

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)**  
**Febrero 2014**

---

---

**Problema 1** Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**Solución:**

- a) Dominio de  $f$ :  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
  - Corte con el eje  $OX$  hacemos  $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies$  No hay puntos de corte con  $OX$ .
  - Corte con el eje  $OY$  hacemos  $x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3)$ .
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	-	+

- d)  $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$  la función no tiene simetrías.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:**  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[ \frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[ \frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es  $y = x + 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .

La función es decreciente en el intervalo  $(-1, 1) \cup (1, 3)$ .

La función tiene un máximo en el punto  $(-1, -2)$  y un mínimo en  $(3, 6)$ .

g)

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3} \neq 0$$

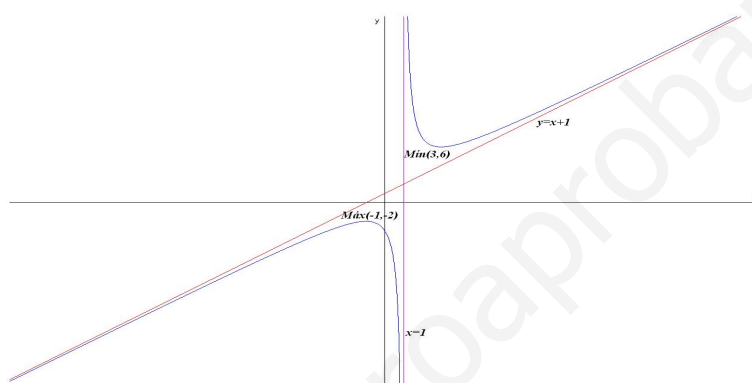
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava:  $(1, +\infty)$

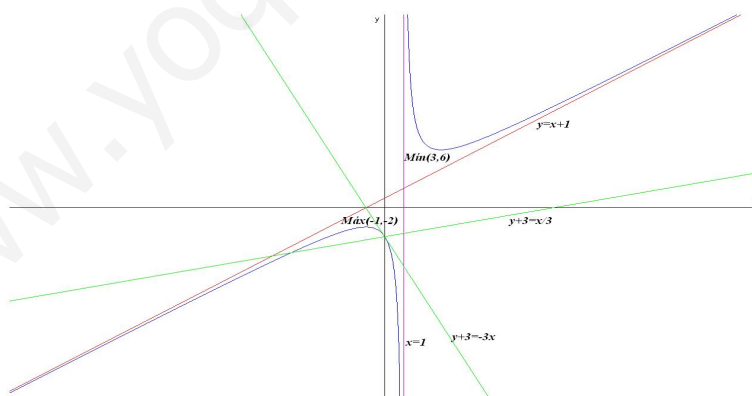
Convexa:  $(-\infty, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ :

Como  $m = f'(1) = -3$  tenemos que



Recta Tangente :  $y + 3 = -3x$

Recta Normal :  $y + 3 = \frac{1}{3}x$

Como  $f(0) = -3$  las rectas pasan por el punto  $(0, -3)$ .