

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2005

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 + 2} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^2 + 1}{-3x^3 + x + 1} = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{3x} \right)^{x^2 + 1} = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2}} = e^2$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)^{2x} = 0$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right) = 0$
7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x - 9} - 4}{x - 5} = \frac{5}{8}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x^7 - 1} = \frac{8}{7}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{2x + 1} = 1$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{2x} = e^{2/3}$

Problema 2 Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

La función es discontinua en el punto $x = 0$.

Problema 3 Calcular los valores de k para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$.

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3 - kx^2) = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{kx}\right) = \frac{2}{k} \end{cases} \implies 3 - k = \frac{2}{k} \implies \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$