# LÍMITES DE FUNCIONES

# LÍMITES DE FUNCIONES

## *1.- INTRODUCCIÓN A LOS LÍMITES.*

De ordinario hablamos de la velocidad límite o instantánea, el límite de nuestra propia resistencia, los límites de la tecnología moderna o de estirar un muelle al límite. Todas estas frases sugieren que el límite es una especie de cota que a veces puede no ser alcanzable y otras no sólo alcanzable sino superable.

Aunque la noción de límite toma su forma más sencilla cuando se aplica a las sucesiones, eso no significa, en manera alguna, que su aplicación está restringida a las sucesiones. Por ejemplo cuando se tañe una campana, la presión del aire circundante variará con el tiempo como se representa " a grosso modo" en el siguiente diagrama:

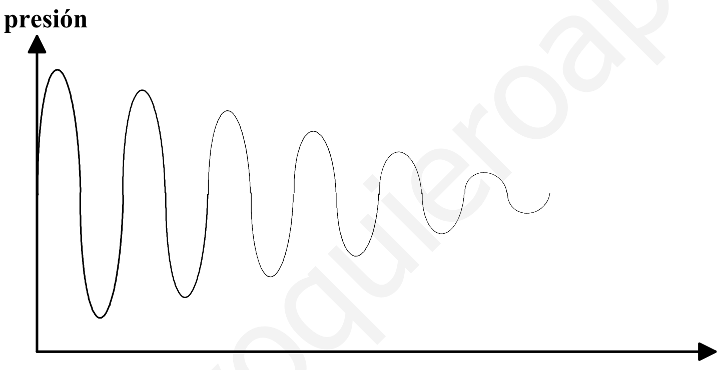


***figura 1***

La amplitud de las oscilaciones va decreciendo lentamente con el tiempo, de manera que, pasado cierto tiempo, la presión es aproximadamente constante e igual a la presión atmosférica.

Esta gráfica es cualitativamente semejante a la gráfica de una sucesión convergente (vista en el tema anterior) y, por tanto, es razonable suponer que podemos utilizar aquí las ideas de convergencia y límite.

### ➢ 1.1 Definición intuitiva de límite.

**◻ *DEFINICIÓN 1 :***

*Si y = f(x) es una función real y L es un número, entonces "L es el límite de f para números grandes de su dominio" es equivalente a la proposición "siempre que x sea suficientemente grande, f(x) es una excelente aproximación de L".*

Hay otras maneras de aplicar el concepto de límite a las funciones, y no siempre la analogía con los límites de las sucesiones es tan evidente.

### ◻ *DEFINICIÓN 2:*

*Si y = f(x) es una función real y a y L son números reales, entonces "L es el límite de f(x) cerca de a" es equivalente a la proposición "si x está muy cerca de a, pero no es igual a a, entonces f(x) está muy cerca de L".*

### ◻ *DEFINICIÓN 3:*

*Si y = f(x) es una función real y a es un número real, entonces " +∞es el límite de f(x) cerca de a" es equivalente a la proposición " si x está muy cerca de a, pero no es igual a a, entonces f(x) se hace todo lo grande que queramos"*

Estudiaremos distintos ejemplos que nos ilustren estas ideas y nos permitan comprender la definición rigurosa de límite de una función.

### ◻ *EJEMPLO 1:*

Supongamos que se nos pide dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{(x^2+x+1).(x-1)}{x-1}, \quad x \neq 1$$

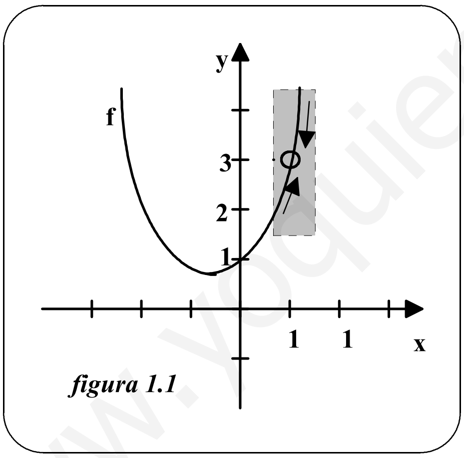


*figura 1.1*

Para todo punto $x \neq 1$podemos usar las técnicas estándar, pero en el punto x = 1 no estamos seguros de qué podemos esperar. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica de *f* cerca de *x* = 1, podríamos usar dos sucesiones de valores *x*, una que se aproxime a 1 por la izquierda (convergente a 1 por valores más pequeños que 1) y otra por la derecha. La tabla muestra los correspondientes valores de *f(x)*:

| | **x se acerca a 1 por la izquierda ➔** | | | | | **🡐 x se acerca a 1 por la derecha** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 0'5 | 0'75 | 0'9 | 0'99 | 0'999 | 1 | 1'001 | 1'01 | 1'1 | 1'25 | 1'5 |
| *f(x)* | 1'750 | 2'313 | 2'710 | 2'970 | 2'997 | ? | 3'003 | 3'030 | 3'310 | 3'813 | 4'750 |
| | **f(x) se acerca al 3 ➔** | | | | | **🡐 f(x) se acerca al 3** | | | | | |

Al marcar estos puntos, se ve que la gráfica de *f* es una parábola con un hueco en el punto (1,3). (*figura 1.1*). Aunque *x* no puede ser igual a 1, podemos acercarnos cuanto queramos a 1 y como resultado *f/x)* se aproxima cuanto queramos al valor 3. Usando la notación de límites, *decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 3,* y lo denotamos como

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

## EJEMPLO 2:

Evaluaremos $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ en varios puntos próximos al x = 0 y usaremos el resultado para estimar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

La gráfica de *f* puede verse en la *figura 1.2*.

La tabla siguiente muestra los valores de *f(x)* en varios *x* cercanos al 0:

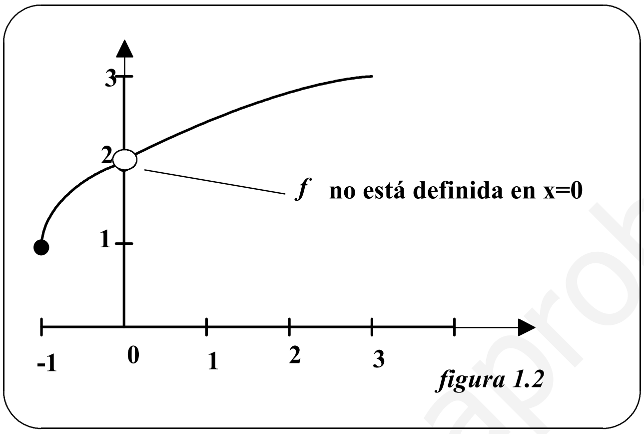



*figura 1.2*

| | x se acerca al 0 por la izquierda ➔ | | | | | ← x se acerca al 0 por la derecha | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | -0'1 | -0'01 | -0'001 | -0'0001 | 0 | 0'0001 | 0'001 | 0'01 | 0'1 |
| *f(x)* | 1'9487 | 1'9950 | 1'9995 | 1'9999 | ? | 2'0001 | 2'0005 | 2'0050 | 2'0488 |
| | f(x) se acerca al 2 ➔ | | | | | ← f(x) se acerca al 2 | | | |

De donde estimamos que el límite es 2. En este ejemplo, pese a que *f(x)* no está definida en *x = 0*, parece tender a un límite cuando $x \to 0$. Esto ocurre a menudo y es importante darse cuenta de que al estar o no definido el valor de *f(x)* en *x = a*, no tienen nada que ver con el hecho de que exista o no límite de *f(x)* cuando *x* tiende hacia *a*.

## EJEMPLO 3:

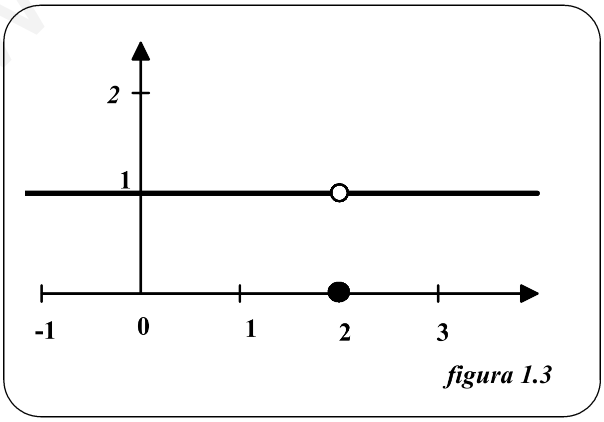



*figura 1.3*

Hallaremos el límite cuando *x* tiende a 2 de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 2 \\ 0, x = 2 \end{cases}$$

Como *f(x)* = 1 en todo $x \neq 2$y el valor *f(2)* no importa concluimos que el límite es 1

(véase *figura 1.3)*

## *EJEMPLO 4:*

Intentaremos probar que el siguiente límite no existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

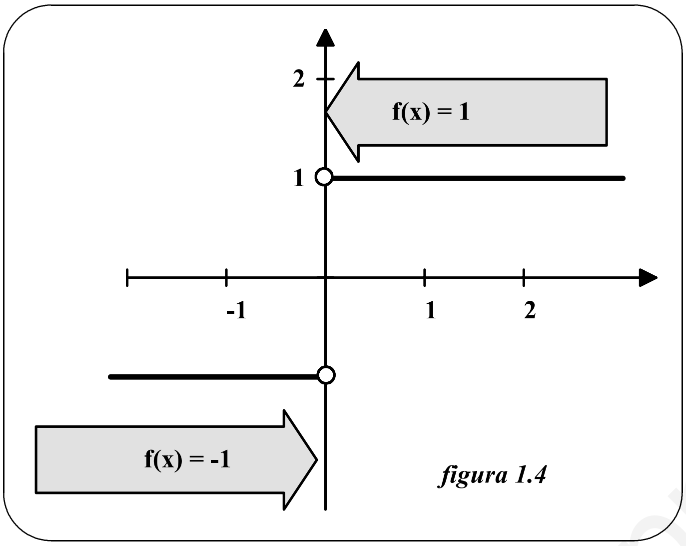
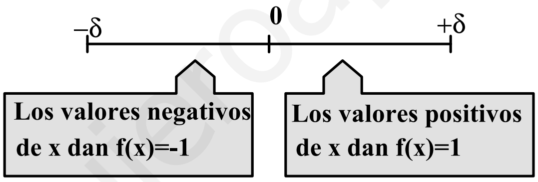


*figura 1.4*

Sea $f(x)=\frac{|x|}{x}$ la función cuya gráfica aparece en la *figura 1.4*. Podemos ver que para $x>0$, la función toma el valor 1, y para $x<0$, la función toma el valor -1. Concretamente si $\delta$ es un número positivo, para los $x$ que cumplen $0<|x|<\delta$, podemos clasificar los valores de $f(x)$ como sigue:




Esto implica que no existe límite.

## *EJEMPLO 5:*

Discutiremos la existencia del límite siguiente: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

De la *figura 1.5* vemos que cuando $x$ se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda, $f(x)$ crece sin tope. O sea, que escogiendo $x$ suficientemente próximo a 0 podemos obligar a que $f(x)$ crezca cuanto queramos. En efecto, observemos la tabla siguiente:

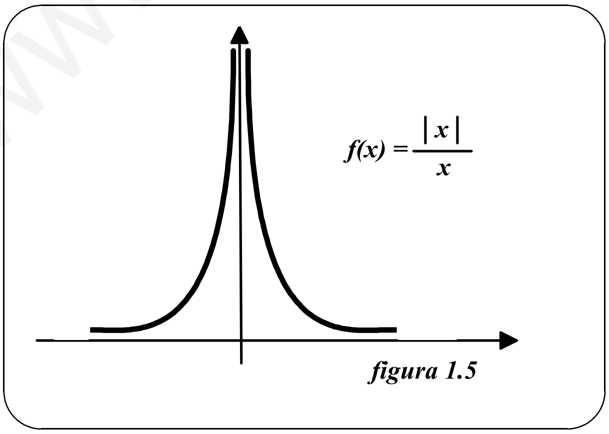


*figura 1.5*

| x se acerca al 0 por la izquierda ➔ | | | | | ← x se acerca al 0 por la derecha | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | -0'1 | -0'01 | -0'001 | -0'0001 | 0 | 0'0001 | 0'001 | 0'01 | 0'1 |
| *f(x)* | 100 | $10^4$ | $10^6$ | $10^8$ | ? | $10^8$ | $10^6$ | $10^4$ | 100 |
| **f(x) se acerca al + ∞ ➔** | | | | | **← f(x) se acerca al + ∞** | | | | |

Así, *f(x)* será mayor que 100 si elegimos *x* distante de 0 menos de 0'1. Es decir,

$$0 < |x| < 0'1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100$$

Análogamente, podemos hacer que *f(x)* sea mayor que 1.000.000, como sigue:

$$0 < |x| < 0'001 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 1.000.000$$

En este caso decimos que el límite de la función es +∞ cuando *x* se acerca a 0: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

## □ *EJEMPLO 6:*

Discutiremos la existencia del siguiente límite: $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$.

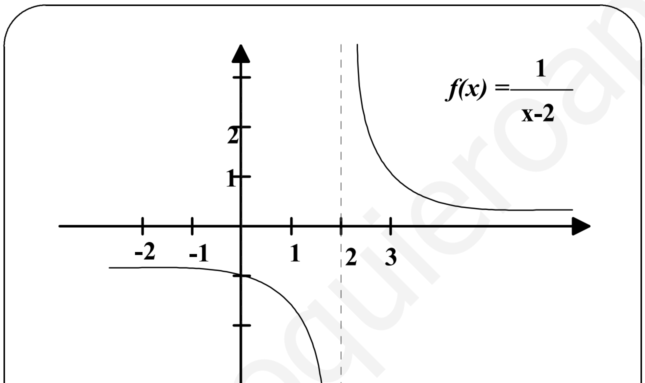


*figura 1.6*

En la figura se observa que según se aproxime *x* a 2 por la derecha o por la izquierda , los valores correspondientes de *f(x)* crecen o decrecen sin tope. En efecto, observa la siguiente tabla:

| x se acerca al 2 por la izquierda ➔ | | | | | ← x se acerca al 2 por la derecha | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1'9 | 1'99 | 1'999 | 1'9999 | 0 | 2'0001 | 2'001 | 2'01 | 2'1 |
| *f(x)* | -10 | -100 | -1.000 | -10.000 | ? | 10.000 | 1.000 | 100 | 10 |
| **f(x) se acerca al - ∞ ➔** | | | | | **← f(x) se acerca al + ∞** | | | | |

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso diremos que la función no tiene límite cuando *x* se aproxima a 2, puesto que por la derecha los valores de la función se hacen todo lo grandes que queramos, pero por la izquierda se hacen todo lo pequeños que queramos.

## *2.- DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE.*

### ➢ 2.1 Límites reales.

#### ▱ *DEFINICIÓN 1:*

*Diremos que la función f(x) tiene por límite el número real L cuando x se aproxima hacia a, y se escribe* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *si y solo si para cada sucesión* $\{x_n\}$ *contenida en Domf -* $\{a\}$ *y convergente a "a" se tiene que la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *es convergente a L.*

Se puede demostrar que esta definición es equivalente a las siguientes:

▱ ***DEFINICIÓN 2:***

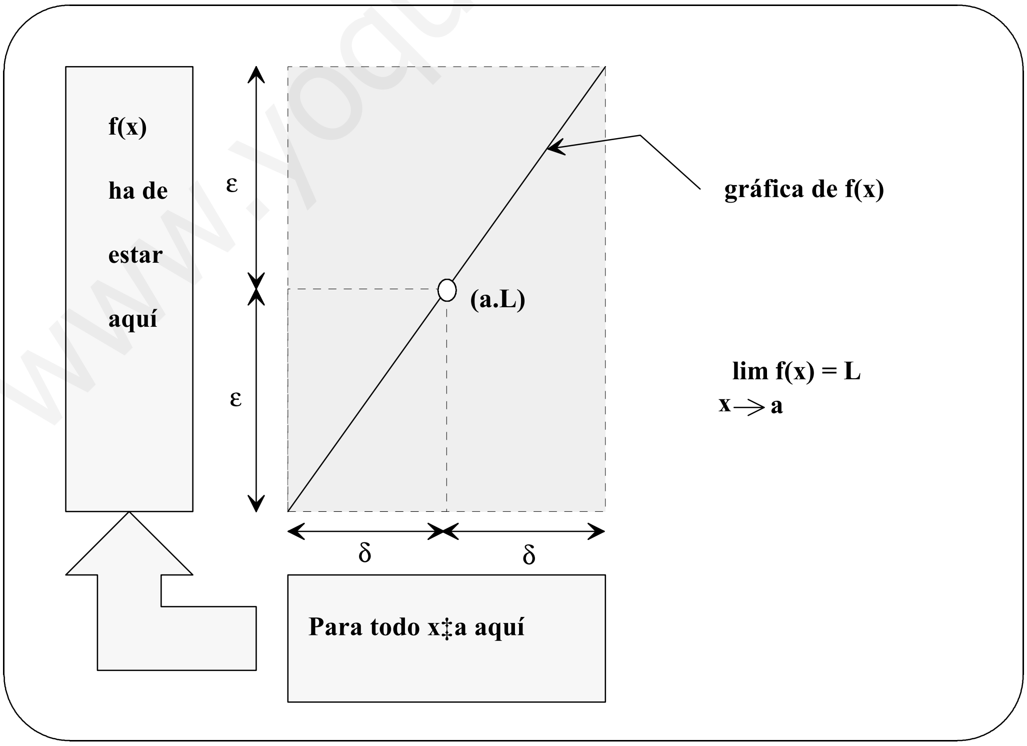
$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall V = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ *existe* $U = (a-\delta, a+\delta)$ *tal que las imágenes del conjunto* $U \cap Domf - \{a\}$ *están contenidas en V, es decir:*

$$\forall V = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)_{\text{ existe }} U = (a-\delta, a+\delta)_{\text{ tal que si }} \begin{cases} x \in U \cap Domf \\ x \neq a \end{cases} {}_{\text{entonces}} f(x) \in V.$$

▱ ***DEFINICIÓN 3:***

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0_{\text{ tal que si}} \begin{cases} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in Domf \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$



***EJEMPLO 1:***

Dado el límite $\lim_{x \to 3} (2x-5) = 1$ hallar δ tal que $|2x-5-1| < 0'01$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

*SOLUCIÓN: Tenemos* $\varepsilon$ *dado, a saber* $\varepsilon$*= 0'01. Para hallar un* $\delta$ *apropiado, intentaremos establecer una relación entre los dos valores absolutos* $|2x-5-1|$ *y* $|x-3|$. *Simplificando el primero, obtenemos*

$$|2x-5-1| = |2x-6| = 2 \cdot |x-3|$$

*Así pues, la desigualdad* $|2x-5-1| < 0'01$ *equivale a* $2.|x-3| < 0'01$, *y se tiene*

$$|x-3| < \tfrac{0'01}{2} = 0'005$$

*Por tanto, elegimos* $\delta$ *= 0'005. Esta elección es adecuada, porque* $0 < |x-3| < 0'005$ *implica que* $|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2.|x-3| < 2.0'005 = 0'01$ *como indica la figura (2.1).*

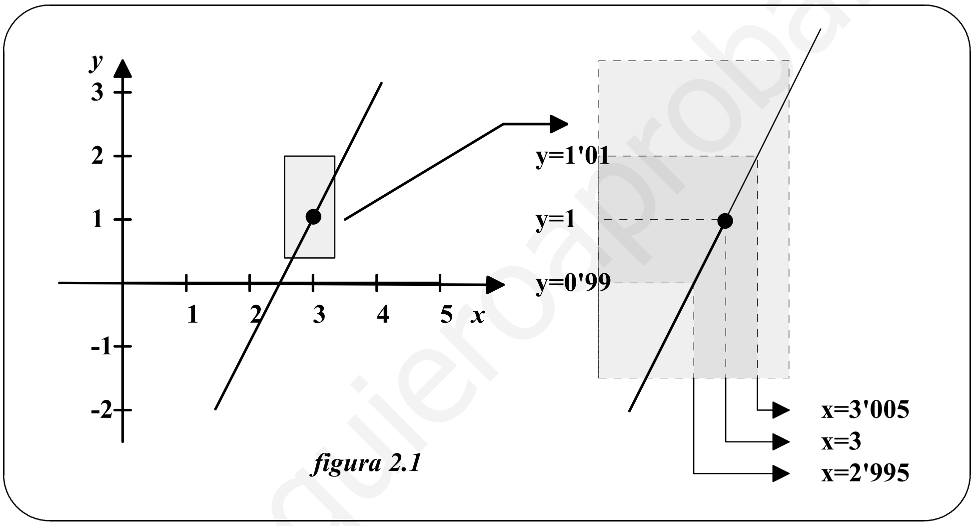



***figura 2.1***

## EJEMPLO 2:

Usando la definición de límite probar que $\lim_{x \to 2} (3x-2) = 4$

*SOLUCIÓN: Tenemos que probar que para cada* $\varepsilon$*>0, existe un* $\delta$*>0 tal que* $|3x-2-4| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |x-2| < \delta$. *Como nuestra elección de* $\delta$ *depende de* $\varepsilon$*, intentaremos establecer una conexión entre los valores absolutos* $|3x-6|$ *y* $|x-2|$. *Simplificando el primero obtenemos:* $|3x-6| = 3.|x-2|$. *Así que la desigualdad*

$$|3x-6| < \varepsilon \text{ exige que } 3.|x-2| < \varepsilon \text{ y tenemos que } |x-2| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ y escogemos } \delta = \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

*Esta elección es correcta, puesto que* $0 < |x-2| < \delta$ *implica que*

$$|3x-6| = 3.|x-2| < 3.\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

## ➢ 2.2 Propiedades de los límites.

Ya hemos dicho que el límite de *f(x)* cuando $x \to a$ no depende del valor de *f* en *x=a*. No obstante, si ocurre que el límite es precisamente *f(a)*, decimos que el límite puede evaluarse por **sustitución directa**. Es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con tan buen comportamiento se llaman **continuas en a** y estudiaremos detalladamente este concepto más adelante. Una aplicación interesante de la sustitución directa se ofrece en el siguiente teorema.

### ▫ *TEOREMA 1:*

*Sea "a" un número real y f(x) = g(x) para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto conteniendo al "a". Si existe el límite de g(x) cuando $x \to a$, entonces el límite de f(x) también existe y es*

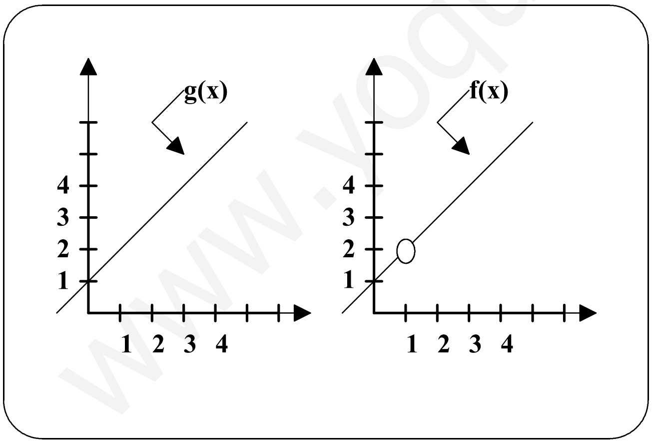
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

### ▫ *EJEMPLO:*

Podemos probar que las funciones $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x) = x+1$ tienen los mismos valores en todo $x \neq 1$ . En efecto:

$$Si \quad x \neq 1 \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x)$$

En la figura siguiente podemos ver que las gráficas de *f* y *g* son idénticas para $x \neq 1$.




Nótese que no hay salto en la gráfica de *g(x)* y que su límite cuando *x* tiende a 1 es simplemente

$$\lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Así pues, aplicando el teorema anterior se deduce que el límite de *f(x)* cuando $x \to 1$ es también 2.

## ➢ 2.3 Estrategias para calcular límites.

1. Aprende a reconocer los límites calculables por sustitución directa.
2. Si el límite de *f(x)* cuando $x \to a$ *no puede* evaluarse por sustitución directa, intenta hallar una función *g* que coincida con *f* en todo $x \neq a$(elegir *g* de modo que su límite *sea calculable* por sustitución directa)
3. Aplicando el teorema 1, deducir que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Dedicamos el resto del apartado 2.3 al estudio de límites calculables por sustitución directa. Más adelante trataremos el caso en que esta técnica falle.

## LÍMITES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS.

- ***TEOREMA 2:***

*Si b y a son números reales y n un entero (positivo si a=0), entonces se cumple:*

***1.*** $\lim_{x\to a} b = b$; ***2.*** $\lim_{x\to a} x = a$; ***3.*** $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

- ***TEOREMA 3:***

*Si b y a son números reales y n un entero positivo y f, g funciones que tienen límite cuando x→ a entonces son ciertas las propiedades siguientes:*

***1.*** $\lim_{x\to a} [b.f(x)] = b\cdot\lim_{x\to a} f(x)$

***2.*** $\lim_{x\to a} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

***3.*** $\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$

***4.*** $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *si* $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

***5.*** $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

- ***TEOREMA 4:***

*Si p(x) es un polinomio y a es un número real, entonces* $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$

- ***TEOREMA 5:***

*Si r(x) es una función racional dada por* $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ *y a es un número real tal que q(a)≠0, entonces* $\lim_{x\to a} r(x) = r(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$.

- ***TEOREMA 6:***

*Si a es un número real, n y m enteros positivos*, y f una función cuyo límite en a existe, entonces son ciertas las siguientes propiedades:*

***1.*** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

***2.*** $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

***3.*** $\lim_{x\to a} x^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

***4.*** $\lim_{x\to a} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{m}{n}}$

*(* ) Si n es par, supondremos que a>0 y* $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.

**EJEMPLOS:**

***1.*** $\lim_{x\to 2} 3 = 3;$ ***2.*** $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

***3.*** $\lim_{x\to 3} (4x^2 - 2x + 5) = 4.3^2 - 2.3 + 5 = 35$

***4.*** $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1^2+1+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

***5.*** $\lim_{x\to 3} \sqrt{2x^2-2} = \sqrt{\lim_{x\to 3} 2x^2-2} = \sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4$

## 2.4 Técnicas para calcular límites.

En el apartado 2.3 hemos catalogado varios tipos de límites calculables por *sustitución directa*. Ahora presentaremos técnicas para reducir otros límites a esa forma.

### TÉCNICA DE CANCELACIÓN

Si pretendemos calcular el límite cuando $x \to -3$ de la función $\frac{x^2+x-6}{x+3}$, pese a ser una función racional, no puede aplicarse el *Teorema 5* porque el límite del denominador es cero. Sin embargo ya que el límite del numerador también es cero, sabemos que el numerador y el denominador tienen *el factor común* (x + 3). Así que para todo $x \neq -3$, podemos cancelar tal factor para obtener

$$\frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{(x+3).(x-2)}{(x+3)} = x - 2$$

Finalmente por el *Teorema 1*, se sigue que:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-2) = -5$$

En este ejemplo, la sustitución directa conducía a la expresión indefinida $\frac{0}{0}$, que llamaremos una **forma indeterminada** por cuanto no podemos (a partir sólo de esa expresión) calcular su límite. Cuando se intenta evaluar un límite y uno se topa con esta forma, debe modificarse la fracción de manera tal que el nuevo denominador no tenga límite cero. Una manera de lograrlo es *cancelando factores iguales* (ejemplo anterior). Otra consiste en *racionalizar el numerador o el denominador* (ejemplo siguiente).

### CÁLCULO DE UN LÍMITE POR RACIONALIZACIÓN

La sustitución directa en el cálculo de $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nos lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En este caso, cambiamos la forma de la fracción racionalizando el numerador:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1).(\sqrt{x+1}+1)}{x.(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(x+1)-1}{x.(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x.(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

La tabla siguiente refuerza nuestra conclusión de que el límite es 1/2.

| x tiende a 0 por la izquierda ➔ | | | | | ← x tiende a 0 por la derecha | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | -0'25 | -0'1 | -0'01 | -0'001 | 0 | 0'001 | 0'01 | 0'1 | 0'25 |
| *f(x)* | 0'5359 | 0'5132 | 0'5013 | 0'5001 | ? | 0'4999 | 0'4988 | 0'4881 | 0'4721 |
| f(x) tiende a 1/2 ➔ | | | | | ← f(x) tiende a 1/2 | | | | |

## *3.- CONTINUIDAD Y LÍMITES LATERALES.*

El término *continuo* tiene el mismo sentido en matemáticas que en el lenguaje cotidiano. Decir que una función *f* es continua en $x = c$ significa que su gráfica no sufre interrupción en *c*, que ni se rompe ni tiene saltos o huecos. Por ejemplo, la *Figura 3.1* muestra tres valores de *x* ($c_1$, $c_2$ y $c_3$) en los que *f* no es continua. En los demás puntos del intervalo (*a, b*) la gráfica no se interrumpe y decimos que *f* es continua en ellos. Así pues, la continuidad de una función en $x = c$ se destruye por alguna de estas causas:

1. La función no está definida en *c*.
2. El límite de *f(x)* en $x = c$ no existe.
3. El límite de *f(x)* en $x = c$ existe, pero no coincide con *f(c)*.

Todo ello conduce a la siguiente definición:

### ◻ *DEFINICIÓN 1:*

***Continuidad en un punto:*** *Una función f se dice* ***continua en c*** *si se verifican las siguientes condiciones:*

***1.*** *f(c) está definido.* ***2.*** $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe.* ***3.*** $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

***Continuidad en un intervalo abierto:*** *Una función f se dice* ***continua en un intervalo (a,b)*** *si lo es en todos los puntos de ese intervalo.*

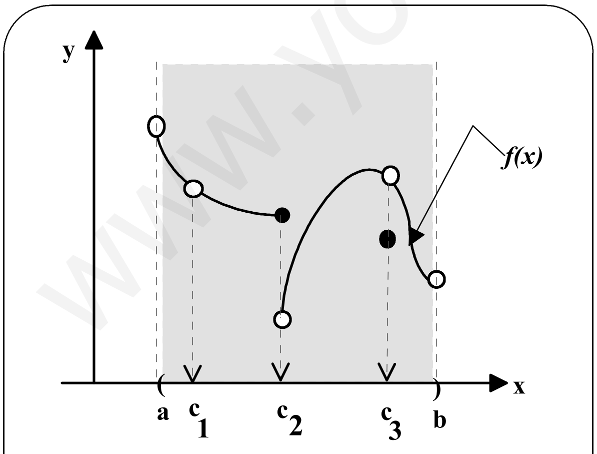



*Figura 3.1*

*Se dice que una función f es* ***discontinua en c*** *si f está definida en un intervalo abierto que contiene ac (excepto quizás en c) y f no es continua en c. Las discontinuidades pueden ser de dos tipos fundamentales:* ***evitables*** *e* ***inevitables.*** *Se dice que una discontinuidad en $x = c$ es evitable si f puede hacerse continua redefiniéndola en $x = c$. Así, en la Figura 3.1 la función tiene dos discontinuidades evitables ($c_1$ y $c_3$) y una inevitable en $c_2$.*
(Nota: Más adelante daremos una clasificación más precisa de las discontinuidades.)

### ☐ EJEMPLOS:

***1.*** *La función* $f(x) = \frac{1}{x}$ *en el intervalo (0,1) es racional con denominador no nulo en dicho intervalo, luego por el teorema* 5 *del apartado anterior concluimos que f es continua en (0,1).*

***2.*** *La función* $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ *en el intervalo (0,2) no está definida en x=1, luego es discontinua en x=1 y continua en el resto del intervalo (0,2).*

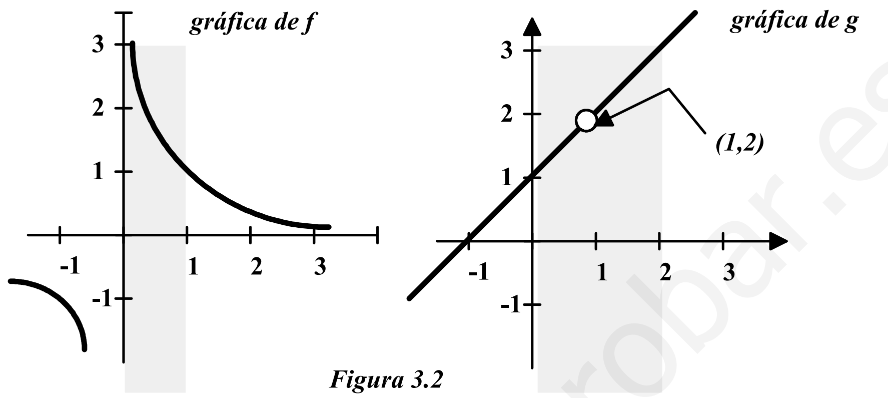



***Figura 3.2***

Los intervalos de los ejemplos anteriores eran abiertos. Para discutir la continuidad en intervalos cerrados, necesitamos los **límites laterales.** Por ejemplo, cuando hablamos de límite por la derecha queremos decir que $x$ tiende a $c$ desde valores mayores que $c$. Denotamos esto por

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \text{(límite por la derecha)}$$

Análogamente, el límite por la izquierda significa que $x$ tiende a $c$ desde valores menores que $c$. Lo denotamos por

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \text{(Límite por la izquierda)}$$

### ☐ DEFINICIÓN 2:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad tal \quad que \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 < x - c < \delta \\ x \in Domf \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

### ☐ DEFINICIÓN 3:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad tal \quad que \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 < c - x < \delta \\ x \in Domf \end{array} \right. \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

### ☐ TEOREMA 7:

*Si f es una función y c, L números reales, entonces* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si se verifica que $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ .

Los límites laterales son útiles al tratar funciones con radicales, funciones escalonadas y en el estudio de la continuidad como veremos en los siguientes ejemplos.

### ☐ *EJEMPLOS:*

***1.*** *Consideremos la función* $f(x) = \sqrt{3-x}$ *cuyo dominio son los números reales menores o iguales que 3. Puesto que no está definida para los números mayores que 3, calcularemos el límite cuando x tiende a 3 por la izquierda. Como se puede observar en la figura 3.3, dicho límite viene dado por* $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 0.$

***2.*** *La función* ***parte entera*** **[x]** *viene definida por*

[x] = mayor entero $n$ tal que $n \le x$.

*Hallaremos su límite cuando x tiende a 0 por ambos lados. En la figura 3.4 podemos ver que los límites laterales son*

$$\lim_{x\to 0^+} [x] = 0 \quad y \quad \lim_{x\to 0^-} [x] = -1$$

*y que por lo tanto la función parte entera es discontinua en x=0 (y en todos los enteros). La causa es que los límites laterales son distintos entre sí. En tales casos decimos que el límite* ***no existe.***

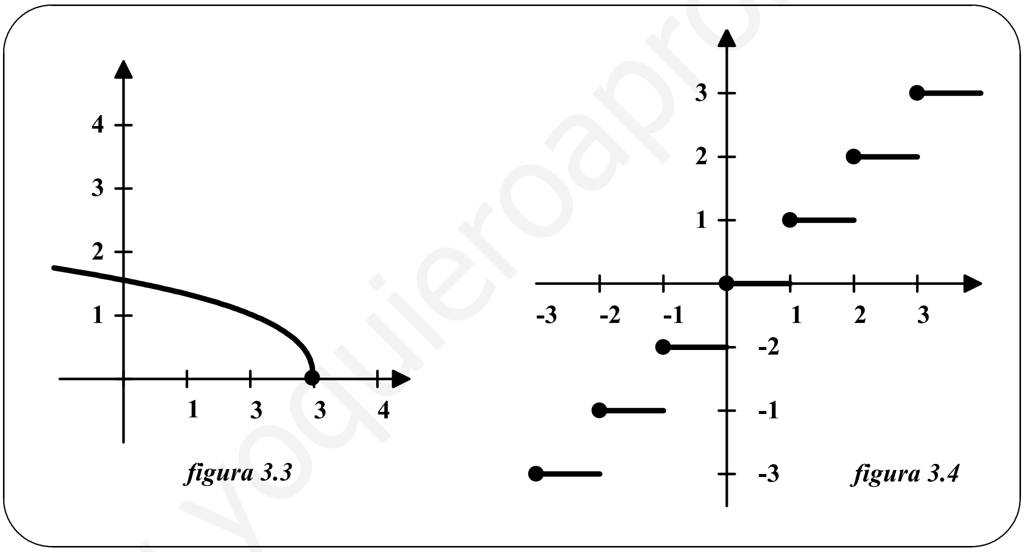



***figura 3.3*** ***figura 3.4***



Ahora que hemos definido los límites laterales ya podemos definir la continuidad en intervalos cerrados.

### ☐ *DEFINICIÓN 4:*

*Si f está definida en un intervalo cerrado* $[a,b]$, *es continua en* $(a,b)$ *y además verifica que* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *y* $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ *se dice que* ***f es continua en [a,b].***

### ☐ *EJEMPLO:*

Para estudiar la continuidad de $g(x) = \begin{cases} 5-x, & -1 \le x \le 2 \\ x^2-1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ en [-1,3] debemos comprobar si se verifica la definición anterior.

Por el *Teorema 4* sabemos que los polinomios *5 - x* y $x^2$- *1* son continuos para todo real *x*. Luego para ver si g es continua en [-1,3] basta estudiar el comportamiento de *g* en *x = 2.* Tomando límites laterales para *x = 2*, vemos que

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (5-x) = 3$$

$$\text{y} \lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-1) = 3$$

Como estos dos límites coinciden, el *Teorema 7* permite concluir que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3$$

Además, como *g(2) = 3*, se deduce que *g* es continua en *x = 2*, y en consecuencia en el intervalo [-1,3]. La gráfica de *g* se presenta en la figura 3.5.

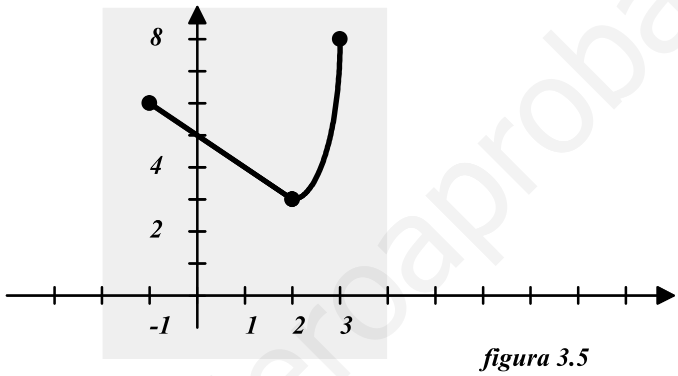



***figura 3.5***

### ☐ *DEFINICIÓN 5:*

***1.*** *f es continua por la derecha en c ⇔* $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

***2.*** *f es continua por la izquierda en c ⇔* $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

### ☐ *TEOREMA 8:*

*f continua en c ⇔ f continua por la derecha y por la izquierda en c.*

### ☐ *TEOREMA 9: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS*

*Si b es un número real y f, g continuas en x = c, también son continuas en c las funciones:*

***1.*** *(b.f)* ***2.*** *(f ± g)* ***3.*** *(f.g)* ***4.*** $\frac{f}{g}$, *si* $g(c) \neq 0$

## *4.- LÍMITES INFINITOS.*

### ➢ 4.1 Límites infinitos.

Vamos a ver otra manera en que la existencia de límite puede fallar: si la función tiene una discontinuidad infinita. Comencemos con un ejemplo.

### ◻ *EJEMPLO 1:*

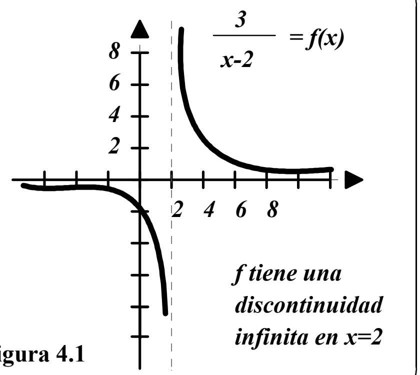



figura 4.1

Sea $f(x)=\frac{3}{x-2}$ . De la figura 4.1 y la tabla siguiente, vemos que *f decrece sin cota* cuando *x* tiende a 2 por la izquierda y *crece sin cota* cuando *x* tiende a 2 por la derecha. Escribiremos simbólicamente

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=-\infty \quad y \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2}=+\infty$$

| x se acerca al 2 por la izquierda ➔ | | | | | | ← x se acerca al 2 por la derecha | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 1'5 | 1'9 | 1'99 | 1'999 | 2 | 2'001 | 2'01 | 2'1 | 2'5 | 3'0 |
| *f(x)* | -3 | -6 | -30 | -300 | -3.000 | ? | 3.000 | 300 | 30 | 6 | 3 |
| f(x) decrece sin límite ➔ | | | | | | ← f(x) crece sin límite | | | | |

En este ejemplo, como los límites laterales son distintos, diremos que la función no tiene límite cuando *x* se acerca a 2.

### ◻ *DEFINICIÓN 1:*

***1.*** *La afirmación* $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ *significa que* $\forall K>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que si*
$$\left\{\begin{array}{l} 0<|x-c|<\delta \\ x\in Domf \end{array}\right. \Rightarrow f(x)>K.$$

***2.*** *La afirmación* $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ *significa que* $\forall N<0$ *existe* $\delta>0$ *tal que si*
$$\left\{\begin{array}{l} 0<|x-c|<\delta \\ x\in Domf \end{array}\right. \Rightarrow f(x)<N$$

La definición anterior se ilustra en la **figura 4.2.**

### ◻ *DEFINICIÓN 2:*

*Para definir el **límite infinito por la izquierda**, sustituimos*

$$0 < |x - c| < \delta \quad por \quad c - \delta < x < c$$

*y para definir el **límite infinito por la derecha**, sustituimos*

$$0 < |x - c| < \delta \quad por \quad c < x < c + \delta$$

### ▢ *DEFINICIÓN 3:*

*Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ por la izquierda o por la derecha, diremos que f tiene en c una **discontinuidad infinita.***

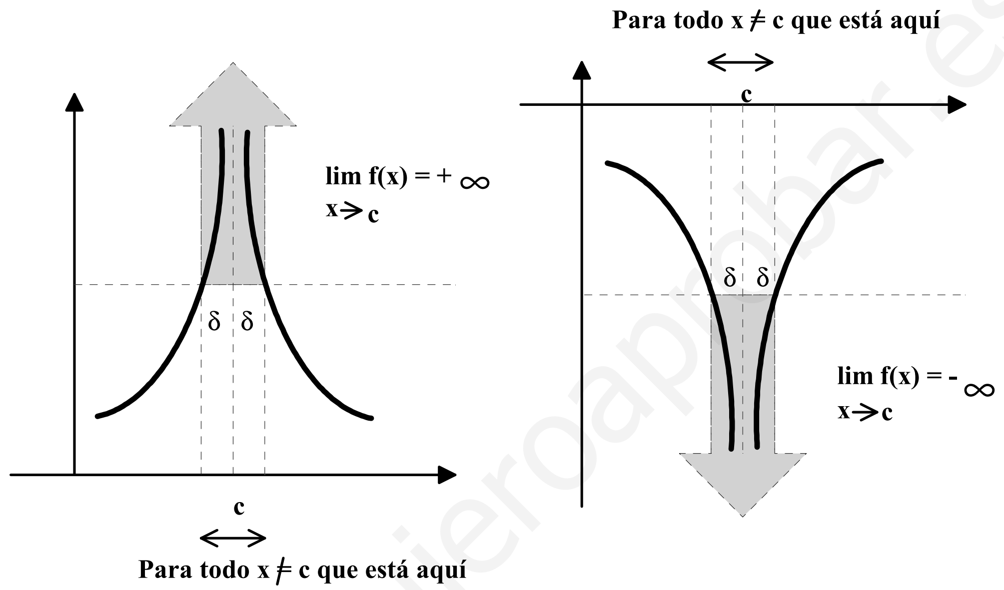



**Figura 4.2**

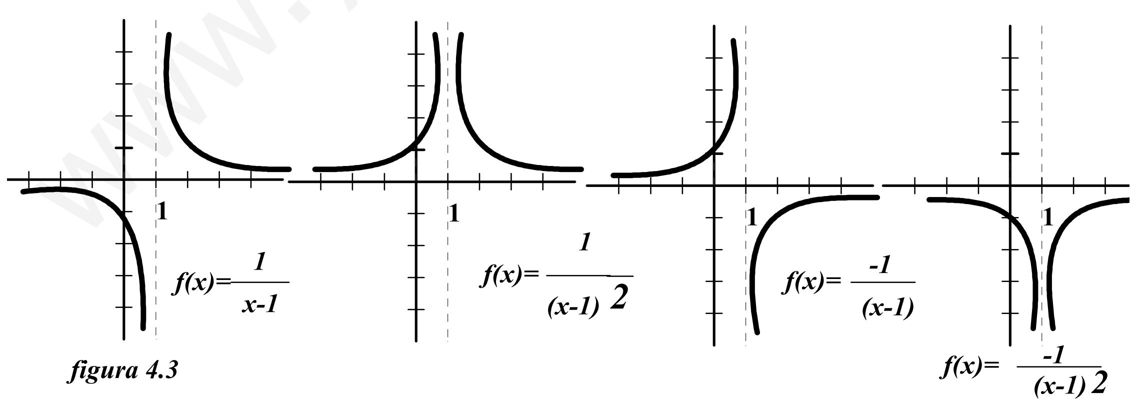



*figura 4.3*

### ▢ *EJEMPLO 2:*

Utilizando la figura 4.3 hallaremos el límite de cada función cuando $x$ se aproxima a 1 por ambos lados.

***(a)*** $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ *y* $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

***(b)*** $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$; *El límite por ambos lados es* $+\infty$.

***(c)*** $\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$ *y* $\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

***(d)*** $\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$; *El límite por ambos lados es* $-\infty$.

## ➢ 4.2 Asíntotas verticales.

Si fuese posible extender las gráficas de la *figura 4.3* hacia el infinito, veríamos que son más y más próximas a la recta vertical $x = 1$. Llamaremos a esta recta una **asíntota vertical** de la gráfica de $f$.

### ▢ *DEFINICIÓN 4:*

*Si f(x) tiende hacia* $+\infty$ *(o* $-\infty$*) cuando x tiende a c por la izquierda o por la derecha, diremos que la recta x = c es una* ***asíntota vertical*** *de la gráfica de f.*

En el *ejemplo 2*, nótese que cada función es un *cociente* y que la asíntota vertical ocurre en el punto donde el denominador es cero. El próximo teorema generaliza esta observación.

### ▢ *TEOREMA 1:*

*Sean f y g continuas en un intervalo abierto conteniendo a c. Si* $f(c) \neq 0$*, g(c)=0, y existe un intervalo abierto conteniendo a c tal que* $g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq c$ *en el intervalo, entonces la gráfica de la función dada por*

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

*tiene una asíntota vertical en x = c.*

### ▢ *EJEMPLO 3:*

Determina las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{2.(x+1)}$ ; (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

*SOLUCIÓN:*

(a) En el punto x = -1, el denominador es cero y el numerador no es cero. Luego por el *teorema 1* concluimos que x = -1 es una asíntota vertical.

(b) Factorizando el denominador como $x^2 - 1 = (x-1).(x+1)$, vemos que es cero en x = -1 y x= 1. Además, como el numerador no es cero en esos puntos, concluimos por el *teorema 1* que la gráfica de $f$ tiene dos asíntotas verticales.

El Teorema 1 exige que el valor del numerador y denominador en $x = c$ sea no nulo. Si ambos, numerador y denominador, son nulos en $x = c$, obtenemos **la forma indeterminada** $\frac{0}{0}$ y no podemos determinar el comportamiento límite en $x = c$ sin más estudio. Un caso en que sí podemos determinarlo es cuando numerador y denominador son polinomios. Y lo hacemos cancelando factores comunes.

### ☐ *EJEMPLO 4:*

Determinar todas las asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$.

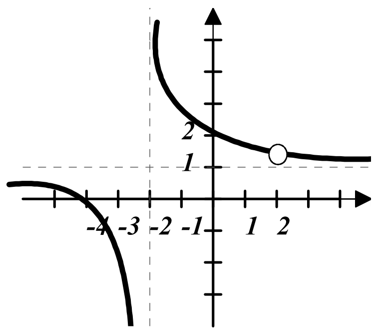



***Figura 4.4***

***Solución:*** Factorizando numerador y denominador obtenemos: $f(x) = \frac{(x+4).(x-2)}{(x+2).(x-2)}$, por lo que el dominio de la función es $R - \{+2, -2\}$. Salvo en $x = 2$ la gráfica de $f$ coincide con la de la función $g(x) = \frac{x+4}{x+2}$. Por tanto, por el *teorema 1* aplicado a $g$ se sigue que hay asíntota vertical en $x = -2$, como muestra la *figura 4.4.* Analíticamente, podemos comprobar que:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = +\infty \quad y$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = -\infty.$$

Además, en $x = 2$ la función *f(x)* presenta una discontinuidad evitable pues

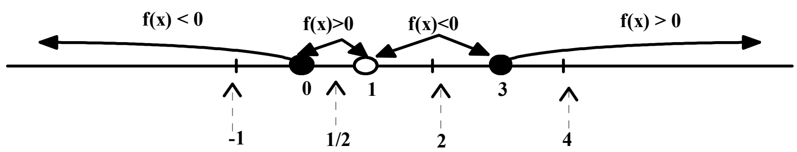
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x+4).(x-2)}{(x+2).(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

### ☐ *EJEMPLO 5:*

Hallaremos los límites: $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1}$ $y$ $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1}$

***Solución:*** **1.-** Factorizamos numerador y denominador $f(x) = \frac{x.(x-3)}{x-1}$.




| ***x*** | -1 | 0 | 1/2 | **1** | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***f(x)*** | -2 | 0 | 5/2 | **sin definir** | -2 | 0 | 4/3 |

**2.-** La gráfica de $f$ corta al eje OX en los puntos de abcisa: $x.(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad y \quad x = 3$.

**3.-** Si $x = 1$, el denominador se hace cero, por lo que $Dom f = R - \{1\}$ . En $x = 1$ la gráfica presenta una asíntota vertical.

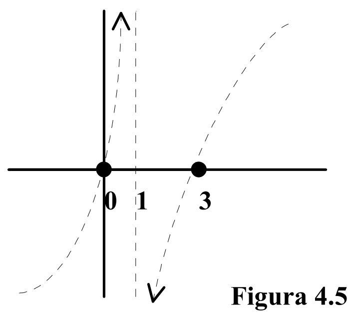



**Figura 4.5**

**4.-** Determinamos el signo de *f(x)* en su dominio escogiendo al menos un punto entre cada intersección y la asíntota. Anotamos la información obtenida en una tabla para realizar un esbozo de la gráfica, como muestra la *figura 4.5.*

**5.-** Finalmente, concluimos que:

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{x-1} = +\infty$ *y*
$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{x-1} = -\infty.$

## ➢ 4.2 Propiedades de los límite infinitos.

### ▢ *TEOREMA 2:*

*Si c, L son números reales y f, g son funciones tales que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to c} g(x) = L$$

*entonces las siguientes propiedades son válidas:*

***1.*** $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = +\infty$

***2.*** $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = +\infty, \quad L > 0$

$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty, \quad L < 0$

***3.*** $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

*Propiedades similares valen si* $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty.$

### ▢ *EJEMPLO 6:*

***(a)*** $\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ *pues* $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ *y* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ y en consecuencia podemos aplicar la propiedad 1 del teorema 2.

***(b)*** $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{\frac{1}{x-1}} = 0$ *pues* $\lim_{x\to 1^-} x^2+1 = 2$ *y* $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y en consecuencia podemos aplicar la propiedad 3 del teorema 2.

## ➢ 4.4 Tipos de discontinuidades.

- Recordemos que los puntos del dominio de una función donde ésta no sea continua se llaman puntos de discontinuidad de la función.
- **Clasificación de las discontinuidades:**

**EVITABLE** *si existe* $\lim_{x\to a} f(x) = L \in R$

**INEVITABLE**

**De primera especie** *si cumple una de las dos siguientes condiciones:*

***i)*** *existen los límites laterales de f(x) cuando x se aproxima a "a" y, son números reales distintos.*

***ii)*** *Existe* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ *o bien* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *o bien los límites laterales son infinito de distinto signo.*

**De segunda especie** *si no existe uno al menos de los límites laterales.*

## *5.- LÍMITES EN EL INFINITO.*

### ➢ 5.1 Límites en el infinito.

En este apartado analizaremos con más detalle el comportamiento de funciones en intervalos *infinitos.*

**☐ *EJEMPLO 1:***

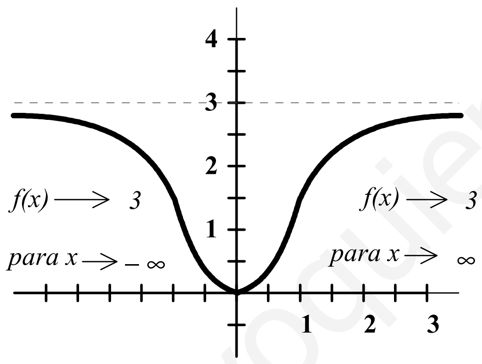



**Figura 5.1**

Consideremos la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$ que se muestra en la *figura 5.1*. La tabla sugiere que el valor de *f(x)* tiende a 3 cuando *x* crece sin cota ($x \to \infty$). Análogamente, *f(x)* tiende a 3 cuando *x* decrece sin cota ($x \to -\infty$). Denotaremos esos **límites en el infinito** por

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ *y*

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3.$

| ← **x decrece sin límite** | | | | | | **x crece sin límite** → | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | $-\infty$ ← | -100 | -10 | -1 | 0 | 1 | 10 | 100 | →$+\infty$ |
| *f(x)* | 3 ← | 2'9997 | 2'97 | 1'5 | 0 | 1'5 | 2'97 | 2'9997 | → 3 |
| ***f(x)*** **tiende hacia 3** | | | | | | ***f(x)*** **tiende hacia 3** | | | |

**☐ *DEFINICIÓN 1:***

***i)*** *La afirmación* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un M > 0 tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $x > M$.

***ii)*** *La afirmación* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ *significa que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un N<0 tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $x < N$.

Esta definición queda ilustrada en la *figura 5.2*.

## ➢ 5.2 Asíntotas horizontales.

En la mencionada figura se puede observar que la gráfica de *f* se acerca a la recta $y = L$. La llamaremos **asíntota horizontal** de *f.*

### ☐ DEFINICIÓN 2:

*Si* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ *o* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ *entonces la recta* $y = L$ *se llama una* ***asíntota horizontal*** *de la gráfica de f.*

**NOTA:** Es claro que la gráfica de una función de *x* puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales, una por la derecha y otra por la izquierda.

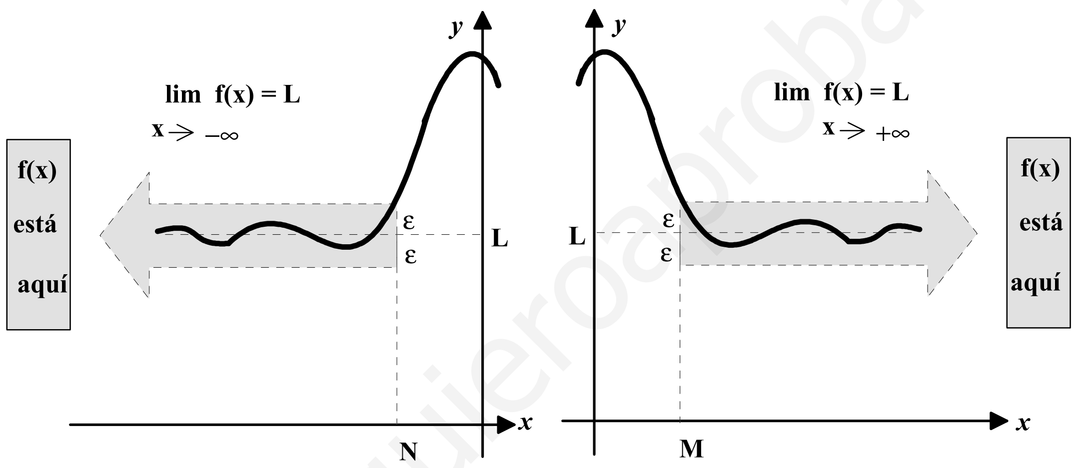



**Figura 5.2**

## ➢ 5.3 Propiedades de los límites en el infinito.

Las propiedades que enunciaremos a continuación para $x \to \infty$, son también válidas para $x \to -\infty$.

### ☐ TEOREMA 1:

*Si b es un número real, n entero > 0 y las funciones f, g tienen límites cuando* $x \to +\infty$, *las siguientes propiedades son válidas:*

***1.*** $\lim_{x\to \infty} b = b$

***2.*** $\lim_{x\to \infty} [b \cdot f(x)] = b \cdot \left[\lim_{x\to \infty} f(x)\right]$

***3.*** $\lim_{x\to \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to \infty} f(x) \pm \lim_{x\to \infty} g(x)$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

***4.*** $\lim_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x)$

***5.*** $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} \quad si \quad \lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$

***6.*** $\lim_{x\to\infty} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right]^n$

***7.*** $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to\infty} f(x)}$

## ***TEOREMA 2:***

*Si r es positivo y racional, y c cualquier número real, entonces* $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$

*Además, si* $x^r$ *está definido cuando x < 0, entonces* $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$

## ***EJEMPLOS:***

***1.*** Hallaremos $\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right)$. Utilizando el *Teorema 2* y las propiedades 1 y 3 del *Teorema 1*, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(5 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 5 - 0 = 5.$$

***2.*** Para calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1}$ no podemos aplicar el *Teorema 1* directamente, porque ni el numerador ni el denominador tienen límite real cuando $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} \begin{cases} \lim_{x\to\infty} (2x-1) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty \end{cases}$$

Sin embargo, sí podemos aplicarlo si dividimos antes numerador y denominador por *x*, con lo que se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Luego la recta *y = 2* es asíntota horizontal por la derecha. Tomando el límite $x \to -\infty$, podemos ver que *y = 2* es asíntota horizontal por la izquierda.

En el ejemplo 2, nuestra intención fue aplicar el *Teorema 1*, pero conducía a la **forma indeterminada** $\frac{\infty}{\infty}$. Pudimos solventar la dificultad expresando en una forma equivalente el cociente; en concreto, dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de *x*.

Aplicaremos el mismo método en los ejemplos siguientes:

## ***EJEMPLOS:***

***3.*** Para calcular el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x^2+1}$ dividimos numerador y denominador por $x^2$ y aplicando el *Teorema 1* obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = 0.$$

***4.*** En este caso, dividimos por $x^2$, con lo que resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

***5.*** En este último ejemplo, dividimos por $x^3$, con lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{2+0}{0+0} = \infty$$

Es interesante comparar las funciones de los ejemplos 3, 4 y 5. En el 3º el grado del numerador es *menor* que el del denominador y el límite de la función es cero. En el 4º los grados son *iguales* y el límite es sencillamente el cociente de los dos coeficientes principales 2 y 3. Por fin, en el 5º el grado del numerador es *mayor* que el del denominador y no existe límite real, el límite es $+\infty$. Esto parece razonable si nos damos cuenta de que para grandes valores de $x$ el término con mayor potencia de $x$ es el que domina. Por ejemplo, el límite, cuando $x$ tiende a infinito, de

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

es cero, puesto que el denominador excede en potencia al numerador. (*Figura* 5.3).

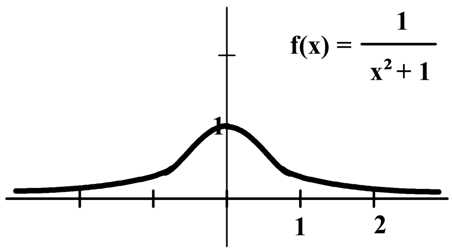


***Figura 5.3***

La función anterior es un caso especial de un tipo de curva estudiada por la italiana María Gaetana Agnesi (1.717-1783). En la figura podemos observar que *f(x)* tiende hacia la misma asíntota horizontal por la derecha y por la izquierda. Esto es,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Siempre ocurre así con las funciones racionales. Sin embargo, funciones no racionales pueden tener asíntotas horizontales distintas a izquierda y derecha, como ilustra el Ejemplo 6.

### □ *EJEMPLO 6:*

Calcular: ***(a)*** $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ ; ***(b)*** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

*SOLUCIÓN:* ***(a)*** Para aplicar el Teorema 1, dividimos numerador y denominador por $x$. Como $\sqrt{x^2} = x$ para $x > 0$, tenemos que

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{2+0}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2'12$$

***(b)*** Para $x \to -\infty$, *es* $x < 0$ *y* $x = -\sqrt{x^2}$. Luego,

$$\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3-0}{-\sqrt{2+0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \approx -2'12$$