Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CS)

Marzo 2013

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

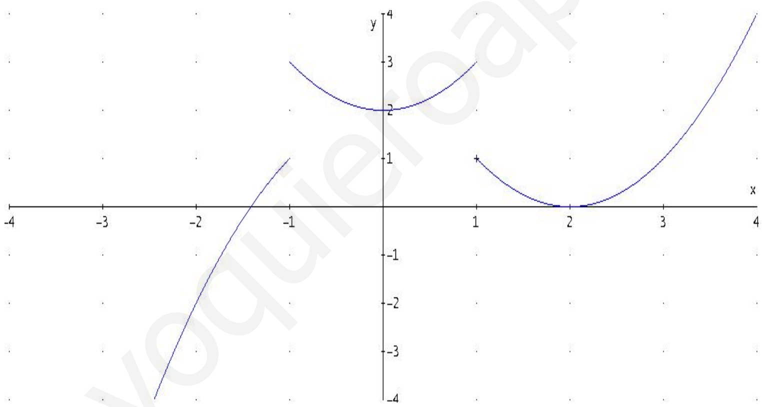
se pide:

a) Estudia su continuidad en los puntos de abcisa $x = -1$ y $x = 1$.

b) Represéntala gráficamente. Razona la respuesta.

Solución:

a) Gráficamente:



b) Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (-x^2+2) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2+2) = 3$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2+2) = 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x-2)^2 = 1$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x+3}$, determina

a) Calcula sus asíntotas

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2+3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = -9$$

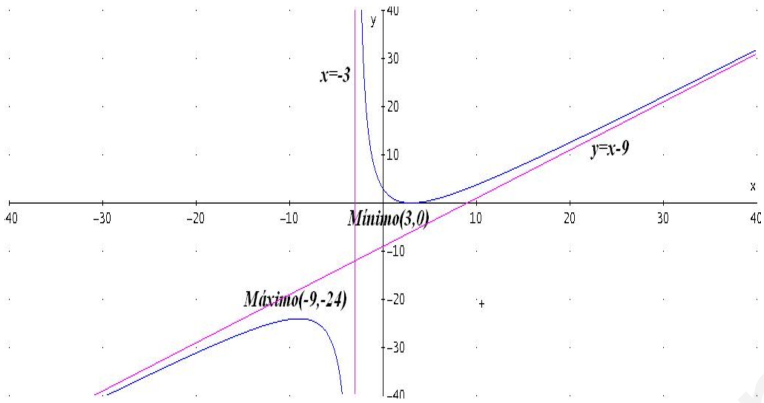
b) Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3, \ \ x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

La función tiene un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en el punto $(3, 0)$.



Problema 3 Encontrar el valor de los parámetros a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ ax^2 - 3bx + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (ax^2 - 3bx + 2) = a - 3b + 2$$

$$2a - b + 1 = a - 3b + 2 \Longrightarrow a + 2b - 1 = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2ax - 3b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 2a - 3b \end{cases} \Longrightarrow 4a - b = 2a - 3b \Longrightarrow a + b = 0$$

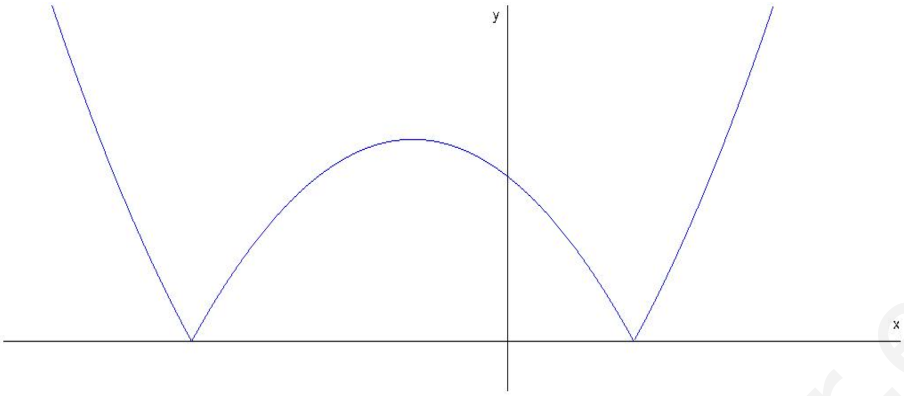
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$:

x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + 3x - 10 & \text{si} & x \le -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} & -5 < x \le 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 3 & \text{si} & x \le -5 \\ -2x - 3 & \text{si} & -5 < x \le 2 \\ 2x + 3 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$:

$$f'(-5^-) = -7, \quad f'(-5^+) = 7 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(2^-) = -7, \quad f'(2^+) = 7 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1,2)$ y tiene un extremo en el punto $(3,0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 2 \Longrightarrow a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \Longrightarrow 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{array} \right.$$