -1$
- Si $x = -1 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ Punto (1, 3) $\rightarrow$ Recta tangente: $y = 3$

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola con ecuación $y = x^2$, y que es paralela a la recta con ecuación $y = 4x$.

Recuerda que dos rectas paralelas tienen sus pendientes iguales.

Como no nos indican el punto de tangencia en la curva, suponemos que sus coordenadas son (a,b).

Como la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x$, entonces $m(a) = 4$.

$$m(a) = 4 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2^2 = 4$$

El punto de tangencia es (2,4) y la recta es $y - 4 = 4(x - 2) \Rightarrow$ Ecuación: $y = 4x - 4$

4 CONCEPTO DE DERIVADA EN UN PUNTO

En la resolución del problema del trazado de una recta tangente a una curva se obtuvo como resultado el siguiente límite:

$$\text{Pendiente: } m = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva con ecuación y = f(x) en el punto (x_0, $f(x_0)$), es precisamente la derivada de f evaluada en x_0.

- Se llama ***derivada*** de la **función** y = f(x) en un punto $x_0 \in$ Dom(f) al límite (si existe), y se simboliza por $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Se suele representar por $f'(x_0)=D\left[f(x_0)\right]=\frac{df}{dx}(x_0)$

- Llamando $x = x_0 + h$, se puede definir la derivada en un punto x_0 como:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si el límite existe, se dice que la ***función*** es ***derivable*** en el punto x_0.

- Se dice que una ***función*** es ***derivable en un intervalo*** (a,b) si es derivable en todos los puntos de dicho intervalo.

Si y = f(x), con f una función derivable, entonces la derivada de f puede denotarse por:

a) $D_x f(x)$ que se lee: derivada de f(x) respecto a x.

b) $D_x y$ que se lee: derivada de “y" respecto a x.

c) y´ = f´(x) que se lee: “y” prima".

Ejemplo 7

1) La derivada de la función constante f(x) = 3 en el punto de abscisa x = 1 es:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0 \;\to\; f'(1)=0$$

2) La derivada de la función f(x) = x^2 en el punto de abscisa x = 1 es:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h^2+2h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}}=2 \;\to\; f'(1)=2$$

3) La derivada de la función f(x) = 3x – 2 en el punto de abscisa x = 2 es:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3=3 \;\to f'(2)=3$$

4.1. Derivadas laterales. Funciones no derivables en un punto.

- Se dice que una función f es **derivable** en x_0, $x_0 \in$ Dom(f), **por la derecha** si existe el límite:

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- Se dice que una función f es **derivable** en x_0, $x_0 \in$ Dom(f), **por la izquierda** si existe el límite:

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ambos límites se llaman ***derivadas laterales de f*** en x_0.

- Una función es ***derivable en un punto*** si, y sólo si, es derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto y las derivadas laterales coinciden:

$$f \text{ es derivable en } x_0 \text{ si y sólo si } f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

Teniendo en cuenta esto, una de las razones por la cual no existe la derivada en un punto sería que no coincidan las derivadas laterales.

➢ Se dice que una ***función*** es ***derivable en un intervalo*** [a,b] si:

- Es derivable $\forall x \in (a,b)$
- Existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

Ejemplo 8

1. Sea f(x) = |x| = $\begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$, veamos que no es derivable en x = 0.

- Derivada por la derecha: $f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \Rightarrow f'(0^+) = 1$

- Derivada por la izquierda: $f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h-0}{h} = -1 \Rightarrow f'(0^-) = -1$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, entonces no existe f´(0), luego la función no es derivable en x = 0.

2. Estudiar la derivabilidad de la función f(x) = $\begin{cases} 2-x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ en el punto x = 0

- Derivada por la derecha: $f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \Rightarrow f'(0^+) = 0$

- Derivada por la izquierda: $f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2-x^2+2}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 \Rightarrow f'(0^-) = 0$

$f'(0^+) = f'(0^-) = 0 \Rightarrow$ f´(0) = 0, luego la función es derivable en x = 0.

4.2. Continuidad de las funciones derivables

"Si una función es derivable en un punto x = a, entonces es continua para x = a".

Demostración:

Si f es continua en x = a se verifica $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$*, o bien,* $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$

Si f es derivable en x = a, entonces existe el límite $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Vamos a demostrar que $\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$ *:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0$$

Consecuencia inmediata:

"Si una función no es continua en un punto x = a, entonces no es derivable en dicho punto"

El reciproco no tiene por qué ser cierto, es decir, hay funciones que son continuas en un punto y que, sin embargo, no son derivables.

Ejemplo 9

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x) en x = 1

$$f(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{si} \quad x\geq 1\\ x+1 & \text{si} \quad x<1\end{cases}$$

- La función es continua en x = 1:

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(-x+3)=2$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

Coinciden los dos límites laterales, por tanto, existe $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

Además, f(1) = 2 = $\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$ la función es continua en x = 1.

- La función no es derivable en x = 1

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{-x+3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x+1}{x-1}=-1\Rightarrow f'(1^+)=-1$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1\Rightarrow f'(1^-)=1$$

Como $f'(1^+)\neq f'(1^-)$, entonces no existe f´(1), luego la función no es derivable en x = 1

Luego, se ha comprobado que aunque *f* es continua en *x* = 1 se tiene que *f* no es derivable en *x* = 1.

5 FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

A partir de una función y = f(x) podemos calcular su derivada en los puntos de su dominio en los que es derivable, obteniendo como resultado un número real. Por este motivo, tiene sentido considerar una función que llamaremos función derivada.

La ***función derivada*** de una función f, que simbolizamos por f´, es la función que a cada valor x del dominio de f, donde f es derivable, se le asigna el valor de la derivada de f en dicho punto, f´(x).

$$f´: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f´(x)$$

Siendo:

$$f´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función derivada de f se simboliza también con D(f) o y´.

Derivadas sucesivas

Si una función f es derivable, la función derivada de f o ***primera derivada de f*** es la función f´.

Si f´ es derivable, la función derivada de f´ o función ***derivada segunda*** de f es la función (f´)´, que se simboliza con f´´(x).

La función derivada de la derivada segunda f´´(x), si existe, se llama ***derivada tercera*** de f y se simboliza con f´´´(x).

Procediendo análogamente, podemos definir las derivadas cuarta, quinta, …, enésima de la función y = f(x), que representamos, respectivamente, $f^{4)}(x)$, $f^{5)}(x)$, …, $f^{n)}(x)$.

Ejemplo 10

Calcular las derivadas sucesivas de $f(x) = x^3$

$$f´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

$$f´´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f´(x+h)-f´(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3h^2 + 6xh - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (3h+6x) = 6x$$

$$f´´´(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f´´(x+h)-f´´(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)-6x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6x+6h-6x}{h} = \lim_{h\to 0} (6) = 6$$

$$f^{4)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f´´´(x+h)-f´´´(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6-6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Las derivadas sucesivas de esta función son $f^{5)}(x)$, …, $f^{n)}(x) = 0$.

6 DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

6.1. Derivada de la función constante

La derivada de una función constante es cero.

Demostración

$$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

6.2. Derivada de la función identidad

La derivada de una función identidad es 1.

Demostración

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

6.3. Derivada de la función lineal

Si $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

Demostración

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a \Rightarrow f'(x) = a$$

6.4. Derivada de la función potencial de exponente real

Si $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Demostración

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1}) = n\cdot a^{n-1} \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ejemplo 11

1) $f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2$

2) $f(x) = -3x + 2 \Rightarrow f'(x) = -3$

3) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

4) $f(x) = x^6 \Rightarrow f'(x) = 6x^5$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2\cdot x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

6) $f(x) = \dfrac{2}{x^4} = 2x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -8\cdot x^{-5} = -\dfrac{8}{x^5}$

7) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

7 OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES

Aunque dada la ecuación de una función es posible obtener su respectiva función derivada utilizando la definición, para algunas funciones este procedimiento resulta sumamente tedioso.

Surge entonces la necesidad de simplificar este proceso, lo cual puede lograrse al estudiar las reglas de derivación.

7.1. Derivada de la suma de funciones

Si f y g son derivables en un punto, entonces la suma de las funciones también es derivable en dicho punto.

La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de dichas funciones:

$$(f + g)´(x) = f´(x) + g´(x)$$

Ejemplo 12

1.- Si $f´(x) = 2x$ y $g´(x) = 1 – 3x$ $\rightarrow$ $(f + g)´(x) = f´(x) + g´(x) = 2x + 1 – 3x = 1 – x$

2.- Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ $\rightarrow$ $(f + g)´(x) = f´(x) + g´(x) = 3x^2 + 2x$.

7.2. Derivada del producto de un nº real por una función

Si f es derivable en un punto y k es un nº real, entonces la función $k\cdot f(x)$ es derivable en dicho punto:

$$(k \cdot f)´(x) = k \cdot f´(x)$$

Ejemplo 13

1. Si $f(x) = 5x^2 \Rightarrow f´(x) = 5 \cdot 2 \cdot x = 10x$
2. Si $f(x) = 2x^3 \Rightarrow f´(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$
3. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{2x}{2} = x$
4. Si $f(x) = \dfrac{2x^3}{9} \Rightarrow f´(x) = \dfrac{6x^2}{9} = \dfrac{2x^2}{3}$

Consecuencia: Derivada de una función polinómica

Toda función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ es derivable y su derivada es:

$$\text{Si } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \Rightarrow f´(x) = a_1 + a_2x + \dots + n\cdot a_nx^{n-1}$$

Ejemplo 14

1. Si $f(x) = 4x^2 + 3x – 2 \Rightarrow f´(x) = 8x + 3$
2. Si $f(x) = x^3 + 2x^2 – 2x + 6 \Rightarrow f´(x) = 3x^2 + 4x – 2$
3. Si $f(x) = 6x^5 – 7x^2 – 2 \Rightarrow f´(x) = 30x^4 – 14x$

7.3. Derivada del producto de dos funciones

La derivada del producto de dos funciones derivables en un punto es una función derivable en él.

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda. Es decir:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo 15

1. Si $f(x) = x^2 (3x - 2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot (3x - 2) + 3 \cdot x^2 = 6x^2 - 4x + 3x^2 = 9x^2 - 4x$

2. Si $f(x) = x(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = (x^2 - 1) + x \cdot 2x = x^2 - 1 + 2x^2 = 3x^2 - 1$

3. Si $f(x) = (x^2 + 3x - 1)(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = (2x + 3)(x^2 + 1) + (x^2 + 3x - 1) \cdot 2x =$

$= 2x^3 + 2x + 3x^2 + 3 + 2x^3 + 6x^2 - 2x = 4x^3 + 9x^2 + 3$

7.4. Derivada del cociente de dos funciones

Si f y g son funciones derivables en $x = a$ y $g(a) \neq 0$, entonces el cociente f/g es una función derivable en él.

La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividido todo por el denominador sin derivar elevado al cuadrado. Es decir:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo 16

1. Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$

2. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x+2) - 1}{(x+2)^2} = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

3. Si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x \cdot (3x+2) - (x^2 - 1) \cdot 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{6x^2 + 4x - 3x^2 + 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{(3x+2)^2}$

4. Si $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2-1) - (x^2+2x-3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x + 2x^2 - 2 - 2x^3 - 4x + 6x}{(x^2-1)^2} =$

$$= \frac{2x^2 - 2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2}{(x^2-1)}$$

7.5. Regla de la cadena: Derivada de una función compuesta.

Sea la función $f(x) = (2x^3 + 4)^3$, ¿cómo calcular $f'(x)$?

Esta función es una composición de dos funciones:

$x \xrightarrow{g} 2x^3+4 \xrightarrow{h} (2x^3+4)^3$, donde $g(x) = 2x^3 + 4$ y $h(x) = x^3$

Ambas funciones, g y h, son derivables, con lo cual la función compuesta f también lo es:

"Si f es una función derivable en x = a y g es derivable en f(a), entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en x = a"

Regla de la cadena:

La derivada de la función $g \circ f$, f compuesta con g, es igual a la derivada de la función g por la derivada de la función f. Es decir:

$$\text{Si } F(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo 17

1. Sea $F(x) = (2x^3 + 4)^3$

$F(x) = (g \circ f)(x)$, donde $f(x) = 2x^3 + 4$ y $g(x) = x^3$

$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(2x^3 + 4)^2 \cdot (6x^2) = 18x^2 \cdot (2x^3 + 4)^2$

2. Sea $F(x) = \sqrt{2x+5}$

$F(x) = (g \circ f)(x)$, donde $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

3. Si $F(x) = \sqrt{x^2-1}$

$F(x) = (g \circ f)(x)$, donde $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

4. Si $F(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow F(x) = (g \circ f)(x)$, donde $f(x) = \frac{x+1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \cdot \frac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

1.- *Derivada de una constante* $k \in \mathbb{R}$: Si $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$

2.- *Derivada de una suma*: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

3.- *Derivada de un producto de funciones*:

Si $k \in \mathbb{R}$, $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$ $\qquad$ $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4.- *Derivada de un cociente de funciones*:

Si $k \in \mathbb{R}$, $\left[\dfrac{k}{f(x)}\right]' = \dfrac{-k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

5.- *Derivada de una composición de funciones*: $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

6.- *Derivada de la función inversa:* *Si f y g son funciones inversas*:

$[g(x)]' = \dfrac{1}{f'(x)}$, *siendo* $g \circ f = f \circ g = I$

DERIVADA DE FUNCIONES ELEMENTALES

1.- *Derivada de una potencia:*

$[f(x)^n]' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$, *siendo* $n \in \mathbb{R}$

2.- *Derivada de una función irracional:*

$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$ $\qquad$ $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$, *siendo* $n \in \mathbb{R}$

3.- *Derivada de una función exponencial:*

$\left[a^{f(x)}\right]' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$ $\qquad$ $\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

4.- *Derivada de una función logarítmica:*

$\left[\log_a f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$ $\qquad$ $\left[\ln f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

5.- *Derivada de las funciones trigonométricas e inversas:*

$[\text{sen } f(x)]' = f'(x) \cdot \cos f(x)$ $\qquad$ $[\text{arcsen } f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$

$[\cos f(x)]' = -f'(x) \cdot \text{sen } f(x)$ $\qquad$ $[\arccos f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$

$[\text{tg } f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{[\cos f(x)]^2} = f'(x) \cdot \left[1 + \text{tg}^2 f(x)\right]$ $\qquad$ $[\text{arctg } f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

$$[\text{cosec } f(x)]' = -\frac{\cos(f(x) \cdot f'(x)}{[\text{sen } f(x)]^2} = -f'(x) \cdot \text{cosec } f(x) \cdot \text{ctg}(x)$$

$$[\sec f(x)]' = \frac{\text{sen}(f(x) \cdot f'(x)}{[\cos f(x)]^2} = f'(x) \cdot \sec f(x) \cdot \text{tg}(x)$$

$$[\text{cotg } f(x)]' = -\frac{f'(x)}{[\text{sen } f(x)]^2} = -f'(x) \cdot \left[1 + \text{cotg}^2 f(x)\right]$$

Ejemplo 18

1. Si f(x) = ln $(x^2 + 1) \to f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

2. Si $f(x) = e^{(x-1)^2} \to f'(x) = e^{(x-1)^2} \cdot 2(x-1)$

3. Si $f(x) = \cos(3x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(3x^2+1) \cdot 6x = -6x \cdot \operatorname{sen}(3x^2+1)$

4. Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}\cos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

5. Si $f(x) = \operatorname{tg}(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = [1 + \operatorname{tg}^2(x^2+1)] \cdot 2x$

6. $f(x) = \operatorname{sen} x^2 \Rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

7. $f(x) = \ln \cos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

8. $f(x) = \sec x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \quad f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$

9. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x) = \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \dfrac{\cos 2x}{2}$

10. $f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{1+(2x+1)^2} = \dfrac{2}{4x^2+4x+2} = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

11. Calcular la derivada de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x^2 - x & \text{si} \quad -3 < x \le 3 \\ 6-x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Calculamos la derivada de cada una de las funciones:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Comprobamos si las derivadas laterales en los puntos x = 1 y x = 3 está definida:

o $f'(1^-) = 1 \quad y \quad f'(1^+) = 2-1 = 1 \longrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) = 1 \to$ f es derivable en x = 1

o $f'(3^-) = 6-1 = 5 \quad y \quad f'(3^+) = -1 \longrightarrow f'(1^-) \ne f'(1^+) \to$ f no es derivable en x = 3

Por tanto, la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ -1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

9 OTRAS TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

9.1. Derivación logarítmica

La derivación logarítmica es un procedimiento aplicable a ciertas funciones complicadas.

Consiste en tomar logaritmo neperiano de dicha función y aplicar a éste el proceso de derivación.

Una vez realizada la derivación, se despeja la derivada de la función buscada.

Ejemplo 19

1. *Derivada de la función potencial de exponente real* $f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Sea $y = f(x) = x^r$.

Tomando logaritmo neperiano: $\text{Ln } y = r \cdot \text{Ln } x$

Derivando los dos miembros: $\dfrac{y'}{y} = r \cdot \dfrac{1}{x}$

Despejando y': $y' = y \cdot r\dfrac{1}{x}$

Sustituyendo y por su valor: $f'(x) = x^r \cdot r\dfrac{1}{x} = r\dfrac{1}{x^{r-1}}$

2. *Derivada de la función exponencial* $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \text{Ln } a$

Sea $y = a^x$.

Tomando logaritmo neperiano: $\text{Ln } y = x \cdot \text{Ln } a$

Derivando los dos miembros: $\dfrac{y'}{y} = 1 \cdot \ln a$

Despejando y': $y' = y \cdot \ln a$

Sustituyendo y por su valor: $f'(x) = a^x \cdot \text{Ln } a$

3. *Derivada de la función radical* $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}$

Tomando logaritmo neperiano: $\text{Ln } y = \text{Ln } x^{\frac{1}{n}}$

Derivando los dos miembros: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{x}$

Despejando y': $y' = y \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{x}$

Sustituyendo y por su valor: $f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}$