MATEMÁTICAS II

RECUPERACIÓN ÁLGEBRA Abril 2010

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa. (0,75 ptos)

b) Calcula B^{-1} para k = 1 (0,75 ptos)

c) Determina las constantes α, β para que se cumpla $A^2 + \alpha A = \beta I$ (1,5 p)

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $B \cdot C$ y $C \cdot B$ (1 punto)

b) Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^t$ (3 puntos)

3. a) Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array}\right\}$$

(1 punto)

b) Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1. (2 p.)

SOLUCIONES

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.

$$B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{vmatrix}=(-3-k)(-1-k)-2=k^2+4k+1$$

$$k^2+4k+1=0\Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

B no tiene inversa para $k=-2\pm\sqrt{3}$

b) Calcula B^{-1} para k = 1 $\rightarrow B=\begin{pmatrix}-3-k & 1\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\rightarrow |B|=6$

$$B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{21}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

c) Determina las constantes α,β para que se cumpla $A^2+\alpha A=\beta I$

$$A^2+\alpha A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -4\\ -8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha & \alpha\\ 2\alpha & -\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}11-3\alpha & -4+\alpha\\ -8+2\alpha & 3-\alpha\end{pmatrix}=\beta I=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}11-3\alpha=\beta\\ -4+\alpha=0\\ -8+2\alpha=0\\ 3-\alpha=\beta\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=4\\ 11-12=\beta\\ 3-4=\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=4\\ \beta=-1\end{array}\right\}$$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) $B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz P que verifica $AP - B = C^t \rightarrow AP = C^t + B \rightarrow P = A^{-1}\left(C^t + B\right)$

$$C^t + B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1; \; A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; P = A^{-1}(C^t + B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-m)x + y + z = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + 2y + (4-m)z = 0 \end{array}\right\} \text{sistema homogéneo}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2-m)^2(4-m) + 1 + 2 - 2 + m - 4 + 2m - 4 + m = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9$$

para que el sistema tenga más de una solución (no solo la trivial) tiene que ser el determinante de A nulo, rango menor que 3.

$$-m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0 \Rightarrow m = 1; \; -m^2 + 7m - 9 = 0 \rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Para esos valores de m el sistema tiene más de una solución.

b) Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.

Para m = 0

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + 2my + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| \neq 0$$

, solución trivial (x=0, y=0, z=0)

Para m = 1

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=0$$ Compatible indeterminado. Cogemos un menor distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=-\lambda \\ x+2y=-3\lambda \end{array}\right\}$

$y=-2\lambda \rightarrow x=\lambda \Rightarrow$ Solución: $\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$