Fecha:

Nota:

Nombre: Curso: 2º Bachillerato CCSS

Examen resuelto Álgebra y Programación lineal

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.

Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

EJERCICIO 2

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices:

$$A\cdot B,\ B\cdot C,\ C\cdot A.$$

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial: $A\cdot X + B = C.$

EJERCICIO 3

(3 puntos) Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.

Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es 1.75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.

Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia. ¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

EJERCICIO 4

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

(1 punto) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.

Ejercicio 1.

Sea $\underline{x}$ el precio de 1 litro de leche, y 1 kg de jamón y $\underline{z}$ un litro de aceite de oliva

Planteamos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4x+4z \end{array}\right\}$$

Si dividimos la primera ecuación por 6 y reorganizamos las otras dos transformamos el sistema en otro equivalente

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y+2z=26 \\ 3x \quad -z=0 \\ 4x-y+4z=0 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y la ampliada } A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 26 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

· Si $|A|\neq 0$ entonces $\text{rang}(A)=3=\text{rang}(A^*)$ y tendremos un sistema compatible determinado, habrá una única solución

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-4-6-4-12=-26$$

luego el sistema tiene una única solución usemos la regla de Cramer para resolverlo

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{26 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-26}{-26} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-26 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-26(12+4)}{-26} = 16$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 26 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{26 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{26 \cdot (-3)}{-26} = 3$$

Por tanto el precio de la leche (x) 1 €/litro, el del jamón 16 €/Kg y el aceite de oliva 3 €/Kg.

2. a) Condición necesaria para poder multiplicar dos matrices es que el número de columnas de la primera sea igual que el número de filas de la segunda, esta condición sólo se cumple en A · B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

b) $AX + B = C \iff AX = C - B$ (si existe A^{-1})

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(C-B) \qquad X = A^{-1}(C-B)$

Restricciones

- Para la almendra

$$150x + 100y \leq 240\,000 \iff 3x+2y \leq 4800$$

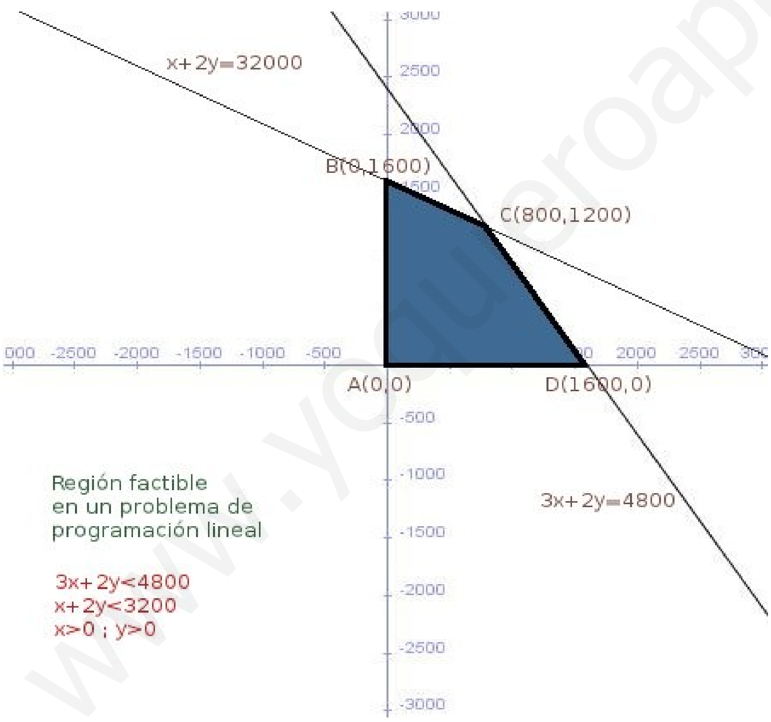
- Para el azúcar

$$50x + 100y \leq 160.000 \iff x+2y \leq 3200$$

Además el número de tortas y tabletas de turrón ha de ser mayor o igual que 0 $x \geq 0$; $y \geq 0$.

En resumen

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y \leq 4800 \\ x+2y \leq 3200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son los puntos

A(0,0) B(0,1600) C(800,1200) D(1600,0)

Veamos donde se maximiza la función objetivo

$f(0,0) = 1'75 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

$f(0,1600) = 1'75 \cdot 0 + 1 \cdot 1600 = 1600$

$f(800,1200) = 1'75 \cdot 800 + 1 \cdot 1200 = 2600$

$f(1600,0) = 1'75 \cdot 1600 = 2800$

Se obtiene un beneficio máximo de 2800 € fabricando 1600 tortas de almendra y ninguna tableta de turrón.

4. Existe la inversa de una matriz si y sólo si su determinante es no nulo.

Existe $A^{-1} \iff |A| \neq 0$.

Calculamos $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + m + 6$$

$$|A| = 0 \iff m^2 - m - 6 = 0 \iff m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -2 \end{cases}$$

Luego existe A^{-1} siempre y cuando $m \neq -2$ y $m \neq 3$.