DERIVADAS

1. Derivada de una función

Definición 1 (Derivada de una función en un punto): Dada una función $y = f(x)$, se define su derivada en el punto $x=a$, y se designa por $f\,'(a)$ como el valor del siguiente límite, si existe:

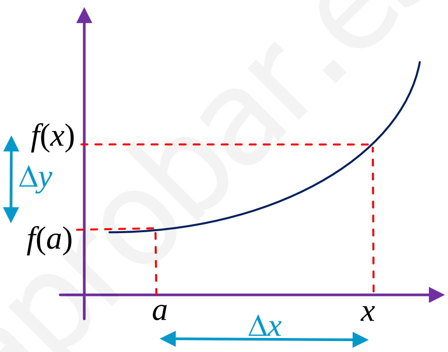
$$f\,'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por tanto, la derivada de una función en un punto, si existe, es un número: el resultado de dichos límites, en cualquiera de sus tres variantes.

Las tres definiciones son equivalentes. Veámoslo:

En primer lugar, si llamamos $\boxed{t = x - a}$, tenemos que cuando $x \to a$, entonces $t = x - a$ tiende a $a - a = 0$. Y recíprocamente, cuando $t \to 0$, entonces como $t = x - a \Rightarrow \boxed{x = a + t}$, se verifica que x tiende a $a + 0 = a$. Entonces, con estos cambios de variables, los dos límites primeros son equivalentes (en lugar de t podemos usar cualquier letra: h, por ejemplo).

Por otra parte, si estamos inicialmente en a y nos hemos trasladado hasta x, la variable independiente se ha incrementado en $t = \Delta x = x - a$, y la dependiente en $\Delta y = f(x) - f(a)$, por lo que los dos límites primeros son iguales al último.



Definición 2: Una función se dice derivable en un punto x si existe $f\,'(x)$.

Definición 3: Se definen las derivadas laterales de una función en un punto de forma análoga, pero tomando sólo el límite lateral correspondiente. Así, las derivadas por la derecha y por la izquierda de una función en un punto a serán:

$$f\,'(a^+) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{y} \qquad f\,'(a^-) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Como el límite completo existe si, y sólo si existen los dos límites laterales y coinciden, ***una función será derivable en un punto si y sólo si lo es tanto por la derecha como por la izquierda, coincidiendo, además, ambas derivadas laterales***. En tal caso, tal valor común es, también, el valor de la derivada de la función en el punto.

Teorema 1: "**Si una función es derivable en un punto, entonces, es continua en dicho punto**."

Por tanto, si **una función es discontinua en un punto no puede ser derivable en dicho punto** (porque si lo fuera, según este teorema debería ser continua; y no lo es).

Demostración. Calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right] = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) =$$

Como el límite de un producto es el producto de los límites de los distintos factores:

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

El primero de los límites existe según el enunciado del teorema, ya que es $f\,'(a)$. Y el segundo vale $a - a = 0$. Por tanto, este límite vale cero. Hemos obtenido que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0 \iff \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} f(a)=0 \iff \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(a)$$

Y como $f(a)$ es un número fijo, no varía cuando $x \to a$. Luego:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Y esta es la definición de que f es continua en a. Por lo que hemos demostrado el teorema. ■

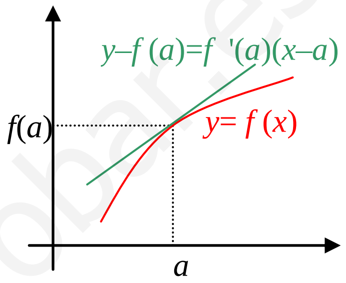
El recíproco de este teorema no es cierto: hay funciones continuas que no son derivables (por ejemplo, $y = |x|$ en $x = 0$).

2. Interpretación geométrica de la derivada (problema de la tangente)

La derivada de una función f en un punto a: f '(a), es la pendiente[1] de la recta tangente a la gráfica de dicha función en el punto (a, f(a)).

Por tanto, la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ tiene como ecuación:

$$\boxed{y-f(a)=f\,'(a)(x-a)}$$

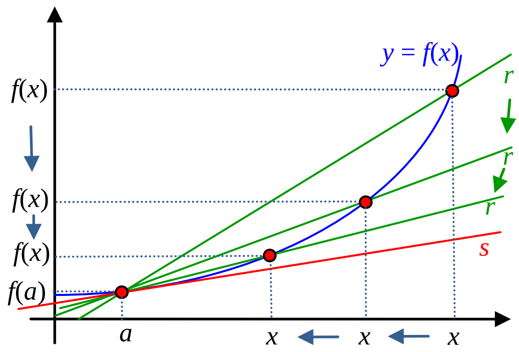


Veamos por qué esto es así. En primer lugar, consideremos una recta de la que conocemos su pendiente m y un punto: (x_0, y_0). Según la forma *punto-pendiente*, tendrá como ecuación: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Si otro punto es (x_1, y_1), sus coordenadas harán ciertas esta ecuación, por lo que: $y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$. Así que su pendiente, conocidos dos puntos de la recta, es:

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Pues bien. Sea una función $f(x)$ derivable en un entorno de $x = a$. Consideremos la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$. La pendiente de dicha recta, según lo visto, es:

$$m_r=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



Hagamos, ahora, tender $x \to a$. Así la recta r va cambiando, según hemos querido mostrar en el gráfico. Primeramente x está alejado de a, por lo que r es la que está más inclinada, pero a medida que movemos x en dirección hacia a, el punto $(x, f(x))$ se va moviendo sobre la curva, de manera que la recta r se va transformando hasta que, en el límite de dicho movimiento, se convierte en la recta s, que es *tangente* a la curva en $(a, f(a))$ [2]. Luego la pendiente m de la recta tangente s es el límite de la pendiente de r al final de dicho proceso. Es decir:

---

[1] Si una recta está en forma *explícita*: y=mx+n, o en forma *punto-pendiente*: y–y_0=m(x–x_0), al parámetro m se le denomina *pendiente* de la recta. La pendiente señala la inclinación de la recta, de forma que si m=0 la recta es horizontal; si m es positiva, la recta es creciente, más vertical cuanto mayor sea m; y si m es negativa, la recta es decreciente, más vertical cuanto más negativa sea m.

[2] Este gráfico puede verse interactivo en la dirección: http://www.geogebratube.org/student/m36335 donde al pinchar en B puede moverse hacia A, observando como la secante se convierte en tangente.

$$m = \lim_{x \to a} m_r = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Conocida la pendiente y un punto, por la fórmula *punto-pendiente* tenemos la ecuación de la tangente en $(a, f(a))$: $\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$ ■

3. Interpretación cinemática de la derivada

La derivada de la función que da el espacio recorrido por un móvil en función del tiempo transcurrido es la velocidad instantánea de dicho móvil. La derivada de la función que nos da la velocidad del móvil en función del tiempo es la aceleración instantánea de dicho móvil.

En efecto, si llamamos x al tiempo, y al espacio recorrido por el móvil en función del tiempo, supongamos que conocemos una función que nos da el espacio recorrido y en cada instante x: $y = f(x)$. Si medimos el espacio recorrido, desde el inicio del movimiento, en el instante $x = a$, obtendremos que vale $f(a)$. Si volvemos a hacerlo en otro instante $x = a + t$, habrá recorrido un espacio igual a $f(a + t)$. Así, el intervalo de tiempo transcurrido es t, y el espacio recorrido en dicho intervalo es $f(a + t) - f(a)$. Por tanto, la velocidad media en dicho intervalo de tiempo será:

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

Si reducimos el tiempo de medición, hasta el límite, es decir, hacemos tender $t \to 0$, dicho cociente tiende a ser la velocidad en el instante inicial a. Es decir que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

es la *velocidad instantánea* en el momento a. Pero el valor de dicho límite es $f'(a)$. ■

4. Función derivada

Definición 4: Se define la función derivada de f como la función que a cada valor de x le hace corresponder el valor de la *derivada* de f en dicho punto: $f'(x)$ (que es un número, si existe, resultado de un límite, como se definió al principio). Es decir:

$$f': x \to f'(x)$$

Observar que construir una tabla de valores de la función derivada de f es una tarea engorrosa, puesto que para hallar la imagen de cada valor de x hay que resolver un límite del tipo de la definición 1. Sin embargo, una serie de teoremas permite averiguar una fórmula para la función derivada partiendo del tipo de fórmula que tenga la función original f. Estos teoremas se resumen en la llamada ***Tabla de Derivadas***.

El conjunto de puntos donde la función f es *derivable* coincide con el *dominio* de la función f'. Es decir, *si queremos averiguar dónde es derivable una función f, basta hallar su derivada, por las reglas de la tabla de derivadas, y hallar el dominio de la función resultante*.

Puede construirse la función derivada de f', obteniéndose así la función derivada segunda $f''(x)$. Análogamente podríamos plantearnos las funciones derivadas sucesivas (tercera, cuarta,..., n-ésima).

5. Continuidad y derivabilidad

Derivamos las funciones elementales aplicando los teoremas de la *Tabla de Derivadas*. Pero las **funciones definidas a trozos no son elementales**. Entonces, ante una función definida a trozos procedemos como sigue.

Como sabemos que si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en él, **antes de estudiar la derivabilidad hay que asegurarse de que la función es continua. Donde no lo sea, no es derivable**. Hay que hacerlo aunque no nos pidan la continuidad.

Para derivar una **función definida a trozos**, se deriva cada una de las fórmulas que la componen, pero limitando su validez a la misma zona con *desigualdades estrictas* (los $\leq$ se cambian por $<$, y los $\geq$ por $>$), porque **las fórmulas de la Tabla de Derivadas son válidas sólo en intervalos abiertos**.
Después hay que estudiar los puntos de conexión de definiciones. *Si* la derivada por la izquierda y por la derecha coinciden: $f'(a^-) = f'(a^+)$, *la función es derivable en el punto de conexión, y entonces cambiamos* uno *de los dos* $<$ *por* $\leq$ *en la expresión obtenida de la derivada de* f (el punto a, al ser conexión de dos definiciones, aparece dos veces). **Pero si en algún punto no era continua la función, en ese punto no es derivable, y no hay que realizar ningún estudio sobre el mismo.**