UNIDAD 8.- **Determinantes** *(tema 2 del libro)*

1. DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

Definición: Para una matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

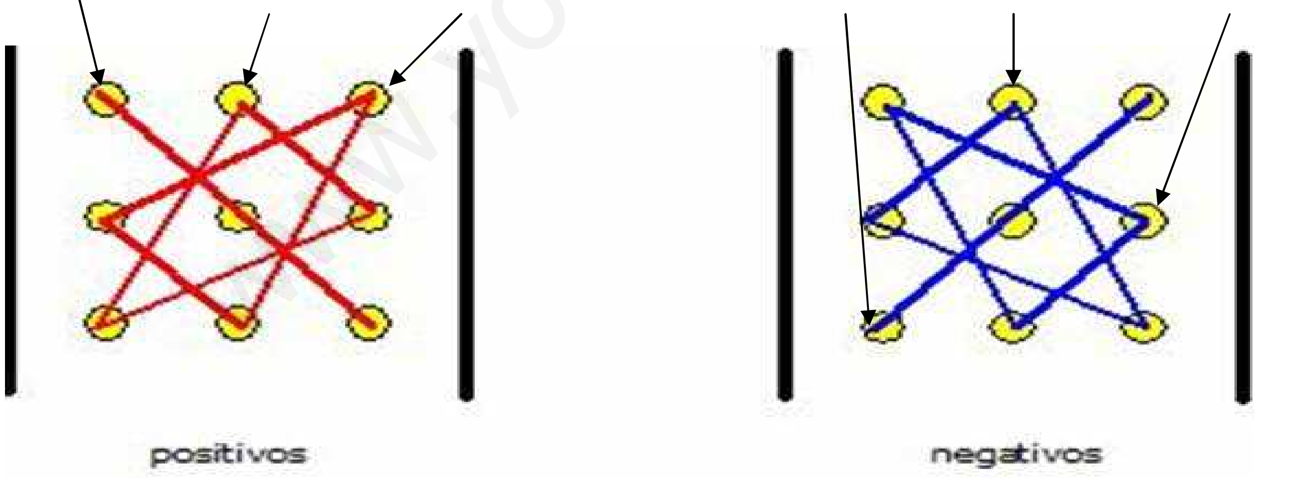
Definición: Para una matriz cuadrada de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}\right) = \text{(sin paréntesis)}$$
$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Regla de Sarrus: Para recordar con mayor facilidad el desarrollo del determinante de orden 3, podemos usar esta regla:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \qquad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$



Ejemplo 1.- Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (5) = -6 + 5 = -1$

b) $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & a \end{vmatrix} = a^2 - 100$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot0 + 0\cdot2\cdot2 + (-3)\cdot1\cdot4 - (-3)\cdot5\cdot2 - 1\cdot0\cdot0 - 2\cdot2\cdot4 = -12 + 30 - 16 = 2$

Ejemplo 2.- Calcular el valor de x en la siguiente igualdad con determinantes:

$\det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x-1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x-1 \rightarrow$ (hacemos el determinante por la regla de Sarrus) $x\cdot(x-1)\cdot2 = x-1 \rightarrow$

$2\cdot x^2 - 2\cdot x = x - 1 \rightarrow 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 35

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = |A^t|$$

2.- Si los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un nº, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho nº. Esto también nos permite extraer factor común por filas o columnas para hacer un determinante más simple.

$2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la Fila 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la columna 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (cualquiera de esos 3 determinantes da el mismo resultado, -32)

Veamos un ejemplo de sacar factor: $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 30 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (la Columna 1 tiene como factor común 6, podemos extraerlo) $6\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (además la Fila 2 tiene como factor común 5, y lo extraemos) $6\cdot5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (ya aplicamos Sarrus) $= 30\cdot(0 + 2 + 6 - 0 - 2 - 8) = -60$

OJO: Si tenemos una matriz A cuadrada de orden n, y la multiplicamos por un nº k, entonces el determinante queda multiplicado por k^n, pues k multiplica a cada fila. Es decir, $|k\cdot A| = k^n\cdot|A|$

3.- Si los elementos de una fila o columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas o columnas excepto dicha columna o fila cuyos sumandos pasan respectivamente a cada uno de los determinantes.

$$\det(F_1,...,F_i + F_i',...,F_n) = \det(F_1,...,F_i,...,F_n) + \det(F_1,...,F_i',...,F_n)$$

Ejemplo 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 3 \\ 4 & 5+2 & 5 \\ 2 & 3-2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = [5 + 10 + 36 - 30 - 15 - 4] + [2 + 10 - 24 - 12 - 4 + 10] = 2 + (-18) = -16$$

4.- El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y de ello también se tiene que $|A^n| = |A|^n$

Ejemplo 4.-

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \begin{cases} \left|\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right| = 28 - 25 = 3 \\ \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 3 \cdot 1 = 3 \end{cases}$$

5.- Si en una matriz permutamos (cambiamos) dos filas entre si (o dos columnas entre si), el determinante cambia de signo.

$$\det(F_1, ..., F_i, ..., F_j, ..., F_n) = -\det(F_1, ..., F_j, ..., F_i, ..., F_n)$$

Ejemplo 5.-

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 10 + 36 - 30 - 15 - 4 = 2$. Si cambiamos la columna 1 con la columna 3, el determinante cambia de signo, veámoslo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30 + 4 + 15 - 5 - 36 - 10 = -2$.

Sólo se puede hacer filas con filas o columnas con columnas, y si hacemos varias permutaciones, si el número es par, el determinante no varía, pero si el número es impar el determinante cambia de signo.

6.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales (o columnas iguales o proporcionales), entonces el determinante vale 0.

Ejemplo 6.-

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 23 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ pues si nos damos cuenta la fila 3 es 3 veces la fila 1: $F_3 = 3 \cdot F_1$

7. Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes filas o columnas, entonces el determinante vale 0

Ejemplo 7.-

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ pues si nos damos cuenta $C_3 = C_1 + 2 \cdot C_2$, es decir, la columna 3 es combinación lineal de la columna 1 y de la columna 2.ç

8.- Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes filas o columnas, el determinante no varía. Es decir, podemos sumar filas con filas o columnas con columnas, y el determinante no varía.

Ejemplo 8.-

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$(vamos a sumar a la fila 2 la fila 1, esto se denota por $F_2 = F_2 + F_1$) =

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (ahora en este determinante a la fila 3 le restamos dos veces la fila 1, esto se denota $F_3 = F_3 - 2F_1$)

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9$

NOTA: Un determinante con toda una fila o columna de ceros, su valor es 0

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 39

3. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j

Ejemplo 9.- En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, calculamos algunos de sus 9 menores complementarios

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij}, a producto del menor complementario α_{ij} por el signo correspondiente a la paridad de la suma $i + j$.
Es decir, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **matriz adjunta** de A y se representa por $Adj(A)$

Ejemplo 10: Calcular la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 6 = 6 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 4 = -4 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$

Luego:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 11.- Ver ejemplo del libro en margen izquierdo de la página 40

Propiedad: Se tiene que $Adj(A^t) = [Adj(A)]^t$

Desarrollo de un determinante por adjuntos: El determinante de una matriz cuadrada cualquiera es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Así, si tenemos que calcular $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, podemos hacerlo por Sarrus o bien desarrollando por una de sus filas o columnas, por ejemplo:

Si desarrollamos por la fila 2: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

Si desarrollamos por la columna 1: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$

Este método se suele utilizar en combinación con la propiedad 8 del punto anterior para hacer ceros en una determinada fila o columna y después proceder al desarrollo por adjuntos respecto de dicha fila o columna. Este método se suele usar en determinantes de orden mayor a 3.

Ejemplo 12.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vamos a calcular su determinante de diferentes maneras:

a) Por Sarrus: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 18 - 20 - 16 + 15 + 18 = -9$

b) Desarrollando por la columna 3 (se puede hacer por la que queramos):

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{13} + (-3) \cdot A_{23} + 6 \cdot A_{33}$

Calculamos los adjuntos: $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9$, $A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

Por tanto: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 5 = -36 - 3 + 30 = -9$

c) Haciendo ceros: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (hacemos $F_2 = F_2 + F_1$ y $F_3 = F_3 - 2F_1$ para hacer ceros en la primera columna) $= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$ (desarrollamos ahora por la primera columna, y como vemos sólo tenemos que calcular A_{11}, pues los demás están multiplicados por 0) = $1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} =$

$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -9$ Este último determinante de orden 2 también se podía haber hecho haciendo ceros

De esto podemos concluir que:

- El determinante de una matriz triangular o diagonal es el producto es igual al producto de los elementos de la diagonal principal
- El determinante de la matriz unidad es 1
- El deteminante de la matriz nula es 0

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 41

4. MATRIZ INVERSA USANDO DETERMINANTES

Recordemos que la matriz inversa de una matriz cuadrada A es aquella matriz A^{-1} que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman regulares
Las matrices que no tienen inversa se llaman singulares

Propiedad: Una matriz A es regular (es decir, tiene inversa) si y sólo si $|A| \neq 0$

Teorema.- Dada una matriz A regular, entonces su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t \quad \text{o bien} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A^t)]$$

Ejemplo 13: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right| = 6 - 8 = -2 \neq 0 \rightarrow$ A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Aplicamos cualquiera de las dos fórmulas del teorema, por ejemplo la primera $A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$

Calculamos la matriz adjunta de A (lo hacéis vosotros, es muy fácil) $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora la trasponemos: $[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y por último multiplicamos por $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} \rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación: Efectuamos $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} =$ (fácil de ver que es I) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 14: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+4+0+2+0-8=1$ → A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$	$A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$	$A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$
$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$	$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$	$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$
$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$	$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7$	$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5$

La matriz adjunta nos queda: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Calculamos la traspuesta y la multiplicamos por $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{1} = 1$, obteniendo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Propiedades de la inversa:

1.- Si existe A^{-1}, ésta es única

2.- $(A^{-1})^{-1} = A$

3.- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4.- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5. RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Como ya sabemos el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Veamos como calcular lo con determinantes.

Definición: Se llama menor de orden k de una matriz A de dimensión $m \times n$ al determinante de orden k formado por los elementos que pertenecen a k filas y a k columnas de la matriz A. Es decir, son los determinantes de cualquier submatriz cuadrada de A

Ejemplo 15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que es de dimensión 2×3 y por ello podemos tomar submatrices cuadradas de orden 1 y orden 2

Menores de orden 1: Son los elementos de la matriz 2, 1, 5, 3, 0 y 1

Menores de orden 2: Sólo hay 3 menores de orden 2 que son: $\begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13 \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$ Ojo al tomar los menores

pues no podemos tomar aleatoriamente los elementos del menor, este determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ no es un menor pues no es una submatriz de A

Ejemplo 16.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Tiene menores de orden 1, de orden 2 y de orden 3.

Menores de orden 1: Son los 9 elementos de la matriz

Menores de orden 2: Hay 9 menores de orden 2, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}, \ldots..$

Menores de orden 3: Sólo hay uno y es el determinante de la matriz $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

Propiedad: El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo

Ejemplo 16.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Vamos a calcular su rango.

Empezamos con los de mayor orden, en este caso, el único es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -25 - 28 - 24 + 30 + 28 + 20$ $= 1 \neq 0 \rightarrow$ El rango es 3 pues ya no hay menores de mayor orden$\rightarrow$ A tiene las 3 filas o las 3 columnas linealmente independientes

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de la página 44, 45, 50 y 51

EJERCICIOS: De la página 52, los ejercicios 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9
De la página 53, los ejercicios 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.