Matrices y determinantes I

1.- Calcular el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & sena & \cos a \\ 1 & senb & \cos b \\ 1 & senc & \cos c \end{vmatrix}$

2.- Escribir la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es multiplicándola por la dada.

3.- Escribir la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprobar que lo es multiplicándola por la dada.

(Jun. Oblig 1989).

4.- Obtener, simplificando, el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$ (Jun. Oblig 1989)

5.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y A^{428}. (Sep. Oblig 1990)

6.- Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2 + I = 0$.

Obtener una matriz B distinta de +A y de –A, que también verifique la relación $B^2 + I = 0$
(Sep. Opt 1990)

7.- Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$ (Sep. Opt 1990)

8.- Hallar el rango de la siguiente matriz M, según los valores de α, β y γ:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$ (Jun. Oblig 1991)

9.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X tal que AX + B = A.

(Jun. Opt 19991)

10.- Calcular A.B y B.A, siendo las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Sep. Oblig 1991)

11.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcular la matriz $(A - I)^2$
2. Haciendo uso del apartado anterior, determinar A^4. (Sep. Opt 1991)

12.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A-\lambda I)^2$ sea la matriz nula. (Jun. Opt 1992)

13.- Resolver la ecuación matricial $XA = B + C$, donde: (Sep. Oblig 1992)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

14.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2a & a+b \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores reales de a y b la matriz A tiene inversa?. Determinar la matriz A^{-1}. (Sep. Opt 1992)

15.- Calcular el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ (Jun. Oblig 1993)

16.- Determinar para que valor o valores de x tiene inversa la matriz: $\begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 0 & 3x & -x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

(Jun. Opt 1993)

17.- Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (Jun. Opt 1993)

18.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (Jun. Oblig 1992)

19.- Sea A una matriz cuadrada. Si $A^2 + 2A + I = 0$, comprobar que A es invertible.
(Sep. Oblig 1993)

20.- Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$ (Jun oblig 1994)

21.- Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad: (Jun opt 1994)

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

22.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz cuadrada X de orden 2 tal que A + X = AX + XA. (Sep. Oblig 1994)

23.- Resolver la ecuación det(A – xI) = 0, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, e I la matriz unidad de dimensión 3 y $x \in R$ la incógnita. (Sep. Opt 1994).

24.- Utilizando las propiedades de los determinantes, calcula el valor de: $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$

(Jun. Oblig 1995)

25.- Resolver la ecuación matricial XA = B + C, donde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (Jun. Opt 1995)

26.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ encontrar las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tales que AB = -BA. (Sep. opt 1995)

27.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz de la forma $P = \begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$ que verifique AP = PB y tenga su determinante igual a 1. (Sep. Oblig 1995).

28.- Hallar una matriz dos por dos , distinta de I y de –I, cuya inversa coincida con su traspuesta. (Jun. oblig 1996)

29.- Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ verifica la igualdad $A^2 = A + I$, siendo I la matriz identidad. Calcular A^{-1} y A^4. (Jun. Opt 1996)

30.- Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n, siendo n un número natural arbitrario. (Sep. Oblig 1996)

31.- Calcular los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta. (Jun opt 1997)

32.- Determinar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ tales que su inversa sea $2I - A$. (Jun oblig 1997)

33.- Comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de A y A^n. (Sep. Oblig 1997)

34.- Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$, determinar un valor real no nulo del número real λ, tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad. (Jun. obli. 1998)

35.- Hallar las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, que cumplan $A^3 = A$. (Jun. Opt. 1998)

36.- Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (Sep. Oblig. 1998)

37.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hallar una matriz X tal que $AXB = I$ (Sep. Opt. 1998)

38.- Para cada número n, se considera la matriz: $A_n = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}, x \in R$.

a) Compruébese que $A_n . A_m = A_{n+m}$.
b) Como aplicación de lo anterior, calcúlese A_n^{-1}. (Jun. Oblig. 1999)

39.- Se considera la matriz. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ Calcular $(A^t . A^{-1})^2. A$. (Jun. Opt 1989).

40.- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.Se pide: Calcular el rango de A y hallar la matriz A^{12}. (Sep. Opt 1989)

41.- Calcular el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 5a & 5b & 5c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (Jun. Oblig 1990)

42.- Obtener en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$

(Jun. Opt 1990)

43.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P y no singular tal que $B = P^{-1}.A.P$. (Jun. Opt 1990)

Matrices y determinantes

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} a & \cos a \\ 1 & \operatorname{sen} b & \cos b \\ 1 & \operatorname{sen} c & \cos c \end{vmatrix} = \operatorname{sen} b \cos c + \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos a - \operatorname{sen} c \cos b - \operatorname{sen} a \cos c$$

$$\operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a) + \operatorname{sen}(a-b) = [\operatorname{sen} b \cos c - \cos b \operatorname{sen} c] + [\operatorname{sen} c \cos a - \cos c \operatorname{sen} a] + [\operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b]$$

c.q.d

2.
$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
c.q.d

3.
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobación
$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
c.q.d

4.
$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} bc\,b\,a \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \boxed{2a^2b^4c^2}$$

(1) ⇒ Prop. determinantes $|A_k| = k|A|$

(2) → Sarrus

5.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las potencias de A son cíclicas de periodo 3 ⇒ $\boxed{A^{428} = A^2}$

$$\begin{array}{r|l} 428 & 3 \\ \hline 12 & 142 \\ 08 & \\ 2 & \end{array}$$

(Sept. oblig. 1990)

6.
$$A^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ c.q.d

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ operando e igualando

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + bc + 1 = 0 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 0 \\ cb + d^2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \Rightarrow b(a+d) = 0 \\ \Rightarrow c(a+d) = 0 \\ \\ \end{array}$$

Opción 1.- $b = c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 0 \\ d^2 + 1 = 0 \end{cases}$ No tiene solución en R.

Opción 2.- $a + d = 0 \Rightarrow a = -d \begin{cases} d^2 + bc + 1 = 0 \\ \cancel{d^2 + cb + 1 = 0} \end{cases}$

si $d = \lambda \Rightarrow a = -\lambda \Rightarrow bc = 1 - \lambda^2$

si $c = \mu \Rightarrow b = \dfrac{1-\lambda^2}{\mu}$ Por ejemplo si $\mu = 1$ y $\lambda = 2$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(Sept. opt. 1990)

(7) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 5\cdot 3\cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{\overset{(2)}{=}} 105 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 105 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

→ Det. de Vandermonde

$\overset{(1)}{=} 105\,(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \boxed{105(b-a)(c-a)(c-b)}$

(1) Prop. de los determinantes $|Ak| = k|A|$

(2) El valor de un det. no varía si a una línea le sumamos o restamos otra paralela multiplicada por un número. (Sept. opt. 1990)

(3) Desarrollando por F_1

(4) Sarrus.

(8) $|M| = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow \text{Rang } M < 3$

$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

Caso 1°.- Si $\alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \boxed{\text{Rang } M = 1}$

Caso 2°.- Si $\alpha \neq \beta$ ó $\alpha \neq \gamma$ ó $\beta \neq \gamma$ $\Rightarrow \boxed{\text{Rang } M = 2}$ (Ju. oblig. 1991)

(9) $AX + B = A \Rightarrow AX = A - B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(A-B)}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ (Ju. opt. 1991)

(10) $A_{1\times4} \cdot B_{4\times1} = (1, 3\ \ 2\ -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (0)_{1\times1}$

$B_{4\times1}\, A_{1\times4} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}(1\ \ 3\ \ 2\ -1) = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{4\times4}$ (Sept. oblig. 1991)

(11) 1) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Como $(A-I)^2 = 0 \Rightarrow (A-I)(A-I) = A^2 - A - A + I^2 = A^2 - 2A + I = 0$

Significa que $A^2 = 2A - I \Rightarrow A^4 = (2A - I)^2$ (Sep. opt 1991)

Como $2A - I = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}}$

(12) $(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 2\lambda-2 & 4\lambda-4 \\ 2\lambda-2 & \lambda^2-1 & 4\lambda-4 \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & 5-6\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esto ocurre para $\boxed{\lambda = 1}$ (Ju. opt 1992)

(13) $XA = B + C \Rightarrow X = (B+C)A^{-1}$

$B + C = \begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}$; $|A| = 36+24+12-32-12-27 = 72-71 = 1$

$\left.\begin{matrix} A_{11}=24 & A_{12}=-3 & A_{13}=-10 \\ A_{21}=-5 & A_{22}=1 & A_{23}=2 \\ A_{31}=-2 & A_{32}=0 & A_{33}=1 \end{matrix}\right\} A^{-1} = \begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix}3&1&0\\1&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24&-5&-2\\-3&1&0\\-10&2&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}69&-14&-6\\-2&1&0\\15&-3&-1\end{pmatrix}}$$

(Sept. oblig. 1992)

(14) Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero

$|A| = (a+b)^2 - 2ab = a^2+b^2 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución en $\mathbb{R}$ salvo $a=b=0$

La matriz A tiene inversa para todo a y $b \in \mathbb{R}-\{0\}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a+b & -b\\ -2a & a+b\end{pmatrix}$ (Sept opt 1992)

(15)
$$\begin{vmatrix}3&x&x&x\\x&3&x&x\\x&x&3&x\\x&x&x&3\end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\overset{(1)}{=}} \begin{vmatrix}3x+3&x&x&x\\3x+3&3&x&x\\3x+3&x&3&x\\3x+3&x&x&3\end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (3x+3)\begin{vmatrix}1&x&x&x\\1&3&x&x\\1&x&3&x\\1&x&x&3\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1\\F_4-F_1}}{\overset{(1)}{=}}$$

$$= (3x+3)\begin{vmatrix}1&x&x&x\\0&3-x&0&0\\0&0&3-x&0\\0&0&0&3-x\end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \boxed{(3x+3)(3-x)^3}$$

(Ju. oblig. 1993)

(1) El valor de un det. no varía si a una línea cualquiera le sumamos o restamos otra paralela multiplicada por un número

(2) Prop. de los determinantes $|A_k| = k|A|$

(3) El valor del det. de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

(16) Una matriz tiene inversa si su det. $\neq 0$

$|A| = 9x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$. La matriz tiene inversa $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Ju opt. 1993)

$A_{11} = 3x^2 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 0$

$A_{21} = -x^2 \quad A_{22} = 3x^2 \quad A_{23} = 0$

$A_{31} = -4x^2 \quad A_{32} = +3x^2 \quad A_{33} = 9x^3$

$$A^{-1} = \frac{1}{9x^3}\begin{pmatrix}3x^2&0&0\\-x^2&3x^2&0\\-4x^2&3x^2&9x^2\end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{3x}&\frac{-1}{9x}&\frac{-4}{9x}\\0&\frac{1}{3x}&\frac{1}{3x}\\0&0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}}$$

(17)
$$\underset{\substack{C_2-C_1\\C_3-C_1\\C_4-C_1}}{\overset{(1)}{=}} \begin{vmatrix}1&x-1&x^2-1&x^3-1\\3&2x-2&x^2+2x-3&3x^2-3\\3&x-1&2x-2&3x-3\\1&0&0&0\end{vmatrix} \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} -(x-1)^3\begin{vmatrix}1&x+1&x^2+x+1\\2&x+3&3x+3\\1&2&3\end{vmatrix} \underset{\substack{C_2-2C_1\\C_3-3C_1}}{\overset{(1)}{=}}$$

$$-(x-1)^3\begin{vmatrix}1 & x-1 & x^2+x-2\\ 2 & x-1 & 3x-3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} \overset{(2)^*}{\underset{(3)}{=}} -(x-1)^5\begin{vmatrix}1 & x+2\\ 1 & 3\end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -(x-1)^5(1-x)=$$

$= (x-1)^6 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ raíz sexta de la ecuación

(1) El valor de un det. no varía si a una línea se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número

(2) Desarrollando por F_4 (Jn opt 1993)

$(2)^*$ Desarrollando por F_3

(3) Prop. de los determinantes $|A_k| = k|A|$

(4) Sarrus.

(18) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29 & 40\\ 34 & 47\end{pmatrix} \Rightarrow AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$X = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29 & 40\\ 34 & 47\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 26\\ -14 & -19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}12 & -5\\ -9 & 4\end{pmatrix}}$ (Jn opt. 1993)

(19) Como $A^2 + 2A + I = 0 \Rightarrow I = -A^2 - 2A$

Por lo tanto $I = A(-A-2I) \Rightarrow -A-2I$ es la inversa de A por la derecha

pero también $I = (-A-2I)A \Rightarrow -A-2I$ es la inversa de A por la izquierda

Por lo tanto la matriz A es invertible $\Rightarrow$ Tiene inversa y su inversa es $A^{-1} = -A-2I$ (Sept. oblig. 1993)

(20) $$\begin{vmatrix}a+1 & a & a & a\\ a & a+1 & a & a\\ a & a & a+1 & a\\ a & a & a & a+1\end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\overset{(1)}{=}} \begin{vmatrix}4a+1 & a & a & a\\ 4a+1 & a+1 & a & a\\ 4a+1 & a & a+1 & a\\ 4a+1 & a & a & a+1\end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (4a+1)\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 1 & a+1 & a & a\\ 1 & a & a+1 & a\\ 1 & a & a & a+1\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1\\ F_3-F_1\\ F_4-F_1}}{\overset{(1)}{=}}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \boxed{4a+1}$$

(1) El valor de un det. no varía si a una línea se le suma o resta otra paralela multiplicada por un número

(2) Prop. de los det. $|A_k| = k|A|$

(3) El det. de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal. (Jn. oblig. 1994)

(21) $\begin{pmatrix}1 & y\\ x & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1+y^2 & x+yz\\ x+zy & x^2+z^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}1+y^2=5\\ x+yz=0\\ \cancel{x+zy=0}\\ x^2+z^2=5\end{array}\right\} \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow \boxed{y=\pm 2}$

Si $y=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+2z=0\\ x^2+z^2=5\end{array}\right\} \Rightarrow x=-2z$; $4z^2+z^2=5 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1 \Rightarrow x=\mp 2$ $\left\{\boxed{\begin{array}{l}x=-2;\ y=2;\ z=1\\ x=2;\ y=2;\ z=-1\end{array}}\right.$

Si $y=-2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-2z=0\\ x^2+z^2=5\end{array}\right\} \Rightarrow x=2z$; $4z^2+z^2=5 \Rightarrow z^2=1 \Rightarrow z=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 2$ $\left\{\boxed{\begin{array}{l}x=2;\ y=-2;\ z=1\\ x=-2;\ y=-2;\ z=-1\end{array}}\right.$

(Jn. opt. 1994)

22 $A+X = AX + XA \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} a = c+b \\ 1+b = d+a \\ 1+c = a+d \\ d = b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1+b = 1+c \Rightarrow b = c \Rightarrow \text{si } c=\lambda \Rightarrow b = \lambda \\ a = d \Rightarrow \text{si } d = \mu \Rightarrow a = \mu \end{array} \qquad \boxed{X = \begin{pmatrix}\mu & \lambda\\ \lambda & \mu\end{pmatrix} \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

(Sept. oblig. 1994)

23 $$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 4 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(1-x) - 4(1-x) = (4-4x+x^2)(1-x) - 4 + 4x =$$
$$= \cancel{4} - \cancel{4x} - 4x + 4x^2 + x^2 - x^3 - \cancel{4} + \cancel{4x} = -x^3 + 5x^2 - 4x = 0$$

$-x(x^2-5x+4) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=1 \end{array}}$ (Sept. opt. 1994)

24 $$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} x \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 1 & x+3 & x+4 \\ 1 & x+5 & x+6 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\overset{(2)}{=}} x \begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 0 \quad \boxed{\forall x \text{ porque } F_3 = 2F_2}$$

(2) El valor de un determinante no varía si a una línea se le suma otra paralela multiplicada por un número

(1) $|A_k| = k|A|$

(3) Un det. vale cero si tiene dos líneas proporcionales. (Ju. oblig. 1995)

25 $XA = B + C \Rightarrow X = (B+C)A^{-1}$

$|A| = 1 \quad A_{11} = 1 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = 0$

$A_{21} = -1 \quad A_{22} = 1 \quad A_{23} = 0 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_{31} = 1 \quad A_{32} = -1 \quad A_{33} = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}$$ (Ju opt. 1995)

26 $$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a = -3a - 2b \\ \cancel{3b} - 4c = 4a + \cancel{3b} \\ 2a = -2c \\ 2b - 3c = 3c \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6a + 2b = 0 \\ 4a + 4c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ 2b - 6c = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ \cancel{a + c = 0} \\ b - 3c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\to b = -3a \\ \to a = -c\end{array}\right\} \text{si } a = \lambda \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ \to -3a + 3a = 0 \quad c = -\lambda \text{ y } b = -3\lambda \end{array} \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} \lambda & -3\lambda \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R}}$$

(Sep. opt. 1995)

27 $$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -4a - b = -a \\ -4a - c = -2a \\ 4a + b = b - 2c \\ 4a + c = 2b - 4c \\ ac - ab = 1 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ \cancel{4a + 2c = 0} \\ 4a - 2b + 5c = 0 \\ a(c-b) = 1 \end{array}\right.$$

$|A| = 1 \Rightarrow$

$b = -3a$

$c = -2a$

Sustituyendo en $4a - 2b + 5c = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Sustituyendo en $a(c-b) = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ $\left\{\begin{array}{l} \boxed{a = 1;\ b = -3;\ c = -2} \\ \boxed{a = -1;\ b = 3;\ c = 2} \end{array}\right.$

(Sept. oblig. 1995)

(28) $A^{-1} = A^t \Rightarrow AA^{-1} = AA^t \Rightarrow I = AA^t$. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = a^2 + b^2 \\ 0 = ac + bd \\ \cancel{0 = ac + db} \\ 1 = c^2 + d^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Si $a = \lambda \rightarrow b^2 = 1 - \lambda^2$

$b = \pm\sqrt{1 - \lambda^2}$

Por ejemplo si $\lambda = 0$

Entonces $b = \pm 1 \Rightarrow$ Sustituyendo en $ac + bd = 0 \Rightarrow \pm d = 0$

si $d = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

La matriz A podría ser $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. (Juni. oblig. 1996)

Comprobación $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c.q.d

(29) Como $A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(A - I) = I \\ (A - I)A = I \end{array}\right\}$ Esto quiere decir que $A^{-1} = A - I$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 1 & -6 \\ -9 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(Juni. opt. 1996)

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A + I)(A + I) = A^2 + 2A + I = (A + I) + 2A + I = 3A + 2I =$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 & -3 \\ 21 & 14 & 3 & -18 \\ -27 & -6 & 5 & 21 \\ 6 & 15 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

(30) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n \in N}$ (Sep opt. 1996)

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(31) $A^{-1} = -A \Rightarrow AA^{-1} = -A \cdot A \Rightarrow I = -A \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -\lambda^2 + 10 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 = 10 - \lambda^2 \end{array}\right| \lambda^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 3}$$

(32) $A^{-1} = 2I - A \Rightarrow AA^{-1} = A(2I - A) \Rightarrow I = 2A - A^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 + ab & 2a + ac \\ 2b + cb & ab + c^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = -ab \\ \left.\begin{array}{l} 0 = -ac \\ 0 = -cb \end{array}\right\} \boxed{c = 0} \\ 1 = 2c - ab - c^2 \Rightarrow 1 = -ab \end{array}$$

$\Rightarrow 1 = -ab \Rightarrow b = \frac{-1}{a} \Rightarrow$ Infinitas sol.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1/a & 0 \end{pmatrix} \text{ siendo } a \in R - \{0\}}$$

(33) Comprobación $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ c.q.d.

(33) Si $A^2 = 2A - I \Rightarrow -A^2 + 2A = I \Rightarrow I = A(2I - A) \Rightarrow$ Por definición de matriz inversa se tiene que $A^{-1} = (2I - A) \Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} \; ; \; \boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}}$$

(Sept. obl. 97)

(34) $\lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I = I \Rightarrow \lambda^2 A - 2\lambda A = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda) A = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda =$

como $A^2 = A$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{array}}$ (Jul. oblig. 98)

(35) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ba^2 \\ ab^2 & 0 \end{pmatrix} = A$

$ba^2 = a \Rightarrow ba^2 - a = 0 \Rightarrow a(ba - 1) = 0 \rightarrow a = 0$ ó $\rightarrow ba = 1 \Rightarrow b = 1/a$

$ab^2 = b \Rightarrow b(ab - 1) = 0 \rightarrow b = 0$ $\rightarrow ab - 1 = 0 \Rightarrow b = 1/a$.

Sol: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Jun. opt. 98)

(36) $x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$ Ruffini $\Rightarrow x = 1$ (doble) ; $x = -2$ (Simple) (Jul. soluciones)

(37) $AXB = I \Rightarrow X = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$ (Sep. opt. 98)

(38) a) $A_n \cdot A_m = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos mx & \operatorname{sen} mx \\ -\operatorname{sen} mx & \cos mx \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos nx \cos mx - \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx & \cos nx \operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx \cos mx \\ -\operatorname{sen} nx \cos mx - \cos nx \operatorname{sen} mx & -\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx + \cos nx \cos mx \end{pmatrix}$$

$= \left(\text{Fórmulas de trigonometría}\right) = \begin{pmatrix} \cos(n+m)x & \operatorname{sen}(n+m)x \\ -\operatorname{sen}(n+m)x & \cos(n+m)x \end{pmatrix} = A_{n+m}$ c.q.d.

b) $A_n \cdot A_n^{-1} = I \Rightarrow$ Aplicando la conclusión anterior tenemos:

$\cos(n+m)x = 1 \Rightarrow n + m = 0 \Rightarrow m = -n \Rightarrow \cos mx = \cos(-nx) = \cos nx$

$\operatorname{sen}(n+m)x = 0 \Rightarrow n + m = 0 \Rightarrow m = -n \Rightarrow \operatorname{sen} mx = \operatorname{sen}(-nx) = -\operatorname{sen} nx$

Por lo tanto $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos nx & -\operatorname{sen} nx \\ \operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}}$ (Jun. oblig. 99)

39 $A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$(A^t \cdot A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -12 & -20 \end{pmatrix}}$

(Jun. opt. 89)

40 Rg A = pues se puede sacar un determinante de orden 3

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = A^5 = \dots = A^n = (0)_{4\times 4}$

$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Sept. opt. 89)

41 $10 \cdot 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}_{\text{Det. de Vandermonde.}} = 50 \cdot (b-a)(c-a)(c-b)$

(Jun. oblig. 90)

42 $\begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -1 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \boxed{-abc}$

(Jun. opt. 90)

(1) Desarrollando por C_4

43 P simétrica $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; No singular $\Rightarrow |P| \neq 0 \Rightarrow ac - b^2 \neq 0$

$B = P^{-1} A P \Rightarrow PB = AP \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$4a + 6b = 4a - 3b \Rightarrow 9b = 0 \Rightarrow b = 0$

$-3a - 5b = 4b - 3c \Rightarrow a = c$

$4b + 6c = 6a - 5b \Rightarrow c = a$

$-3b - 5c = 6b - 5c \Rightarrow b = 0$

$\underbrace{\text{Solu: } P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} - \{0\}}_{\text{Inf. soluciones.}}$

(Jun. opt. 90)