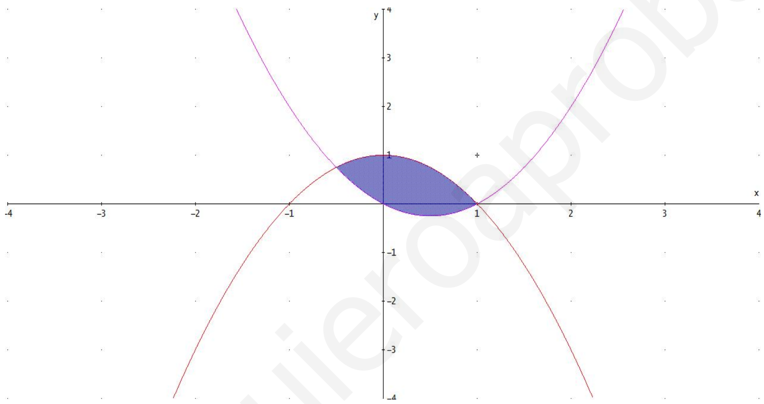
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2009

Problema 1 *(3 puntos)* Cáculese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 1 - x^2$$

Solución:



Buscamos los puntos de corte entre ambas gráficas

$$x^2 - x = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}, \ \ x = 1$$

$$S = \left| \int_{-1/2}^{1} (2x^2 - x - 1)\, dx \right| = \left| \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1/2}^{1} \Bigg| = \frac{9}{8}\, u^2$$

Problema 2 *(7 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x}, \quad x \neq 0$$

1. Determínense las asíntotas de f.

2. Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

3. Estúdiese su curvatura.

4. Calcúlese las rectas tangente y normal a esta función en el punto de abcisa $x = 1$

5. Calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+x+2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+x+2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No Hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{x} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+2}{x} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

$$y = x + 1$$

2.

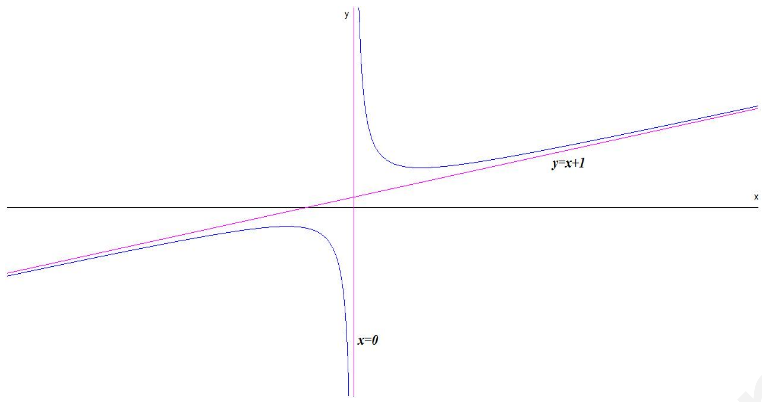
$$f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{2},\ \ x = \sqrt{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

La función decrece en el intervalo: $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

Presenta un máximo en el punto $(-\sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$ y un mínimo en $(\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$



3.

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \neq 0 \text{ siempre}$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcup$	cóncava $\bigcup$

4.

$$m = f'(1) = -1, \quad f(1) = 4$$

Recta Tangente: $y - 4 = -(x - 1) \Longrightarrow x + y - 5 = 0$

Recta Tangente: $y - 4 = x - 1 \Longrightarrow x - y + 3 = 0$

5.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x}\,dx = 2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + x\Big]_1^2 = \frac{5}{2} + 2\ln 2$$