Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2011

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad -1 < x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

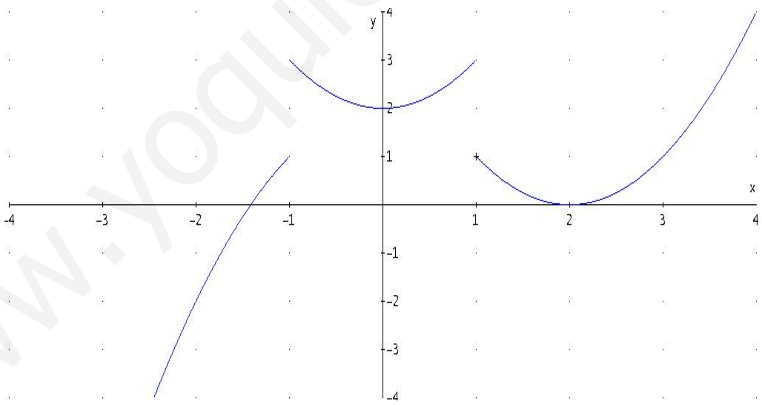
se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abcisa $x = -1$ y $x = 1$.
2. Represéntala gráficamente.
3. Extremos relativos de f en el intervalo $[-1, 1]$. Razona la respuesta.

(Castilla La Mancha (junio 2010))

Solución:

1. Gráficamente:



2. Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (-x^2+2) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2+2) = 3$$

En $x=-1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

Continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+2) = 3$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-}(x-2)^2 = 1$$

En $x=1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

3. La función es $f(x)=x^2+2$ en el intervalo $[-1,1]$.

$$f'(x)=2x=0 \Longrightarrow x=0$$

$$f''(x)=2>0 \Longrightarrow f''(0)=2>0$$

La función tiene un mínimo en el punto $(0,2)$. Decrece en el intervalo $(-1,0)$ y crece intervalo $(0,1)$.

Problema 2 Dada la función $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: en $x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \infty$$

- Oblicuas: $y=mx+n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2+3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x\right) = -9$$

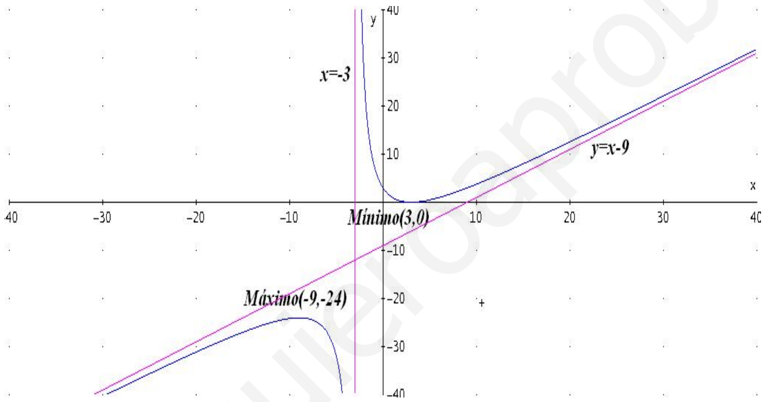
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{x^2+6x-27}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3, \ \ x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

La función tiene un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en el punto $(3, 0)$.



Problema 3 Una panadería se dedica a la elaboración y venta de magdalenas caseras.El coste en euros de producir x kg de magdalenas viene dado por la función

$$f(x) = 0,02x^3 - 0,3x^2 + \frac{35}{6}x$$

El precio de venta de 1 kg de magdalenas es de 5 euros.

1. Determina la función de beneficio neto diario de la panadería por la producción de magdalenas. ¿Cuál es el beneficio del panadero si un día elabora y vende exactamente 5 kg de magdalenas?

2. Hallar la cantidad de magdalenas que debe elaborar diariamente para conseguir el mayor beneficio. ¿Cuál es el beneficio máximo que puede alcanzar al día por la elaboración y venta de magdalenas?

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1.
$$b(x) = 5x - \left(0,02x^3 - 0,3x^2 + \frac{35}{6}x\right)$$
$$b(x) = -0,02x^3 + 0,3x^2 - \frac{5}{6}x$$
$$b(5) = 0,83 \text{ euros}$$

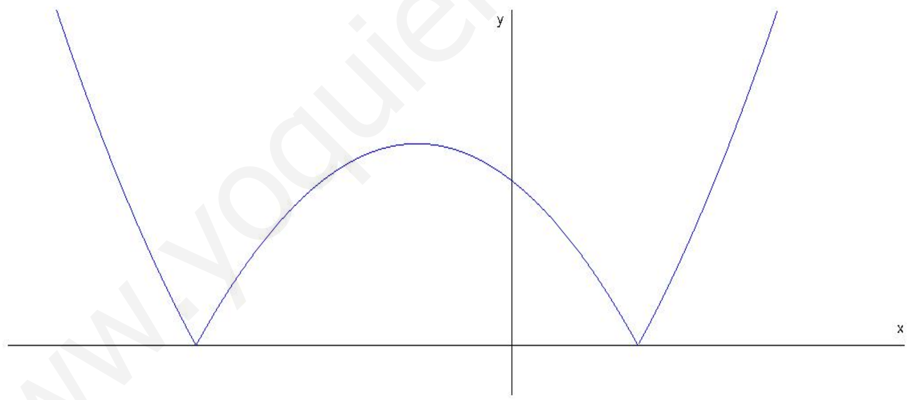
2.
$$b'(x) = -0,06x^2 + 0,6x - \frac{5}{6} = 0 \Longrightarrow x = 1,66, \quad x = 8,33$$

	$(-\infty; 1,66)$	$(1,66; 8,33)$	$(8,33; \infty)$
$b'(x)$	$-$	$+$	$-$
$b(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

El maxímo beneficio se obtiene con la elaboración de 8,33 kg de magdalenas y es de $f(8,33) = 2,31$ euros.

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}$:



x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x-10 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -(x^2+3x-10) & \text{si} \quad -5 < x \le 2 \\ x^2+3x-10 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -5$:

$$\lim_{x\longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -5^-} (x^2+3x-10) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -5^+} (-x^2-3x+10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (-x^2-3x+10) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} (x^2+3x-10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \le -5 \\ -2x-3 & \text{si} \quad -5 < x \le 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -5$:

$$f'(-5^-) = -7, \quad f'(-5^+) = 7 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(2^-) = -7, \quad f'(2^+) = 7 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Longrightarrow a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \Longrightarrow 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{cases}$$

Problema 6 Calcular el área encerrada por la función $f(x) = 3x^2 - 12$ el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

$$f(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$$

$$S_1 = \int_1^2 (3x^2 - 12)\, dx = x^3 - 12x\Big]_1^2 = -5$$

$$S_2 = \int_2^3 (3x^2 - 12)\, dx = x^3 - 12x\Big]_2^3 = 7$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 5 + 7 = 12\ u^2$$