MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Hallar: a) A^{-1}; b) B^{-1}; c) A.B; d) B.A; e) 3A+2B; f) C.A; g) C.B; h) C.D; i) A^2; j) B^2; k) $3A + A^2$; l) B^2-A.B

Soluciones:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/2 & 1 & -1/2\\ -5/2 & 1 & -1/2\\ -9/2 & 2 & -3/2\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & -1/3\\ 1/6 & 1/6 & 1/3\\ 1/2 & -1/2 & 1\end{pmatrix}\quad A.B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 7 & -5 & 3\\ 4 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 8 & -3 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}\quad 3A+2B=\begin{pmatrix}7 & -5 & 2\\ 9 & 6 & -5\\ 1 & 13 & -6\end{pmatrix}\quad C.A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 1\\ 7 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$C.B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad C.D=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 7 & -1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & -6 & 2\\ 8 & -7 & 1\end{pmatrix}\quad B^2=\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 1 & 7 & -3\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}$$

$$3A+A^2=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 11 & -6 & -1\\ 11 & 2 & -5\end{pmatrix}\quad B^2-A.B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -6 & 12 & -6\\ -6 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices A y B. Calcula A+B, A-B, A^2, B^2, AB, BA

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}3&1&3\\3&1&2\\1&3&1\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\quad A-B=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&1&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\quad B^2=\begin{pmatrix}5&6&7\\2&3&3\\2&2&3\end{pmatrix}\quad A.B=\begin{pmatrix}2&3&3\\5&4&6\\3&1&3\end{pmatrix}$$

3.- Halla AX = B donde:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ \begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

4.- Demostrar que A satisface la relación de recurrencia $A^n = 2^{n-1}$ A. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

5.- Halla el determinante de A y su inversa:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\2&1&-1&2\\0&1&2&1\\3&1&0&-1\end{pmatrix}\qquad |A|=-32\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1/4&0&0&1/4\\-19/32&1/4&1/8&1/32\\7/32&-1/4&3/8&3/32\\5/32&1/4&1/8&-7/32\end{pmatrix}$$

6.- Aplicando la función de la matriz inversa. Calcula la inversa de la matriz A. Comprueba el resultado.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\-1&2&0\\-1&1&3\end{pmatrix}\qquad Sol:\ A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\3/2&1&-1\\1/2&0&0\end{pmatrix}$$

7.- Dadas las matrices siguientes. Calcula la potencia enésima.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\\frac{n^2-n}{2}&n&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\\frac{n^2+n+1}{2}&n&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ C^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2-n}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\n&0&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ E^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad Sol:\ \begin{cases}n\ par\ F^n=I\\ n\ impar\ F^n=F\end{cases}$$

8.- Calcula los siguientes determinantes de orden 3:

$$\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\1&3&1\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&-1\\2&1&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&1&-3\end{vmatrix}$$

Sol: -9; 7; -4

9.- Hallar la solución de la ecuación:

$$a)\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&1\\1&1&x^2\end{vmatrix}=0\quad b)\ \begin{vmatrix}1&2&4\\2&x&8\\3&6&x\end{vmatrix}=0\quad c)\ \begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&3\\3&x&2\end{vmatrix}=0$$

Sol: a) x=-1; x=1; b) x=4; x=12; c) x=2

10.- Resolver aplicando las propiedades de los determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix}a&b&c\\a&x&c\\a&b&x\end{vmatrix}=0\quad b)\ \begin{vmatrix}a&b&c\\2a&x&2c\\a^2&ab&x\end{vmatrix}=0\quad c)\ \begin{vmatrix}a&b&c\\2a&x&2c\\x&-b&-c\end{vmatrix}=0\quad d)\ \begin{vmatrix}a&b&c\\-a&-b&x\\x&b&c\end{vmatrix}=0$$

Sol: x = b; x = c; b) x = b/2; x = ac; c) x = -a; x = 2b; d) x=a; x=-c

11.- Según el valor del determinante A calcular razonadamente el valor del determinante B:

$$A=\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix}2a&2c&2b\\2\alpha&2\gamma&2\beta\\2x&2z&2y\end{vmatrix}$$

Sol: B = 8A

12.- Demostrar que el determinante vale 0

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

13.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Sol: 21; -5; -14

14.- Sin desarrollar demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

15.- Resolver las ecuaciones: a) A.X = B; b) A + X = B; c) A^{-1}.X = B; d) 2A-X = 3B, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sol: a)\ X = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1/2 & 4 & 5/2 \\ -1/2 & -3 & -3/2 \end{pmatrix};\ b)\ X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix};\ d)\ X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

16.- Hallar A^{-1} y B^{-1} de las matrices del ejercicio anterior:

$$Sol:\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

17.- Calcular por determinantes A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Sol:\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

18.- Calcular el rango de M según los valores de t:

$$a)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & t & t \end{pmatrix} \quad b)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & t \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol: a) t=1 r(M)=2; t…1 r(M)=3;
b) t=4 r(M)=1; t…4 r(M)=2

19.- Calcular a para que M tenga inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & a & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: a) a…1; b) a…1; c) a…3

20.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

resolver las ecuaciones: a) AX+B=C; b) AX+BX=C; c) AX+2X=B; d) AXB=C

$$Sol:\ a)\ X = \begin{pmatrix} -1/6 & -4/3 & 1 \\ 2/3 & 4/3 & 0 \\ 5/6 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}; \quad b)\ X = \begin{pmatrix} 7/13 & -7/13 & 6/13 \\ 1/13 & 12/13 & -1/13 \\ 9/13 & 4/13 & 17/13 \end{pmatrix}$$

$$c)\ X = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -3/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7/2 & -4 & -9/4 \end{pmatrix}; \quad d)\ X = \begin{pmatrix} 5/6 & 4/3 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

21.- Calcula

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Sol: $(a+b)^4 \cdot (a-b)^4$

22.- Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & sen\, a & \cos a \\ 1 & sen\, b & \cos b \\ 1 & sen\, c & \cos c \end{vmatrix} = sen\,(b-c) + sen\,(c-a) + sen\,(a-c)$$

23.- Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 50 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -31$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 39 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 26$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 38 \qquad \begin{vmatrix} -21 & -6 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = -90$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 81$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

24.- Dada la matriz A averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para m = 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: m ... 3 y m ... 1

25.- Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa. $A = \begin{pmatrix} 2 & |x-2| \\ 1 & |x| \end{pmatrix}$

Sol: -2; 2/3

26.- Resuelve AXB + C = D

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Sol: X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

27.- Calcular el rango de la matriz A. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Sol: r(A) = 2

28.- Dada la matriz B calcular los valores de y para que su rango sea 2.

$B = \begin{pmatrix} 2 & y & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ Sol: y = -1

29.- Calcular el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

a) Haciendo ceros. b) Desarrollándolo por los elementos de una línea.
Sol: -12

30.- Comprobar sin desarrollar que son nulos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 31 \\ 4 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

31.- Dadas las matrices A y B calcula la matriz $P = A \cdot B + B^2$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&0\\1&0&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}\qquad Sol: P=\begin{pmatrix}3&3&10\\6&6&16\\2&6&18\end{pmatrix}$$

32.- Resuelve la ecuación matricial X-3A = A·B; siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}4&1\\8&10\end{pmatrix}$$

33.- Calcula el rango de las matrices siguientes:

$$C=\begin{pmatrix}1&-5&-3\\-5&5&-1\\4&0&4\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}0&2&1&3\\2&1&1&1\\4&4&3&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\2&0&1&1&2\\3&1&1&3&2\\4&3&-2&1&1\end{pmatrix}$$

Sol: r(C) = 2; r(A) = 2; r(B) = 4

34.- Calcula A^n, siendo:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad b)\ A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad Sol: a)\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{n^2+n}{2}&1&n\\n&0&1\end{pmatrix}\ b)\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$$

35.- Sabiendo que $\begin{vmatrix}a&b&c\\x&y&z\\1&0&1\end{vmatrix}=3$ Halla: a) $\begin{vmatrix}1&1&0\\x&z&y\\a&c&b\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}2c&b-c&a\\2z&y-z&x\\2&-1&1\end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix}x-1&y&z-1\\1&0&1\\a-2&b&c-2\end{vmatrix}$

Sol: a) 3; b) -6; c) 3

36.- Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n. ¿Es cierto, en general, la igualdad siguiente?: $A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$. Sol: No

37.- Halla la matriz enésima de la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad Sol:\ A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\\frac{n^2-n}{2}&-n&1\end{pmatrix}$$

38.- Encuentra los valores de x, y, z, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Sol: x = -1; y = 1; z = 2

39.- Encuentra la matriz X tal que: a) AX+B=C; b) AXB=C; c) AX+BX=C; d) AX+X=B; e) 2X+XA=C, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$Sol:\ a)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-3/4&-1&0\end{pmatrix}\quad b)\begin{pmatrix}3&0&0\\-3/2&3/2&1\\-3/4&-5/4&1/4\end{pmatrix}\quad c)\begin{pmatrix}3/2&0&0\\1/6&5/3&2/3\\-7/10&-4/5&1/5\end{pmatrix}\quad d)\begin{pmatrix}1/2&0&0\\-1/6&1/3&0\\1/6&1/15&1/5\end{pmatrix}\quad e)\left(\begin{matrix}\\7/36\\-1/6\end{matrix}\right.$$

40.- Sea $A\cdot B = A\cdot C$, ¿se puede asegurar que B = C?; y si $A\cdot B=0$; ¿se puede asegurar que A=0 ó B=0?.

Sol: No; No

41.- Hallar k para que la matriz A no tenga inversa. Calcular la inversa para k = 0.

$$A=\begin{pmatrix}1&k&1\\1&-1&k\\1&1&1\end{pmatrix}\quad Sol: k=1;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

42.- Resolver la ecuación matricial AX+B=C, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\-2&1\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}7&2&5\\-3&0&-4\end{pmatrix}\qquad Sol:\ X=\begin{pmatrix}3&1&3\\3&1&3\end{pmatrix}$$

47.- Se dice que dos matrices cuadradas de orden n, A y B conmutan, si AB = BA. Obtener las matrices A que conmuta con la B.

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad Sol: A=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$$

48.- Calcular los determinantes: a) Haciendo ceros; b) Desarrollando por los elementos de una línea:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&1\\1&3&2&1\\1&-2&2&2\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}3&2&1&-1\\2&1&-1&0\\2&-1&1&2\\-1&2&1&1\end{vmatrix}$$

Sol: 5; -48

49.- Dada la matriz A. Calcula los valores de m para que tenga inversa. Di para qué valores de m A es una matriz singular. Rango de A. Sol: a) m...-2 y m...-1/2; b) ; c) m = 2 ó m = -1/2 > r(A) = 2; m...-2 y m...-1/2 > r(A) = 3

$$A=\begin{pmatrix} 3 & m & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ m & -1 & m \end{pmatrix}$$

50.- Encontrar la matriz X que verifique que: $X\text{-}B^2 = AB$; $AX+B=C$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Sol:\ a)\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

51.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: r(A) = 2; r(B) = 4

52.- Dadas las matrices A y B calcula la matriz $P = AAB+B^2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Sol:\ P=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 11 & 9 & 17 \\ 14 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

53.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol: r(A) = 2; r(B) = 4

54.- Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & -4 & 4 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Sol: x = 2; x = -6

55.- Calcula sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 11 & 10 \\ 7 & 11 & 18 & 19 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y-z \\ 1 & y & x-z \\ 1 & z & x-y \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & 6 & 9 & 11 \end{vmatrix}$$

57.- Halla A+B; 2A+3B; siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad Sol:\ A+B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 11 & 9 & 5 \\ 8 & 16 & 12 \end{pmatrix} \quad 2A+3B = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 7 \\ 26 & 21 & 12 \\ 22 & 39 & 28 \end{pmatrix}$$

58.- Hallar las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Sol:\ no\ existe\ A^{-1}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ -8/3 & -1/3 & 1 \\ 11/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/35 & -1/35 & 9/35 \\ 3/35 & -8/35 & 2/35 \\ 6/35 & 3/70 & 4/35 \end{pmatrix}$$

59.- Hallar el rango de las siguientes matrices según valores de x:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ x & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 4 & x \\ -1 & -x & 1-x \end{pmatrix}$$

Sol: x=0 rango 3	Sol: x=3 rango 2	Sol: x=2 rango 1
x...0 rango 4	x...3 rango 3	x...2 rango 3

60.- Resolver las ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & -x \\ x & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 4 & x & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Sol: 0 y -2; -1/7

61.- Calcular el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 8 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Sol = -142; -54; 43

62.- Sin desarrollar los determinantes, utilizando sus propiedades, comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,(c-a)\,(b-a) \qquad \begin{vmatrix} yz & 1/x & x \\ zx & 1/y & y \\ xy & 1/z & z \end{vmatrix} = 0$$

63.- ¿Existe algún valor de x que haga inversibles las matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & x \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -1 & -2 \\ 4 & 1 & x \end{pmatrix} ?$$

Sol: a) ninguna; b) x ... -3 y 2

64.- Resuelve las ecuaciones matriciales siguientes: a) AXB-C=I; b) CX+AX=B siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Sol:\ a)\begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1 \\ -5/6 & 1/3 & 7/3 \\ 1/6 & -7/6 & 1/3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/2 \\ -1/6 & 3/2 & -1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$