Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Abril 2010

Problema 1 calcular a y b de manera que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 8 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + 2ax - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

- f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 8) = 3a - 2b + 8$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 + 2ax - 1) = b + 2a - 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) \Longrightarrow 3a - 2b + 8 = b + 2a - 1 \Longrightarrow a - 3b + 9 = 0$$

- f derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 2b - 2a \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 6a - 2b = 2b - 2a \Longrightarrow a - b = 0$$

- En conclusión:

$$\begin{cases} a - 3b + 9 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 9/2 \\ b = 9/2 \end{cases}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, determina

1. Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
2. Las asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos relativos.
5. Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

1. $Dom(f) = R - \{1\}$. Los puntos de corte serán los siguientes:

   Si $x = 0 \Longrightarrow (0,4)$ y si $f(x) = 0 \Longrightarrow (2,0)$ y $(-2,0)$.

2. Asíntotas:

   - Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

     $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} x^2 - 4x - 1 = \left[\frac{-3}{1^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} x^2 - 4x - 1 = \left[\frac{-3}{1^+}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: No hay

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$:

     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = 1$$

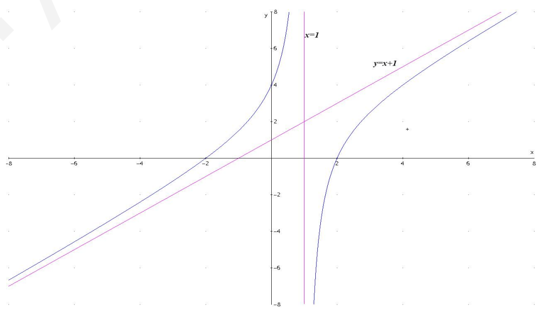
     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-4}{x-1} - x\right) = 1$$

     $$y = x + 1$$

3. Monotonía: $f'(x) = \dfrac{(x^2-2x+4)}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay ni Máximos ni Mínimos, la función es siempre positiva y por tanto es creciente en todo el dominio de la función.

4. Máximos y mínimos relativos: No hay

5. Representación gráfica:



Problema 3 Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + x + 4$.

Solución:

- Calculamos los puntos de corte de ambas funciones:

  $f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 + x + 4 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 3$

  Los límites de integración serán los extremos del intevalo $[-1, 3]$.

- Calculamos la integral indefinida de $f(x) - g(x)$:

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x$$

$$H(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

- Calculamos:

$$S = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx = H(3) - H(-1) = -\frac{32}{3}$$

- El área será:

$$\acute{A}rea = |S| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}\ u^2$$