Unidad 4 – Programación lineal

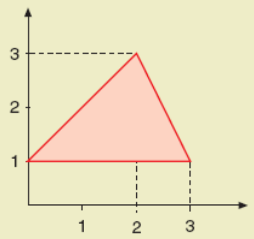
PÁGINA 79

cuestiones iniciales

1. Representa en el plano el conjunto de puntos que cumplen las siguientes condiciones:

a) $\begin{cases} y \le 2 \\ y \ge -1 \\ x < y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \\ x + y \le 3 \end{cases}$

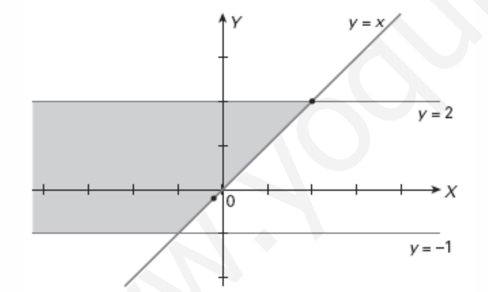
2. Escribe el sistema de inecuaciones cuya solución es el conjunto de puntos de la figura sombreada.



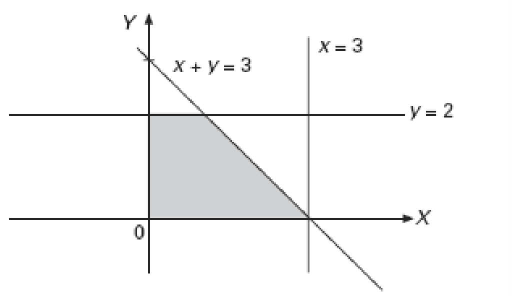
SOLUCIONES

1. Las regiones quedan:

a)



b)



2. El sistema pedido es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y > -1 \\ 2x + y < 7 \\ y > 1 \end{array}\right\}$$

PÁGINA 91

ACTIVIDADES

- Aplica la técnica de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Lentejas y garbanzos.** En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el saco de lentejas?

2. **Tres cartas.** De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un *oro*, hay una o dos *copas*; y a la derecha de una *copa*, hay una o dos *copas*. ¿De qué tres cartas se trata?

3. **Primas.** Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2 450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

SOLUCIONES

1. Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 Kg Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 Kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119-20=99.$$

Un cliente lleva 33 Kg. en los sacos de 18 Kg. y 15 Kg. y el otro cliente se lleva 66 Kg en los sacos de 19 Kg, 31 Kg, 16 Kg. El saco de lentejas es el que pesa 20 Kg.

2. El caballo y las sotas las señalamos con CSS. Para que verifiquen las condiciones han de ser: $C_c\,S_o\,S_c$

Por tanto, las cartas son:

- Caballo de copas.
- Sota de oros.
- Sota de copas.

3. Descomponiendo 2.450 en factores, obtenemos: $2\,450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades. La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

PÁGINA 98

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x + y - 7 \leq 0$ b) $2x - y + 3 \geq 0$ c) $y \geq 3$ d) $x \leq 5$

2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}4y \leq 0{,}9 \\ 0{,}2x - 0{,}1y \geq 1{,}2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 3x - 7 \leq 0 \\ y - 6x + 11 \leq 0 \end{cases}$

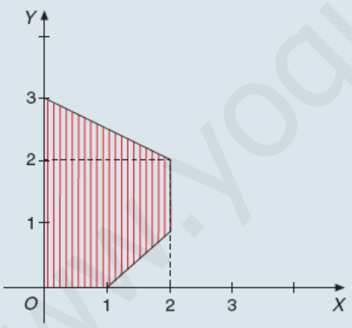
3. Encuentra el conjunto de puntos del plano que verifica el siguiente sistema de inecuaciones:

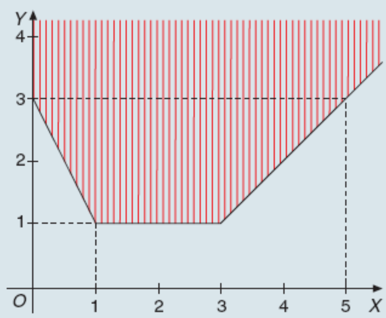
$$\begin{cases} 6 \leq y \leq 30 \\ 5x + 2y \leq 100 \\ 6x + y \geq 30 \\ x + 2y \geq 20 \end{cases}$$

4. Representa la región factible solución del sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 5 \\ x - 2y \leq 10 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$. Encuentra los vértices de la misma.

5. Encuentra el sistema de inecuaciones cuya región factible es el triángulo de vértices (1, 1), (2, 3) y (3, 1).

6. ¿Qué sistemas de inecuaciones tienen por solución la región rayada en cada uno de los gráficos siguientes?





7. Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$, sometida a las restricciones:

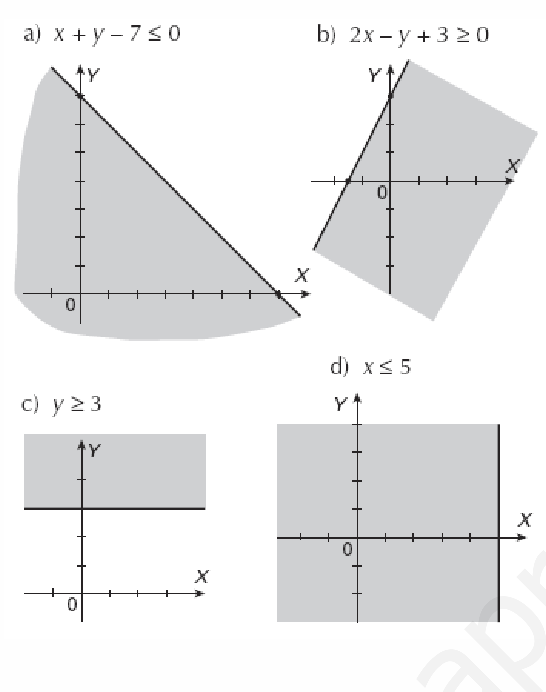
$y \leq 4$; $x \leq 3$; $x - y \leq 3$; $x - y \geq 0$

8. Maximiza la función $z = 3x + 2y$ en el dominio definido por las inecuaciones siguientes:

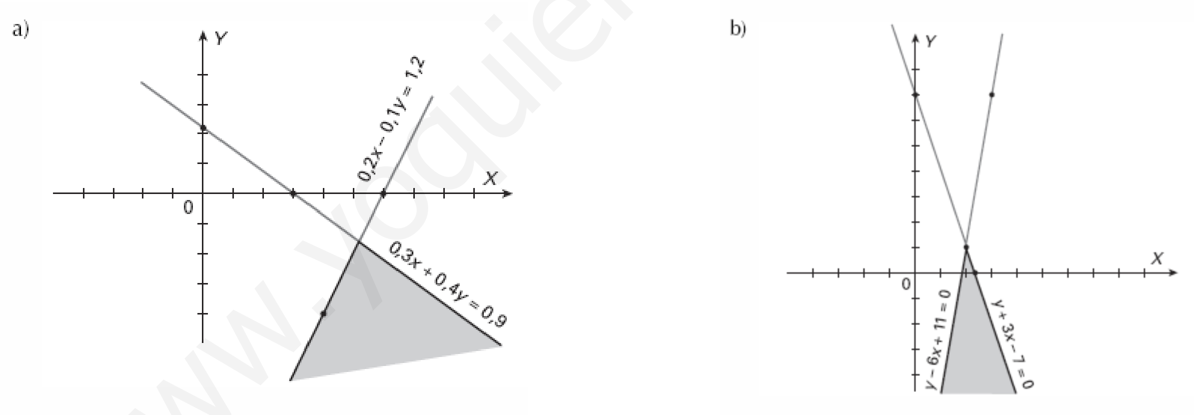
$\{y + 2x \geq 0;\ 3y - x \leq 1;\ 0 \leq x \leq 2\}$

SOLUCIONES

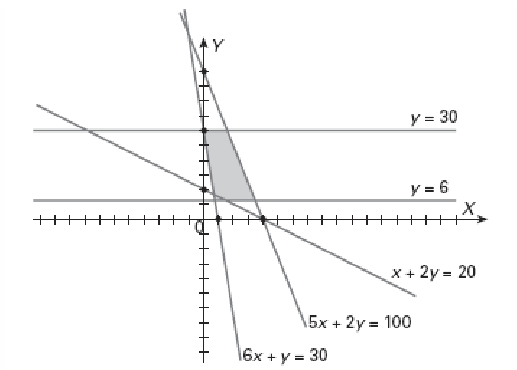
1. Las soluciones pueden verse en los dibujos siguientes:



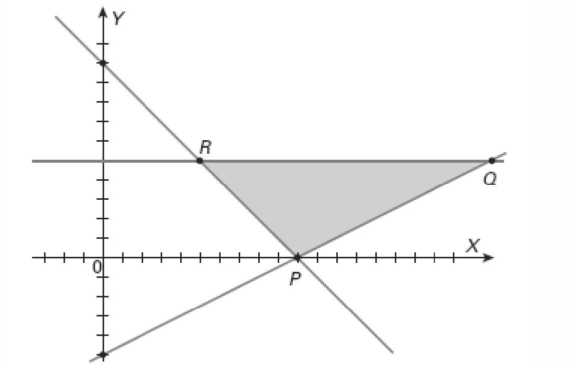
2. Las regiones factibles pueden verse en los dibujos que siguen:



3. El conjunto de puntos es el siguiente:



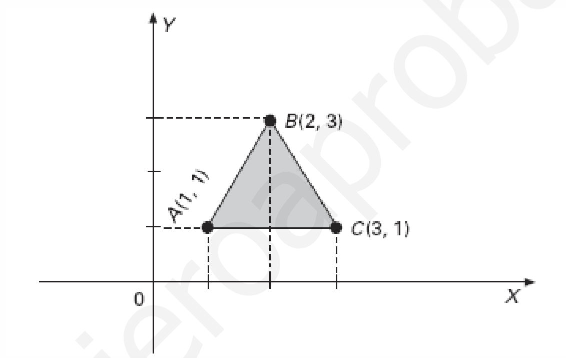
4. El recinto pedido es el que puede verse en el dibujo.



Los vértices del recinto son los puntos $P(10,0), Q(20,5)$ y $R(5,5)$

5. El sistema y la gráfica son:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 1 \\ 2x - y \geq 1 \\ 2x + y \leq 7 \end{array}\right\}$$



6. Los sistemas quedan:

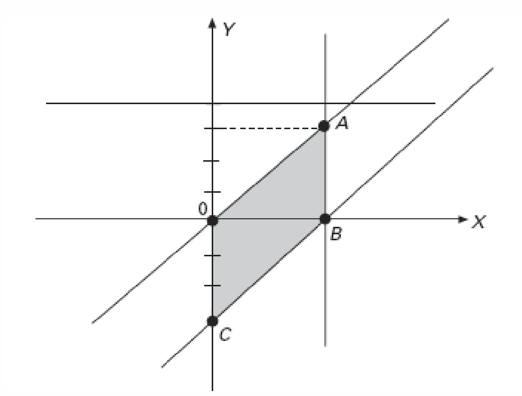
a)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ x < 2 \\ y > x - 1 \\ x + 2y < 6 \end{array}\right\}$$

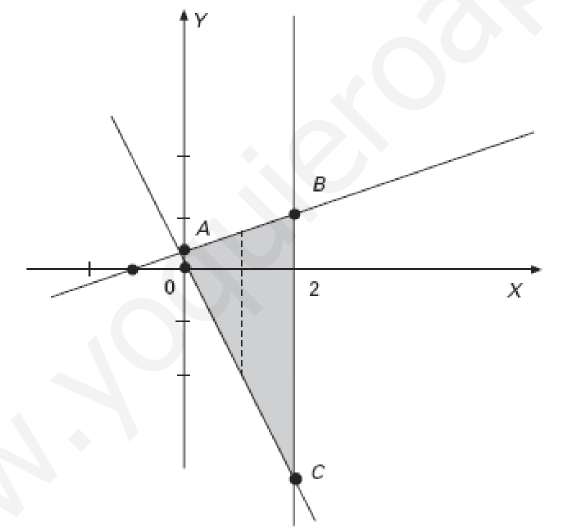
b)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ y > 1 \\ x - y < 2 \\ 2x + y > 3 \end{array}\right\}$$

7. La región factible esta representada en el dibujo.
   Los vértices son: $O(0,0)$ $A(3,3)$ $B(3,0)$ $C(0,-3)$
   La función $f(x,y)=x+2y$ alcanza el valor máximo en $A(3,3)$ y el valor mínimo en $C(0,-3)$.



8. La región factible es la representada en el dibujo.
   Los vértices de la misma son: $O(0,0)$ $A\left(0,\frac{1}{3}\right)$ $B(2,1)$ $C(2,-4)$
   La función $z=3x+2y$ alcanza el máximo en $B(2,1)$ y este valor es $z=8$.



PÁGINA 99

9. Representa el conjunto definido por las siguientes inecuaciones y calcula sus vértices:

$$\begin{cases} -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ -x + 2y \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcula el valor máximo y mínimo que alcanza la función $f(x, y) = 4x + 2y$ en este conjunto.

b) Determina en qué puntos alcanza dichos valores.

10. Maximiza la función $f(x, y) = x + y + 1$ sujeta a las restricciones:

$$0 \leq y; \quad 0 \leq x \leq 10; \quad x \leq y; \quad y - 2x \leq 6; \quad 3x + 4y \geq 24$$

11. Encuentra el mínimo de la función $z = 3x + 4y$ cuando se verifican las siguientes desigualdades:

$$x + 2y \geq 8; \quad 2x + 3y \geq 12; \quad x + y \geq 6; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

12. Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente:

a) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $g(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

13. Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo *A* a un precio de 9 000 euros y el modelo *B* a 12 000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo *A* y 10 del modelo *B*, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo *A* como del modelo *B*. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36 000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo puede vender? Plantea el problema y representa su conjunto de soluciones.

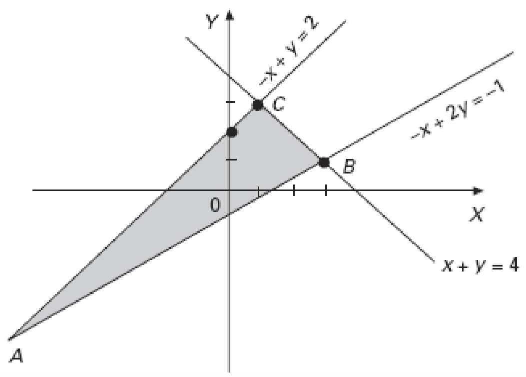
b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

14. En una región se dispone de una área máxima de 600 ha para el cultivo de trigo y algodón. Las disponibilidades de agua en la zona son, sin embargo, limitadas, calculándose que el consumo global dedicado a estos cultivos no puede exceder en el presente año los 3 000 000 de m^3. Razones de regulación de los precios obligan a una asignación mínima de 200 ha de trigo y 100 de algodón, y se estima que cada hectárea cultivada de trigo precisa de 6 000 m^3 por año siendo 4 000 m^3 los precisados por la de algodón. Las ganancias que se espera obtener por hectárea cultivada de trigo son de 15 000 euros, mientras que la de algodón producirá 12 000 euros. ¿Cuántas hectáreas deberán dedicarse a cada cultivo para obtener la máxima ganancia?

15. La capacidad de producción de una factoría permite elaborar diariamente 120 artículos del tipo *A* y 360 del tipo *B*. Las reglamentaciones existentes obligan a que al menos el 80 % de la producción total se destine a exportación, pero la capacidad de inspección en la aduana es de solo 200 artículos diarios. El precio de los artículos del tipo *A* es cuatro veces el de los de tipo *B*. Planifica la producción diaria para maximizar los beneficios.

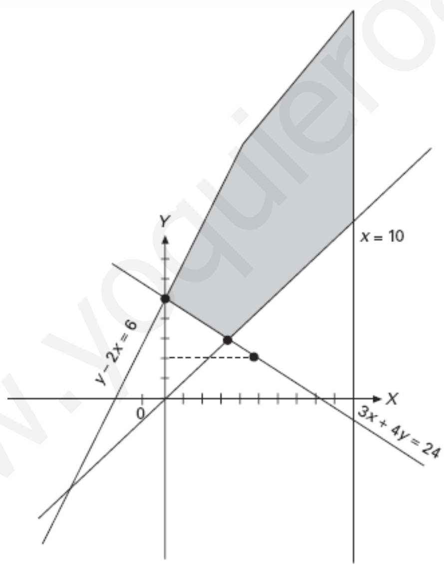
9. Los vértices de la región factible son: $A(-5,-3)$ $B(3,1)$ $C(1,3)$

   La función $f(x,y)=4x+2y$ alcanza el máximo en $B(3,1)$ y vale 14 y el mínimo en $A(-5,-3)$ y vale -26.



10. Los vértices de la región factible son: $(0,6)$ $\left(\frac{24}{7},\frac{24}{7}\right)$ $(10,10)$ $(10,26)$

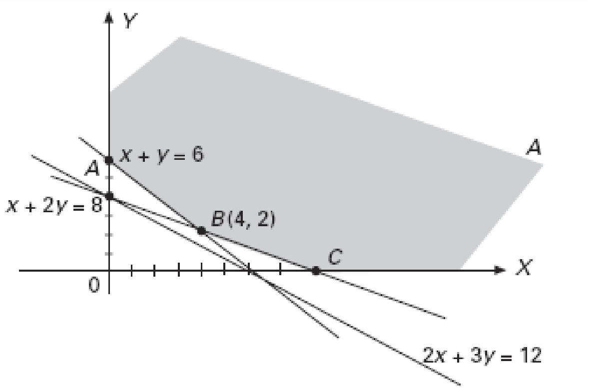
   La función $f(x,y)=x+y+1$ toma el valor máximo en (10, 26) y este valor es 37.



11. Región factible no acotada.

Los vértices son: $A(0,6)$ $B(4,2)$ $C(8,0)$

La función $z=3x+4y$ alcanza el mínimo en (4, 2) y vale 20.

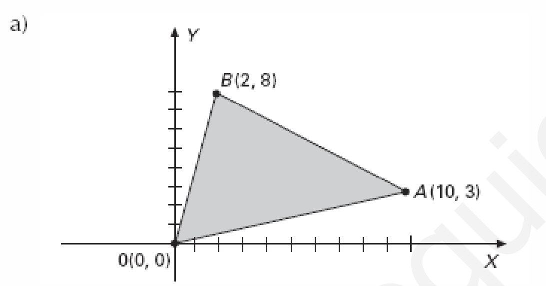


12. Llamando a los vértices $O(0,0)$ $A(10,3)$ $B(2,8)$ obtenemos las ecuaciones de los lados:

lado $OA \equiv 3x-10y=0$; $OB \equiv 4x-y=0$

lado $AB \equiv 5x+8y=74$

La función $f(x,y)=-4x+y+9$ alcanza el máximo en cualquier punto del lado OB.

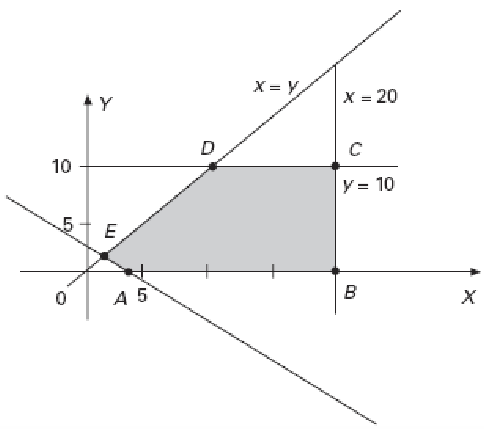


b) la función $g(x,y)=4x+y+12$ alcanza el máximo en el punto $A(10,3)$ y vale 55.

13. La solución queda:

a) Llamando x al número de coches del modelo A e y al del modelo B obtenemos el siguiente sistema y la siguiente gráfica:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq y \\ 9x+12y \geq 36 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$$



Los vértices son:

$A(4,0)$ $B(20,0)$ $C(20,10)$ $D(10,10)$ $E\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$

a) la función que nos da los ingresos es: $z=9x+12y$ en miles de euros.

Esta función alcanaza el máximo en $C(20,10)$ y este asciende a 300 000 euros.

14. Llamando x al número de hectáreas de tipo e y al número de hectáreas de algodón obtenemos:

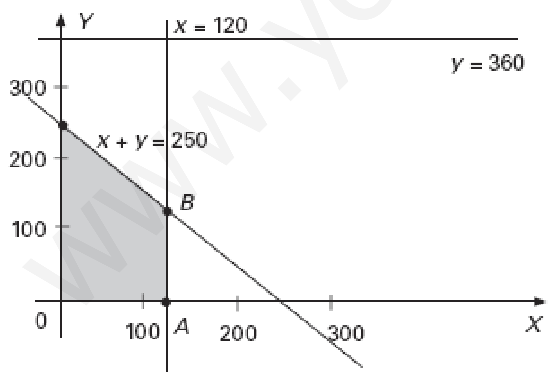
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \\ x + y \leq 600 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \\ 6000\,x + 4000\,y \leq 3\,000\,000 \end{array}\right\}$$

La función al optimizar es $z=15000x+12000y$ y el máximo lo alcanza en el punto (300, 300) es decir debe plantar 300 hectáreas de trigo y lo mismo de algodón.

15. Sea x el numero de artículos de A e y el de B.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 360 \\ (80/100)\,(x + y) \leq \end{array}\right\}$$

La función a optimizar es $z=4px+py$ y alcanza el máximo en $B(120,130)$. Debe fabricar 120 artículos de A y 130 de B.



Vértices: $O(0, 0)$ $A(120, 0)$ $B(120, 130)$ $C(0, 250)$

PÁGINA 100

ACTIVIDADES FINALES

16. Un almacenista tiene en su almacén 150 kg de caramelos de limón y 180 kg de caramelos de menta. Decide venderlos haciendo dos mezclas: una está formada por la mitad de caramelos de cada clase y la vende a 2 euros/kg, y la otra contiene la tercera parte de caramelos de limón y el resto de menta, vendiéndola a 1,5 euros/kg.

    ¿Cuántos kilos de cada mezcla deberá preparar para maximizar sus ingresos?

17. Una empresa tiene dos centros de producción en los que se fabrican tres tipos de productos, *A*, *B* y *C*. Debe entregar semanalmente un mínimo de 18 unidades de *A*, 16 de *B* y 6 de *C*. El primer centro le cuesta diariamente 10^4 euros y produce cada día 9 unidades de *A*, 4 de *B* y 1 de *C*. El segundo centro le cuesta diariamente $8 \cdot 10^3$ euros y produce cada día 3 unidades de *A*, 4 de *B* y 3 de *C*.

    ¿Cuántos días por semana debe trabajar cada centro para cumplir los compromisos comerciales y que los costes de producción sean mínimos?

18. El veterinario ha recomendado al dueño de un perro que el animal tome diariamente al menos 4 unidades de hidratos, 23 de proteínas y 6 de grasas.

    En el mercado venden un producto en bolsas verdes que contiene 4 unidades de hidratos, 6 de proteínas y 1 de grasas, y otro producto en bolsas blancas que contiene 1 unidad de hidratos, 10 de proteínas y 6 de grasas. La bolsa verde cuesta 1 euro y la blanca 1,5 euros. ¿Cómo debe combinar el dueño ambos productos para dar la dieta necesaria a su perro con menor precio?

19. Para cubrir cierto trayecto, una compañía aérea tiene dos aviones *A* y *B*. El número total de vuelos de los aviones no debe ser inferior a 60 ni superior a 200. Además, el avión *A* no puede sobrepasar los 120 vuelos, pero debe hacer, al menos, tantos como el *B*. Cada viaje de *A* supone un consumo de 900 litros de combustible y proporciona a la compañía un beneficio de 2 000 euros. En el caso del avión *B*, el consumo es de 800 litros y el beneficio es de 1 600 euros por viaje.

    a) ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el beneficio sea máximo?

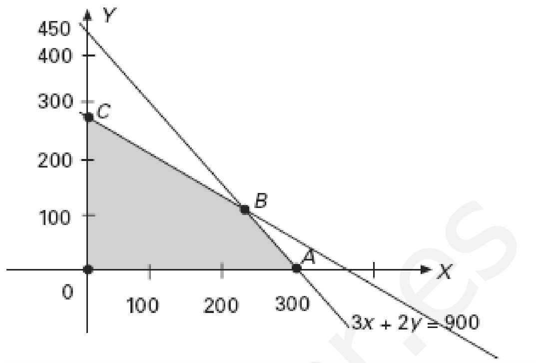
    b) ¿Y si lo que se desea es que el consumo de combustible sea mínimo?

20. Un agricultor, para abonar una finca, necesita al menos 9 kg de nitrógeno y 15 kg de fósforo. En el mercado venden un producto *A* que contiene un 20% de nitrógeno y un 40% de fósforo, y otro producto *B* que contiene un 30% de nitrógeno y un 30% de fósforo. El precio del producto *A* es de 4 euros/kg y el del *B* de 5 euros/kg.

    ¿Qué cantidad de cada producto ha de comprar el agricultor para abonar la finca con el menor gasto posible?

16. La solución es:

	1.ª mezcla	2.ª mezcla
Limón	1/2	1/3
Menta	1/2	2/3
Precio	2 €/kg	1,5 €/kg
Kg	x	y



La función a optimizar es: $z=2x+1{,}5\,y$

Sujeta a restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \\ x/2 + y/3 \leq 150 \\ x/2 + 2y/3 \leq 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 900 \\ 3x + 4y \leq 1080 \end{array}$$

Los vértices de la región factible son:

$$O(0, 0) \ A(300, 0) \ B(240, 90) \ C(0, 270)$$

La función z alcanza el máximo en $B(240,90)$.

Luego debe preparar 240 Kg. de la primera mezcla y 90 Kg. de la segunda para maximizar ingresos.

17. Recogemos la información en la siguiente tabla:

	1.er centro	2.º centro	
A	9	3	≥18
B	4	4	≥16
C	1	3	≥ 6
	10^4	$8 \cdot 10^3$	
Días semana	x	y	

La función a optimizar es: $z=10^4\,x+8 \cdot 10^3 \cdot y$

Sujeta a las restricciones:

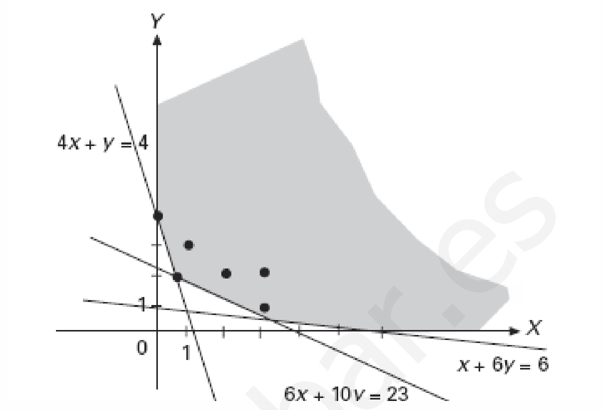
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{N} \\ y \geq 0 \\ 9x + 3y \geq 18 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ x + 3y \geq 6 \end{array}\right\}$$

La función alcanza el mínimo en $(1,3)$ es decir debe trabajar 1 día en el primer centro y 3 en el segundo.

18. Recogemos la información que da el problema en la siguiente tabla. La función a minimizar es $z = 1x + 1{,}5y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \;;\; x, y \in \mathbb{Z} \\ 4x + y \geq 4 \\ 6x + 10y \geq 23 \end{cases}$$

	Verdes	Blancas	
Hidratos	4	1	≥4
Proteinas	6	10	≥23
Grasas	1	6	≥6
Precio €	1	1,5	
	x	y	

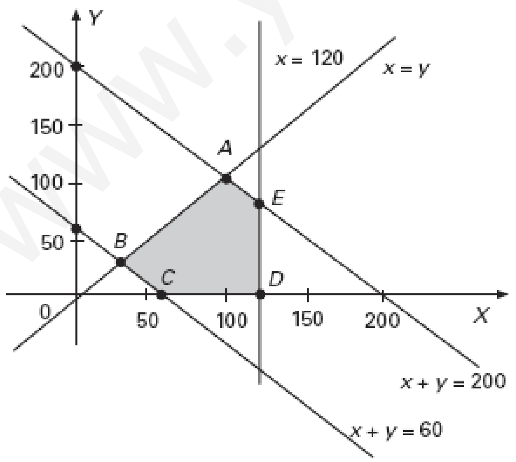


La región factible esta formada por todos los puntos enteros de la zona sombreada.
El corte es mínimo en el punto (1, 2) es decir que debe tomar 1 bolsa verde y 2 blancas.

19. Llamamos x e y al menos de vuelos de los aviones A y B respectivamente.

a) La función beneficio es: $z = 2000x + 1600y$ que hay que maximizar sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 120 \\ y \geq 0 \\ 60 \leq x + y \leq 200 \\ x \geq y \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(100, 100)$ $B(30, 30)$ $C(60, 0)$
$D(120, 0)$ $E(120, 80)$

La función $z = 2000x + 1600y$ es máxima en $E(120,80)$ es decir debe hacer 120 vuelos con el avión A y 80 con el avión B.

b) la función consumo $f(x,y) = 900x + 800y$ que hay que minimizar sujeta a las restricciones anteriores alcanza el mínimo en $B(30,30)$ es decir para que el consumo sea mínimo debe hacer 30 vuelos con A y 30 vuelos con B.

20. Sean x los kilogramos del producto A e y los kilogramos del producto B. Los datos del enunciado aparecen recogidos en la tabla:

	A	B	NECESIDADES
NITRÓGENO	0,2	0,3	9
FÓSFORO	0,4	0,3	15
PRECIO	4	5	

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,3y \geq 9 \\ 0,4x + 0,3y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 4x + 5y. Con el programa *Prolim* obtenemos:

F(45, 0) = 180; S S
F(30, 10) = 170; S S

Max(45, 0) = 180
Mín(30, 10) = 170

Es decir que para abonar la finca con mínimo gasto tiene que comprar 30 Kg. de producto A y 10 Kg. del producto B.

PÁGINA 101

21. Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de un mínimo de 36 mg de vitamina A, 28 mg de vitamina C y 34 mg de vitamina D. Estas necesidades se podrían cubrir tomando complejos vitamínicos de la marca *Y* y de la marca *Z*. Cada pastilla de la primera marca cuesta 0,03 euros y proporciona 2 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 8 mg de vitamina D. Cada pastilla de la segunda marca cuesta 0,04 euros y proporciona 3 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D.

¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determina dicho coste.

22. En una empresa se fabrican dos tipos de piezas de recambio, *A* y *B*. Para fabricar una pieza del tipo *A* se necesitan 2 kg de un metal y para hacer una del tipo *B*, 4 kg del mismo metal. La empresa dispone, como máximo, de 100 kg de metal y no puede fabricar más de 40 piezas del tipo *A* ni más de 20 del tipo *B*.

a) Plantea un sistema de inecuaciones que represente las restricciones en la fabricación de la empresa.

b) Determina gráficamente los puntos del plano que verifican este sistema.

c) De entre las soluciones obtenidas, ¿cuáles son los posibles valores de las piezas de cada tipo (han de ser enteros) si se quieren gastar los 100 kg de metal?

23. Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños: pequeño y grande. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1 000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada uno de los grandes.

¿Qué cantidad de cada tipo de envases proporciona el mínimo gasto de almacenaje? Obtén dicho mínimo.

24. Encuentra la distribución de coste mínimo para los problemas de transporte de cada una de las tablas:

a)

	Hiper *A*	Hiper *B*	Hiper *C*	**Ofertas**
Fábrica *A*	4	4	6	600
Fábrica *B*	8	2	5	400
Demandas	500	300	200	

b)

	A Bilbao	A Santander	A Zaragoza	**Ofertas**
De Madrid	2	3	1	40
De Barcelona	1	4	2	80
Demandas	20	40	60	

25. Un camión de 9 toneladas debe transportar mercancías de dos tipos: *A* y *B*. La cantidad de *A* no puede ser inferior a 4 toneladas ni superior al doble de la cantidad de *B*. Si el transportista gana 0,03 euros por cada kilogramo de *A* y 0,02 euros por cada kilogramo de *B*, ¿cómo debe cargar el camión para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería esa ganancia?

21. Sean *x* el número de pastillas que se han de tomar diariamente de la marca *Energic* e y el número de pastillas que han de tomar diariamente de la marca *Vigor*.

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 0,03x + 0,04y.

Los datos del enunciado aparecen recogidos en la tabla:

	ENERGIC	VIGOR	NECESIDADES
A	2	3	36
B	2	2	28
C	8	8	34
PRECIO	0,03	0,04	

Las restricciones son: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 34 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Los valores que toma la función objetivo son:

F(18, 0) = 0.54; S S S F(6, 8) = 0.5; S S S
F(1, 13) = 0.55; S S S F(0, 17) = 0.68; S S S

Max(0, 17) = 0.6 Mín(6, 8) = 0.5

Para que el coste sea mínimo, se ha de tomar diariamente 6 pastillas de la marca *Energic* y 8 pastillas de la marca *Vigor*. El coste mínimo diario es de 0,5 euros.

22. La solución queda:

a) Sea *x* el número de piezas del tipo A e y el número de piezas del tipo B.
Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 100 \\ 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

b) Los puntos del plano que verifican el sistema de inecuaciones son los de la zona sombreada de la gráfica que, fácilmente se obtiene.

c) Si se quiere gastar los 100 kilos de metal, las soluciones deben estar en la recta $y = \frac{50 - x}{2}$ y ser número enteros.
Vamos dando valores enteros pares (porque cada pieza necesita 2 kilos de metal) a x, entre 10 y 40, y obtenemos valores enteros de y en la ecuación $y = \frac{50 - x}{2}$.
Las soluciones son: (10, 20), (12, 19), (14, 18), (16, 17), (18, 16) (20, 15), (22, 14), (24, 13), (26, 12), (28, 11), (30, 10), (32, 9), (34, 8), (36, 7), (38, 6) y (40, 5).

23. Sea *x* el número de envases pequeños e *y* el número de envases grandes.
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 1000 \\ x \ge 100 \\ y \ge 200 \\ y \ge x \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada que se obtiene en la gráfica.

La función objetivo a minimizar es F(x, y) = 0,1x + 0,2y.

Con el programa Prolim obtenemos que el mínimo de F(x, y) se alcanza en uno de los vértices de la región factible:

F(100, 900) = 190; S S S S
F(500, 500) = 150; S S S S
F(100, 200) = 50; S S S S
F(200, 200) = 60; S S S S

Max(100, 900) = 190
Mín(100, 200) = 50

Por lo que el gasto mínimo de almacenaje es de 50 euros y se consigue con 100 envases pequeños y 200 envases grandes.

24. La solución queda:

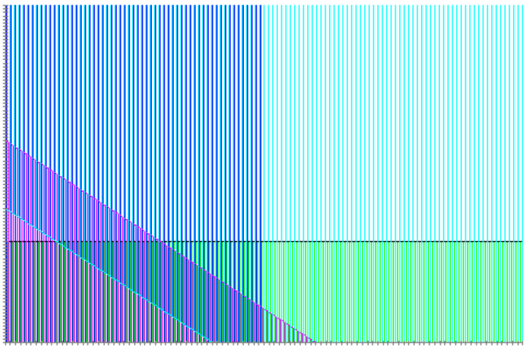
a) Si llamamos *x* a la cantidad de mercancía a transportar desde la Fábrica A hasta el Hiper A, e *y* a la cantidad de mercancía a transportar desde la Fábrica A hasta el Hiper B, toda la distribución de mercancía, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

x	y	600 – x – y
500 - x	300 – y	- 400 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Minimizar la función z = -5x + y + 6200;

sometida a las restricciones: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 500 \\ y \le 300 \\ x + y \le 600 \\ x + y \ge 400 \end{cases}$



La región factible es la zona sombreada.

El valor de la función objetivo en los vértices A(400, 0), B(500, 0), C(500, 100), D(300, 300) y E(100, 300) de la región factible es:

$$Z_A = 4200 \qquad Z_B = 3700 \qquad Z_C = 3800 \qquad Z_D = 5000 \qquad Z_E = 6000$$

Se observa que en el vértice B se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución es x = 500, y = 0, es decir, las cantidades a transportar son las que se recogen en la tabla que sigue:

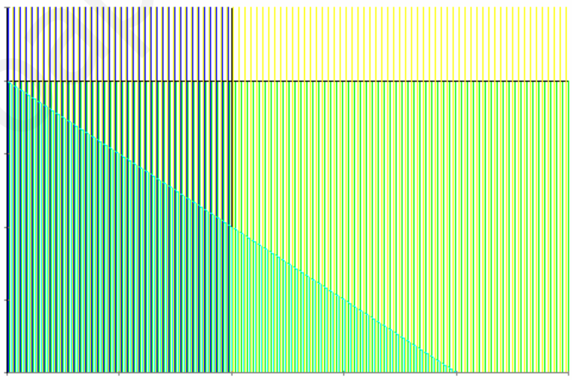
500	0	100
0	300	100

b) Si llamamos x a la cantidad de mercancía a transportar desde la Madrid a Bilbao, e y a la cantidad de mercancía a transportar desde Madrid a Santander, toda la distribución de mercancía, en función de las variables anteriores, queda en la forma que recoge la tabla que sigue:

x	y	40 – x – y
20 - x	40 – y	20 + x + y

El programa lineal a resolver es:

Minimizar la función z = 2x + 260;



sometida a las restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 20 \\ y \leq 40 \\ x + y \leq 40 \\ x + y \geq -20 \end{cases}$

La región factible es la zona sombreada.

El valor de la función objetivo en los vértices A(0, 0), B(20, 0), C(20, 20) y D(0, 40) de la región factible es:

$$Z_A = 260 \qquad Z_B = 300 \qquad Z_C = 300 \qquad Z_D = 260$$

Se observa que en los vértices A (0, 0) y D (0, 40) se minimiza la función objetivo; por tanto, la solución se obtiene para cualquier punto del segmento de extremos A y D. En este caso existen innumerables soluciones; desde A (0, 0) hasta D (0, 40) como se muestran en las tablas que siguen:

0	0	40
20	40	20

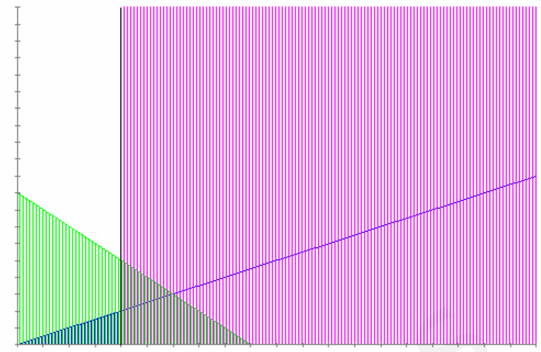
...

0	40	0
20	0	60

25. Sea *x* las toneladas que debe cargar de A e y las toneladas que debe cargar de B.

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La región factible es la zona sombreada.



La función objetivo a maximizar es F(x, y) = 30x + 20y.

El máximo de F(x, y) se alcanza en uno de los vértices de la región factible:

F(4, 2) = 160　　　F(6, 3) = 240　　　F (4, 5) = 220

La ganancia máxima es de 240 euros, para obtenerla hay que cargar el camión con 6 toneladas de mercancía tipo A y e toneladas de mercancía tipo B.

PÁGINA 102

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

26. Dado el siguiente sistema de desigualdades lineales: $\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 4y \leq 16 \\ x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 14 \end{cases}$

 a) Represéntalo gráficamente.

 b) Maximiza $f = 3x + 5y$ sujeta a las restricciones anteriores.

 c) Discute razonadamente si el resultado obtenido en el apartado b) seguirá siendo el mismo al añadir la condición $x \leq 5$.

27. Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas diferentes (de cortar, coser y tintar) son empleadas en la producción. Fabricar una chaqueta supone utilizar la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de tintar una hora, y, para unos pantalones, la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la tintar no se utiliza. La máquina de tintar se puede usar durante tres horas, la de coser doce y la de cortar siete. Todo lo que se fabrica es vendido y se saca un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y de cinco por cada pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas si queremos sacar el máximo beneficio posible? Da la respuesta en números enteros.

28. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Cada joya tipo *A* se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 24 euros. La de tipo *B* se vende a 30 euros y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

 Si el orfebre sólo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

29. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del de electricistas.

 En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornadas es de 150 euros por electricista y 120 euros por mecánico.

 ¿Cuántos trabajadores de cada especialidad deben elegirse para obtener beneficio máximo?

30. Una empresa compra 5 autobuses a una factoría francesa y 7 a una alemana. Quiere proveer al menos de 6 autobuses a la estación de Palma y al menos de 3 a la de Inca.

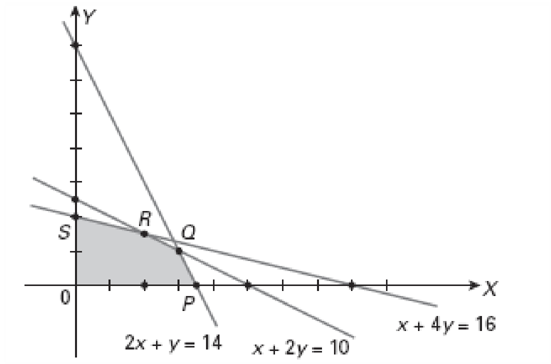
 ¿Cuántos autobuses de cada tipo colocará la empresa en cada estación si desea que el coste sea mínimo, siendo el coste del tipo de autobús, según destino, el indicado en la tabla?

	Francés	Alemán
Palma	4	16
Inca	9	17

31. Una fábrica produce gasolina y gasóleo en las siguientes condiciones: puede producir como máximo una tonelada de cada producto y el mínimo operativo es de 100 kg por producto. Los precios de venta son de 0,25 euros/kg la gasolina y de 0,2 euros/kg el gasóleo. Si produce en total 1 700 kg, ¿cuál será la producción que maximiza los ingresos?

26. La solución queda:

a)



Los vértices de la región son los puntos $O(0,0), P(7,0), Q(6,2), R(4,3)$ y $S(0,4)$.

b) el máximo de la función $f=3x+5y$ es $f=28$, para $x=6, y=2$.

c) En el caso de añadir la condición $x\leq 5$, el máximo de la función $f=3x+5y$ es $f=27{,}5$, para $x=5, y=\frac{5}{2}$.

27. Recogemos la información del problema en la siguiente tabla:

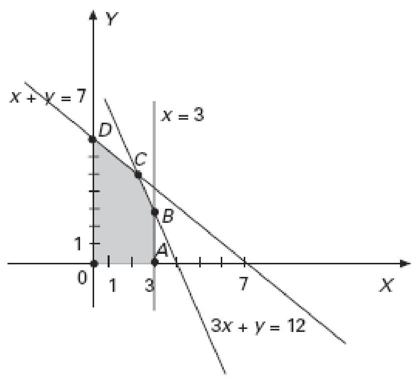
La función a maximizar es $z=8x+5y$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \quad x, y\in \mathbb{Z} \\ x+y\leq 7 \\ 3x+y\leq 12 \\ x\leq 3 \end{cases}$$

	Chaquetas	**Pantalones**	
Cortar	1	1	≤ 7
Coser	3	1	≤12
Tintar	1	0	≤ 3
Beneficio en €	8	5	
Número de unidades	x	y	

La región factible es la zona sombreada del grafico:



Los vértices son:

$$O(0,\ 0)\ \ A(3,\ 0)\ \ B(3,\ 3)\ \ C\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}\right)\ \ D(0,\ 7)$$

El valor máximo lo alcanza en $C\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$ pero como los valores no son enteros tomamos los enteros más próximos dentro de la región es decir $x=2\ y=5$ y el beneficio máximo será de 41 euros.

28. En la siguiente tabla recogemos la información:

	Tipo A	Tipo B	
Oro	1	1,5	≤750 g
Plata	1,5	1	≤750 g
Precio	24 €	30 €	
Número de joyas	x	y	

La función beneficio es: $z=24x+30y$

Sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \quad x,\ y \in \mathbb{Z} \\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \end{array}\right\}$$

Dibujando la región factible obtenemos de vértices $(0,0)(500,0)(300,300)(0,500)$

El valor que hace máximo el beneficio es $x=300\ y=300$

29. Llamando x, y al número de electricistas y mecánicos respectivamente obtenemos que la función beneficio es: $z=150x+120y$

Esta función hay que maximizar sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq x \\ y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 20 \\ x,\ y \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

Representando gráficamente la región factible tiene de vértices: $(0,0)(20,20)(10,20)$

El valor que hace máximo el beneficio es $x=20\ \ y=20$.

30. La información de este problema de transporte lo recogemos en la siguiente tabla supuesto que x es el numero de autobuses desde Francia para Palma e y el numero desde Alemania para Palma.

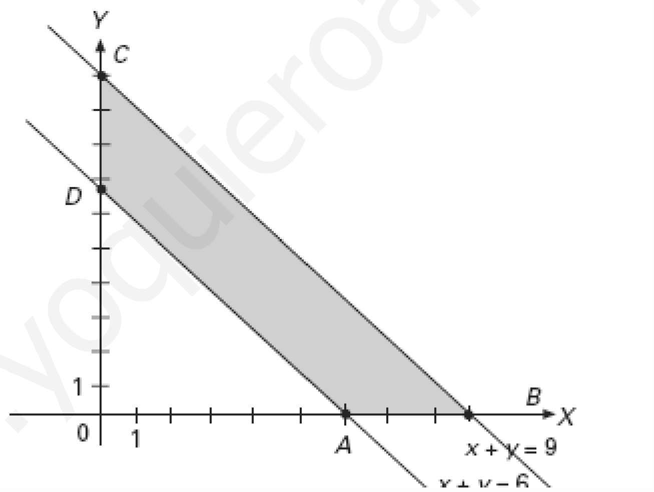
	F	A	
Palma	x	y	6
Ince	$5-x$	$7-y$	3

La función coste es: $z=4x+16y+9(5-x)+17(7-y) \Rightarrow z=164-5x-y$

Hay que minimizarla sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{ll} x \geq 0 & x,\ y \in \mathbb{N} \\ y \geq 0 & \\ x+y \geq 6 & \end{array}\right\}$$

La región factible queda representada en el grafico siguiente:



Los vértices de la región factible son:

$A(6,\ 0)\quad B(9,\ 0)\quad C(0,\ 9)\quad D(0,\ 6)$

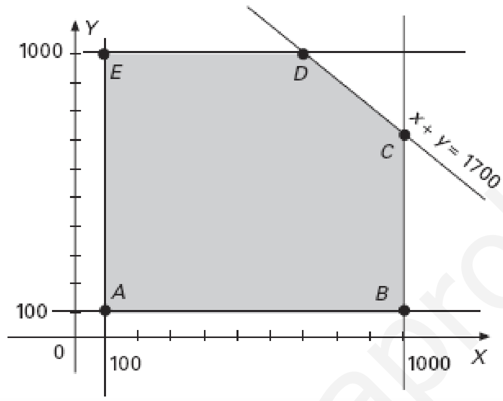
$\mathbb{Z}$ alcanza el mínimo en el punto $B(9,\ 0)$.

31. Llamando x, y al número de kilos de gasolina y de gasóleo respectivamente obtenemos un función que da los ingresos de la fábrica es: $z = 0,25 \cdot x + 0,2\,y$

Hemos de maximizar esta función sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \leq x \leq 1000 \\ 100 \leq y \leq 1000 \\ x + y \leq 1700 \end{array}\right\}$$

La región factible esta representada en el siguiente grafico:



Los vértices de la región factible son:

A(100, 100) B(100, 100) C(1000, 700) D(700, 1000) y E(100, 1000)

La función z alcanza su valor máximo en el vértice C es decir la producción será de 1 000 Kg de gasolina y 700 Kg de gasóleo.