Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2014

Problema 1 En una etapa contrareloj de 40 Km en el último Tour de Francia, la velocidad, en Km/h de un determinado ciclista, en función de la distancia recorrida, viene dada por la expresión siguiente:

$$V(x) = -0,05x^2 + 3,2x \quad 0 \le x \le 40$$

siendo x la distancia recorrida en Km. Se pide:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el ciclista cuando alcanza la velocidad máxima?

b) ¿Cuál es el valor de dicha velocidad máxima?

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $V(x)$.
Justificar la respuesta.

(Extremadura, Junio 2013)
Solución:

a)
$$V'(x) = -0,1x + 3,2 = 0 \Longrightarrow x = 32$$
$$V''(x) = -0,1 \Longrightarrow V''(32) = -0,1 < 0 \Longrightarrow x = 32 \text{ es un máximo}$$

b) La velocidad máxima será $V(32) = 51,2$ km/h.

c)

	$(0,32)$	$(32,40)$
$V'(x)$	$+$	$-$
$V(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,32)$ y decreciente en el $(32,40)$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

a) Calcular su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos locales.

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores. (Comunidad Valenciana, Junio 2013)

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{1, 3\}$ y los puntos de corte son: $(0, -4/3)$ y $(2, 0)$.

b) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) Monotonía

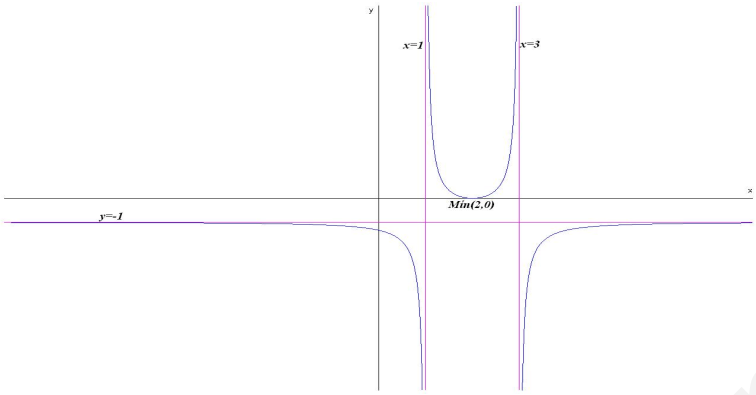
$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}, \quad f'(x) = \frac{2(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(2, 3) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

d) La función tiene un mínimo en el punto $(2, 0)$.

e) Representación gráfica



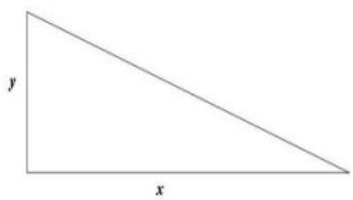
Problema 3 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $6\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

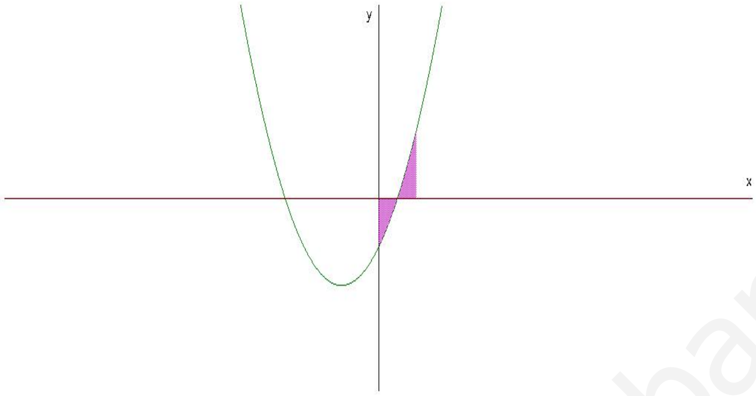
$S'(x) = 3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \dfrac{9}{2}\ u^2$



Problema 4 Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x) = x^2 + 4x - 5$ el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

Solución:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 + 4x - 5))\, dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^1 = -\frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^2 + 4x - 5))\, dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_1^2 = -\frac{10}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{18}{3} = 6\ u^2$$