

Cálculo de determinantes por Sarrus

1. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 33 & 55 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{g) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{i) } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{j) } \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{k) } \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} \quad \text{l) } \begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$$

(Soluc: **a)** 30; **b)** -66; **c)** 0; **d)** 0; **e)** 0; **f)** 0; **g)** 2; **h)** -50; **i)** 0; **j)** 0; **k)** 0; **l)** 0)

2. Hallar el valor del determinante de: **a)** La matriz nula de orden 2 **b)** La identidad de orden 2 **c)** Cualquier matriz diagonal de orden 2 (Soluc: **a)** 0; **b)** 1; **c)** el producto de los elementos de la diagonal)

3. Calcular los siguientes determinantes de orden 3 aplicando la regla de Sarrus:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{i) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{j) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

(Soluc: **a)** -15; **b)** -36; **c)** -11; **d)** 0; **e)** -168; **f)** 385; **g)** -114; **h)** 3; **i)** 14; **j)** 1000)

Propiedades de los determinantes

4. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$, utilizar las propiedades de los determinantes para hallar razonadamente:

$$\text{a) } |2A| \quad \text{b) } |A^t| \quad \text{c) } |-5A| \quad \text{d) } \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{vmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \end{vmatrix} \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 2a+3d & 4c+6f & 2b+3e \\ -d & -2f & -e \\ g & 2i & h \end{vmatrix} \quad \text{i) } \begin{vmatrix} b & 3a & c \\ h & 3g & i \\ 2e & 6d & 2f \end{vmatrix} \quad \text{j) } \begin{vmatrix} a & b-2a & a-c \\ d & e-2d & d-f \\ g & h-2g & g-i \end{vmatrix} \quad \text{k) } |A^2|$$

(Soluc: **a)** 32; **b)** 4; **c)** -500; **d)** 4; **e)** 12; **f)** -4; **g)** 8; **h)** 16; **i)** 24; **j)** -4; **k)** 16)

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ (Soluc: 200)

6. Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

7. Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (Soluc: todos valen 5)

8. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

9. Justificar que si A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real, entonces $\det(kA) = k^3 \det(A)$

10. En el ejercicio 18 del tema anterior vimos que una matriz idempotente es aquella tal que $A^2 = A$, y por lo tanto $A^n = A$. Demostrar que el determinante de una matriz idempotente sólo puede valer 0 ó 1.

11. Justificar, mediante una matriz de orden 3, que $\det A = \det A^t$

12. Resolver el problema 22 de los ejercicios del tema anterior mediante determinantes

(Ayuda: aplicar que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes)

13. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

(Ayuda: Previamente hacer ceros debajo de la diagonal)

(Soluc: a) $x = \pm 1$; b) $x = b, x = c$)

14. (S) Resolver la ecuación $\det(A - x\mathbb{1}) = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, $\mathbb{1}$ la matriz unidad de dimensión 3 y $x \in \mathbb{R}$ la incógnita. (Soluc: $x=0, x=1, x=4$)

Cálculo de determinantes de orden > 3

15. Calcular por **Gauss** (es decir, haciendo ceros bajo la diagonal) los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \mathbf{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} & \mathbf{d)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \mathbf{e)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \mathbf{f)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{g)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} & \mathbf{h)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & 6 \\ 5 & 0 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} & \mathbf{i)} \begin{vmatrix} 1 & 20 & 5 & 1 \\ -4 & -12 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \mathbf{j)} \begin{vmatrix} 13 & 2 & 15 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{k)} \begin{vmatrix} 10 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -5 \\ -5 & 13 & 12 & 0 \end{vmatrix} & \mathbf{l)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

(Sol: **a)** 8; **b)** -2; **c)** $(x+1)^3$; **d)** 48; **e)** 2; **f)** -3; **g)** 0; **h)** 364; **i)** -2098; **j)** -4254; **k)** -1312; **l)** 10)

16. Calcular por el método más conveniente (preferentemente por **Laplace**, haciendo ceros previamente):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} & \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} & \mathbf{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \mathbf{d)} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ \mathbf{e)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} & \mathbf{f)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{g)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \mathbf{h)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{i)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{j)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{k)} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 & 4 \\ -4 & -4 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ -4 & -6 & 15 & 4 \end{vmatrix} & \mathbf{l)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

(Sol: **a)** -286; **b)** -72; **c)** 0; **d)** 2; **e)** 1899; **f)** 6; **g)** -52; **h)** 7; **i)** -10; **j)** -2; **k)** 0; **l)** -5)

Cálculo de determinantes con parámetros

17. (S) Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (\text{Soluc: } 50(b-a)(c-a)(c-b))$$

18. (S) Calcular:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

(Ayuda: extraer previamente factores del determinante)

(Soluc: $2a^2b^4c^2$)

19. (S) Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: hacer ceros en la u^a columna) (Soluc: $-abc$)

20. (S) Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la u^a fila las restantes, y después sacando factor común)

(Soluc: $3(x+1)(3-x)^3$)

21. (S) Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

(Ayuda: sale fácilmente sumando a la 4^a fila las demás, y extrayendo factor común) (Soluc: $4a+1$)

22. (S) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: hacer ceros debajo de la diagonal, factorizando los polinomios que vayamos obteniendo, para así poder sacar factores comunes) (Soluc: $x=1$)

23. Resolver la siguiente ecuación, sabiendo que una solución es $x = -(a+b+c+d)$:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

(Ayuda: sumar a la 1^a col. las otras, y después sacar factor común)

(Soluc: las otras raíces son $x=a$, $x=b$, $x=c$ y $x=d$)

Matriz inversa:

24. Definir matriz inversa. Hallar las matrices inversas de las siguientes matrices, y **comprobar** el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 12 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (Sol: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$; e) \exists ; f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; g) \exists ; h) $\begin{pmatrix} 1/2 & -2 & -1/2 \\ -7/8 & 17/4 & 11/8 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$; i) no se puede)

25. Calcular, para los valores del parámetro **a** que lo haga posible, la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (\text{Soluc: para } a \neq 5 \text{ existe inversa})$$

26. Averiguar para qué valores del parámetro **t**, la matriz **A** no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de **A** para $t=2$, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix} \quad (\text{Soluc: para } t=1 \text{ o } t=3 \text{ no tiene inversa})$$

27. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro **m** existe A^{-1} (Soluc: $\exists A^{-1} \forall m$)

b) Hallar dicha inversa $\forall m$. (Soluc: $\begin{pmatrix} m & -m & 1 \\ m & -m-1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

28. Comprobar que existe la inversa de la siguiente matriz cualquiera que sea el valor de **a** y calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$$

29. (S) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$

30. (S) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

encontrar una matriz *simétrica* **P** no singular tal que $B = P^{-1}AP$ (Soluc: $P = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donde $\lambda \neq 0$)

31. (S) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores reales de **a** y **b** la matriz **A** tiene inversa? Determinar la matriz A^{-1} .

(Soluc: para $a \neq 0$ o $b \neq 0 \exists A^{-1}$)

32. (S) Determinar para qué valor o valores de x tiene inversa la matriz

$$\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

y calcularla en función de x . (Soluc: para $x \neq 0$ existe inversa)

33. Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres tipos de envases A, B y C, cuyos precios y pesos son los de esta tabla:

	Peso (g)	Precio (€)
A	250	1
B	500	1,80
C	1000	3,30

A una farmacia se le ha suministrado 5 envases con un peso total de 2,5 kg por un importe de 8,90 € ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia? (Obligatorio utilizar matrices).

(Soluc: 2 tipo A, 2 tipo B, 1 tipo C)

34. (S) TEORÍA: Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + \mathbb{I} = 0$, comprobar que A es invertible.

35. TEORÍA: a) Si una matriz A tiene inversa, demostrar que $|A^{-1}| = 1/|A|$

b) Comprobar que

$${}^t \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A^t)$$

es decir, la traspuesta de la adjunta es la adjunta de la traspuesta. Utilizar una matriz cuadrada de orden 3.

c) Probar que

$$\det[{}^t \text{Adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n.

d) Comprobar, utilizando matrices cuadradas de orden 3:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ecuaciones matriciales:

36. (S) Hallar la matriz A que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

37. (S) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; hallar una matriz X tal que $A \cdot X + B = A$

38. (S) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

39. (S) Resolver la ecuación matricial $X \cdot A = B + C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

40. Resolver la ecuación matricial $AX + B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

41. Resolver la ecuación matricial $AB = XC$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

42. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

43. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz inversa de $A - \mathbb{1}$, siendo $\mathbb{1}$ la matriz unidad de orden 3

b) Resolver la ecuación matricial $XA - 2B = X$

44. Resolver la ecuación matricial $CX + AB = C$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

45. Resolver la ecuación matricial $AX - BCX = A$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

46. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial $ABX - CX = 2C$

47. Resolver la ecuación matricial $A^2X - B = A^2$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Ayuda: calcular primero A^2 y renombrarla como C)

48. (S) Resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix}$

49. Despejar X en las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX=B$	$[Solut: X=A^{-1} \cdot B]$	i) $BX+AB=C$	$[Solut: X=B^{-1} \cdot (C-AB)]$
b) $XA=B$	$[Solut: X=B \cdot A^{-1}]$	j) $AX+C=BCX$	$[Solut: X=D^{-1} \cdot C \text{ donde } D=BC-A]$
c) $AX-B=A$	$[Solut: X=A^{-1} \cdot (A+B) = \mathbb{I} + A^{-1} \cdot B]$	k) $ABX+2C=CX$	$[Solut: X=D^{-1} \cdot 2C \text{ donde } D=C-AB]$
d) $BXB=C$	$[Solut: X=B^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}]$	l) $AX+B^2=C$	$[Solut: X=A^{-1} \cdot (C-B^2)]$
e) $AXB=C$	$[Solut: X=A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}]$	m) $A^2X=BC$	$[Solut: X=D^{-1} \cdot BC \text{ donde } D=A^2]$
f) $XA=B-A$	$[Solut: X=(B-A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} - \mathbb{I}]$	n) $AX-B^3C=A$	$[Solut: X=A^{-1} \cdot (A+B^3 \cdot C) = \mathbb{I} + A^{-1} B^3 C]$
g) $CX+2B=A$	$[Solut: X=C^{-1} \cdot (A-2B)]$		
h) $XA-3B=X$	$[Solut: X=3B \cdot D^{-1} \text{ donde } D=A-\mathbb{I}]$		

50. TEORÍA: ¿Existe la división de matrices? ¿Cuál es, entonces, la forma de despejar la matriz X en una expresión de la forma

$$A \cdot X + B = C$$

, donde A y B son matrices?

Rango de una matriz. Independencia lineal:

51. Definir rango de una matriz. Calcular el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 10 & -2 & 4 & 6 \\ 15 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 7 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ h) $H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ i) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ j) $J = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{k) K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{l) L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m) M} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & -5 \\ -8 & 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n) N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{o) O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p) P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q) Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(Soluc: **a)** $rgA=3$; **b)** $rgB=2$; **c)** $rgC=3$; **d)** $rgD=1$; **e)** $rgE=2$; **f)** $rgF=2$; **g)** $rgG=2$; **h)** $rgH=1$; **i)** $rgI=3$; **j)** $rgJ=3$; **k)** $rgK=2$;
l) $rgL=2$; **m)** $rgM=1$; **n)** $rgN=3$; **o)** $rgO=0$; **p)** $rgP=2$)

52. Calcular, según los valores del parámetro **a**, el rango de las siguientes matrices:

$$\mathbf{a) } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \mathbf{b) } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a & 2a & a \\ 0 & a & 3a \end{pmatrix} \quad \mathbf{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \mathbf{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \mathbf{e) } \begin{pmatrix} a & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & a & 3 & a-1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f) } \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & a-2 & 4 & a & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g) } \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & a & -3 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ a & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & a+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Soluc: **a)** $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow rg=3$; $a=1 \Rightarrow rg=1$; $a=2 \Rightarrow rg=2$; **b)** $a=0 \Rightarrow rg=1$; $a=3/5 \Rightarrow rg=2$; **c)** $rg=3 \forall a$;
d) $a \neq 2$ y $a \neq 3 \Rightarrow rg=4$; $a=2$ o $a=3 \Rightarrow rg=3$; **e)** $a \neq 3 \Rightarrow rg=3$; $a=3 \Rightarrow rg=2$; **f)** $a \neq 2 \Rightarrow rg=4$; $a=2 \Rightarrow rg=3$;
g) $a \neq 2 \Rightarrow rg=4$; $a=2 \Rightarrow rg=3$; **h)** $a \neq 2 \Rightarrow rg=4$; $a=2 \Rightarrow rg=3$)

53. Calcular el rango de los siguientes vectores fila. Caso de ser linealmente dependientes, hallar una relación de dependencia:

$$\mathbf{u} = (2, 1, 7, 3) \\ \mathbf{v} = (1, 1, 3, 0) \\ \mathbf{w} = (1, -4, 8, 15)$$

(Ayuda: aplicar Gauss) (Soluc: $rg=2$; $-5\mathbf{u}+9\mathbf{v}+\mathbf{w}=0$)

54. Explicar por qué si en un conjunto de vectores está el $\vec{0}$, entonces son linealmente dependientes. Poner un ejemplo. $a \neq 2 \Rightarrow rg=4$; $a=2 \Rightarrow rg=3$