CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. Contraste de hipótesis sobre la media poblacional

Se parte de una población supuestamente normal de media μ_0 y desviación típica σ: $N(\mu_0, \sigma)$; se tipifica mediante la normal $N(0, 1)$.

Si en esa población se hace un muestreo de tamaño n y se obtiene una media $\bar{x}$ distinta de μ_0, esa diferencia entre μ_0 y $\bar{x}$ puede suponerse que es debida al azar (**hipótesis nula, H_0**: $\mu = \mu_0$ $\to$ la media verdadera sigue siendo la misma) o, por el contrario, sospechar que la media poblacional ha cambiado (**hipótesis alternativa, H_1**: $\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$ o $\mu < \mu_0$ $\to$ la media real es distinta, es mayor o es menor que la supuesta hasta el momento).

El **contraste de hipótesis** es el instrumento que permite decidir si esas diferencias pueden interpretarse como simples fluctuaciones debidas al azar, o bien, son de tal importancia, que requieren una explicación distinta.

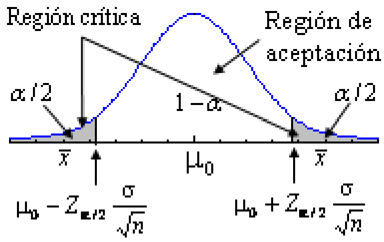
Ambas opciones se estiman con técnicas similares a las de intervalo de confianza. Como allí, las conclusiones se formularán en términos de probabilidad, pues, hay riesgo de error. Esto es, puede decidirse que no hay diferencias, habiéndolas; o, por el contrario, asegurar que las hay, sin haberlas. Dado que ambos errores pueden considerarse graves, estadísticamente hay que estar muy seguros de la afirmación que se hace. Por ello, la probabilidad con la que se opte por una u otra hipótesis debe ser grande, generalmente superior a 0,9. Esa probabilidad se denomina nivel de confianza, que se denota por $1 - \alpha$; el valor α es la significación del contraste.

Cuando en una población se hace un muestreo de tamaño n y se obtiene una media $\bar{x}$ distinta de μ_0, el contraste sobre la media μ puede adoptar una de las tres formas siguientes:

- **Contraste bilateral**

Se plantea cuando se sospecha que la media ha cambiado. Se formula como sigue:

Hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$
Hipótesis alternativa H_1: $\mu \neq \mu_0$



Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si

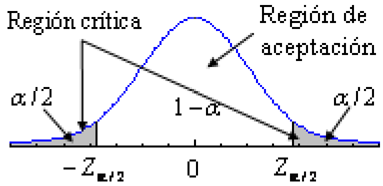
$$\bar{x} \notin \left(\mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

O sea, $\bar{x}$ está fuera del intervalo de confianza de μ_0.
Esto equivale a admitir que la media ha cambiado.

Si se tipifica, el intervalo de aceptación será $\left(-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2}\right)$,

siendo el estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Se rechaza H_0 cuando $Z \notin \left(-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2}\right)$.



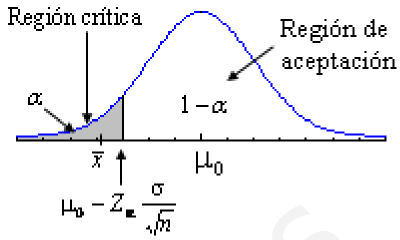
Observaciones:
1) Se rechaza H_0 cuando μ_0 queda dentro de la región crítica. No se rechaza en caso contrario.
2) Al rechazar H_0 se admite H_1, y viceversa.

- **Contraste unilateral izquierdo (cola izquierda)**

Se plantea cuando se sospecha que la media ha disminuido. Se formula como sigue:

Hipótesis nula H_0: $\mu \geq \mu_0$

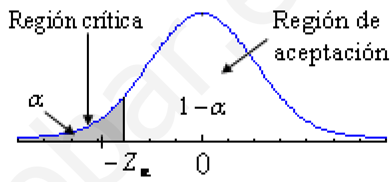
Hipótesis alternativa H_1: $\mu < \mu_0$



Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si

$$\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En este caso, el área α se toma íntegra en la cola izquierda de la campana.



<u>Si se tipifica</u>, la región de aceptación de H_0 es $(-Z_\alpha, +\infty)$.

Se rechaza H_0 cuando $Z < -Z_\alpha$.

Por tanto, la región de aceptación de H_1 es $(-\infty, -Z_\alpha)$.

El estadístico de contraste es $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

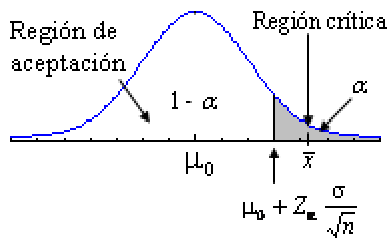
Puede observarse que $\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow Z_\alpha < \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

- **Contraste unilateral derecho (cola derecha)**

Se plantea cuando se sospecha que la media ha aumentado. Se formula como sigue:

Hipótesis nula H_0: $\mu \leq \mu_0$

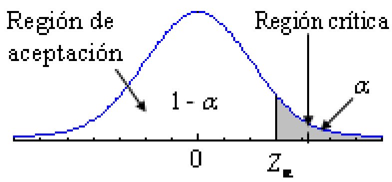
Hipótesis alternativa H_1: $\mu > \mu_0$



Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si

$$\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En este caso, el área α se toma íntegra en la cola derecha de la campana.



<u>Si se tipifica</u>, la región de aceptación de H_0 es $(-\infty, +Z_\alpha)$, siendo el estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

Se rechaza H_0 cuando $Z > Z_\alpha$.

Si Z cae dentro del intervalo de aceptación, $(-\infty, +Z_\alpha)$, se sigue dando por buena la media antigua, μ_0: no se tiene evidencia estadística, con el nivel de confianza exigido, de que la media ha aumentado. En consecuencia, no puede aceptarse la hipótesis alternativa H_1, cuya región de aceptación será $(Z_\alpha, +\infty)$.

Como puede observarse: $\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow Z_\alpha < \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

<u>Observación</u>: Que no se admita H_1 no significa que sea falsa; indica que no hay la suficiente evidencia estadística como para rechazar H_0.

Ejemplos:
1. Admitamos que la estatura media de las chicas españolas de 18 años se ajusta a una normal N(164, 9), en cm. Supongamos que en Extremadura se toma una muestra de tamaño 64 de chicas de esa edad, resultando una estatura media de 166 cm. ¿Se puede afirmar, con una significación $\alpha = 0{,}05$, que la estatura media de las chicas extremeñas es diferente de la de las chicas españolas en su conjunto?.
Solución:
Las hipótesis son:
H_0: $\mu = 164$
H_1: $\mu \neq 164$

Para $\mu_0 = 164$, $\sigma = 9$ y $\alpha = 0{,}05$ ($Z_{\alpha/2} = 1{,}96$), el intervalo de confianza es:

$$\left(164 - 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{64}},\ \ 164 + 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{64}}\right) = (164 - 2{,}2,\ \ 164 + 2{,}2) = (161{,}8,\ 166{,}2)$$

Como la estatura media de las chicas extremeñas, $\bar{x} = 166$, cae dentro de ese intervalo, no se puede rechazar la hipótesis nula. Por tanto, se supone que los cambios son debidos al azar.

→ Si se tipifica: $Z = \dfrac{166 - 164}{9/\sqrt{64}} \approx 1{,}778$.

Como $1{,}778 \in (-1{,}96,\ 1{,}96)$, no puede rechazarse H_0; por tanto no puede admitirse que la estatura media de las chicas extremeñas es diferente.

2. Consideramos la misma población N(164, 9). Supongamos ahora que en Andalucía se toma una muestra de tamaño 36 de chicas de esa edad, resultando una estatura media de 162 cm. ¿Se puede afirmar, con una significación $\alpha = 0{,}05$, que las chicas andaluzas son más bajas que las chicas españolas en su conjunto?
Solución:
Las hipótesis son:
H_0: $\mu \geq 164$
H_1: $\mu < 164$

Para $\mu_0 = 164$, $\sigma = 9$ y $\alpha = 0{,}0{,}5$ ($Z_\alpha = 1{,}654$), $\mu_0 - Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 164 - 1{,}645 \dfrac{9}{\sqrt{36}} = 161{,}5325$.

Como la media obtenida para las chicas andaluzas, $\bar{x} = 162 > 1615325$, no puede rechazare la hipótesis nula. Por tanto, admitimos que la diferencia es debida al azar.

→ Si se tipifica: $Z = \dfrac{162 - 164}{9/\sqrt{36}} \approx -1{,}333$.

Se rechaza H_0 cuando $Z < -Z_\alpha$. Como $-1{,}333 > -1{,}654$ no puede rechazarse H_0; por tanto no puede admitirse que la estatura media de las chicas andaluzas es menor que la del total de las chicas españolas.

3. Consideramos la misma población N(164, 9). Supongamos que en el País Vasco se toma una muestra de tamaño 64 de chicas de esa edad, resultando una estatura media de 166 cm. ¿Se puede afirmar, con una significación $\alpha = 0,05$, que las chicas vascas son más altas que las chicas españolas en su conjunto?

Solución:

Las hipótesis son:

H_0: $\mu \leq 164$

H_1: $\mu > 164$

Para $\mu_0 = 164$, $\sigma = 9$ y $\alpha = 0,05$ ($Z_\alpha = 1,654$), $\mu_0 + Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 164 + 1,645 \dfrac{9}{\sqrt{64}} = 165,85$.

Como la estatura media de las chicas vascas, $\bar{x} = 166 > 165,85$, se admite la hipótesis alternativa; esto es, que las chicas vascas son más altas.

→ Si se tipifica: $Z = \dfrac{166-164}{9/\sqrt{64}} \approx 1,778$.

Se rechaza H_0 cuando $Z > Z_\alpha$. Como $1,78 > 1,654$ se rechaza H_0; por tanto puede admitirse que la estatura media de las chicas vascas es mayor que la del total de las chicas españolas.

<u>Observación</u>: En los tres ejemplos hemos contrastado diferencias iguales, de 2 cm en cada caso; sin embargo el resultado es diferente. La diversidad de soluciones entre el ejemplo 1 y 3 se fundamente en el distinto contraste, bilateral en el 1, unilateral en el ejemplo 2. La distinta solución entre el ejemplo 2 y 3 es debida al diferente tamaño de las muestras.

- **Errores de tipo I y de tipo II**

Cuando se realiza un contraste admitimos o rechazamos una de las dos hipótesis, H_0 o H_1. Esta decisión se toma en términos probabilísticos, en consecuencia está sujeta a errores, que pueden ser:

Error de tipo I:

Se rechaza la hipótesis nula, H_0, siendo verdadera.

Al rechazar H_0 (siendo verdadera) se admite H_1 (que es falsa).

La probabilidad de cometer un error de tipo I es α, el nivel de significación.

Error de tipo II

No se rechaza la hipótesis nula, H_0, siendo falsa.

Al aceptar H_0 (siendo falsa) se rechaza H_1 (siendo verdadera).

La probabilidad de cometer un error de tipo II disminuye aumentando *n*.

2. Contraste de hipótesis sobre la proporción de la población

Cuando en una población se hace un muestreo de tamaño *n* y se obtiene, para un determinado atributo, una proporción $\hat{p}$ distinta de $p = p_0$, que era la proporción conocida (se parte por tanto de una binomial $B(n, p)$), el contraste sobre esa proporción puede adoptar una de las tres formas siguientes:

El objetivo y el planteamiento es análogo al indicado para la media.
Hipótesis nula, H_0: $p = p_0$
Hipótesis alternativa, H_1: $p \neq p_0$, $p > p_0$ o $p < p_0$.

La proporción de la media muestral es $\hat{p}$.

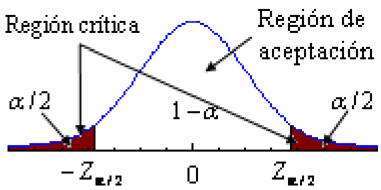
Si se tipifica, el estadístico de contraste: $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

- **Contraste bilateral**

Se plantea cuando se sospecha que la proporción ha cambiado. Se formula como sigue:
Hipótesis nula H_0: $p = p_0$
Hipótesis alternativa H_1: $p \neq p_0$

Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $\hat{p} \notin \left(p_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}},\ p_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}} \right)$

O sea, cuando $\hat{p}$ está fuera del intervalo de confianza de p_0.
Esto equivale a admitir que la proporción ha cambiado.



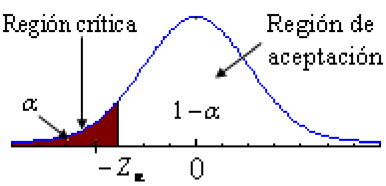
Si se tipifica, la región de aceptación de H_0 es $\left(-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2}\right)$.
Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $Z \notin \left(-Z_{\alpha/2},\ Z_{\alpha/2}\right)$. En este caso, se admite H_1.

- **Contraste unilateral (cola izquierda)**

Se plantea cuando se sospecha que la proporción ha disminuido. Se formula como sigue:
Hipótesis nula H_0: $p \geq p_0$
Hipótesis alternativa H_1: $p < p_0$

Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $\hat{p} < p_0 - Z_\alpha\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}} \Leftrightarrow p_0 - \hat{p} > Z_\alpha\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}$

Esto equivale a admitir que la proporción ha disminuido.
En este caso, el área α se toma íntegra en la cola izquierda de la campana.



Si se tipifica, la región de aceptación de H_0 es $\left(-Z_\alpha,\ +\infty\right)$.
Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $Z < -Z_\alpha$.
Esto equivale a admitir que la proporción ha disminuido.

- **Contraste unilateral (cola derecha)**

Se plantea cuando se sospecha que la proporción ha aumentado. Se formula como sigue:

Hipótesis nula H_0: $p \le p_0$

Hipótesis alternativa H_1: $p > p_0$

Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $\hat{p} > p_0 + Z_\alpha \sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}} \Leftrightarrow \hat{p} - p_0 > Z_\alpha \sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}$

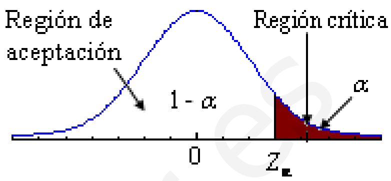
Esto equivale a admitir que la proporción ha aumentado.

En este caso, el área α se toma íntegra en la cola derecha de la campana.

<u>Si se tipifica</u>, la región de aceptación de H_0 es $(-\infty,\ Z_\alpha)$

Se rechaza H_0, con un nivel de significación α, si $Z > Z_\alpha$.

Esto equivale a admitir que la proporción ha aumentado.



Ejemplos:

4. La proporción de un determinado atributo de una población es $p = 0{,}3$. Tres encuestadores distintos hacen muestreos diferentes, con los resultados que se indican:

a) <u>Encuestador A</u>. Para $n = 36$, obtiene $\hat{p} = 0{,}38$ y afirma que la proporción ha cambiado con un nivel de significación α = 0,05.

b) <u>Encuestador B</u>. Para $n = 100$, obtiene $\hat{p} = 0{,}28$ y afirma que la proporción ha disminuido con un nivel de significación α = 0,1.

c) <u>Encuestador C</u>. Para $n = 900$, obtiene $\hat{p} = 0{,}33$ y afirma que la proporción ha aumentado, para un nivel de significación α = 0,05.

Solución:

El contraste en cada uno de los casos es:

a) Contraste bilateral

H_0: $p = p_0 = 0{,}3$

H_1: $p \ne 0{,}3$

El intervalo de confianza, para $n = 36$, $p_0 = 0{,}3$y α = 0,05, es

$$\left(0{,}30 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{36}},\ 0{,}30 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{36}}\right) =$$

$= (0{,}30 - 0{,}15,\ 0{,}30 + 0{,}15) = (0{,}15,\ 0{,}45)$

Como $\hat{p} = 0{,}38$ está dentro del intervalo de confianza no se puede rechazar H_0: no hay pruebas suficientes para la admitir que la proporción ha cambiado.

→ Si se tipifica, el estadístico de contraste es $Z = \dfrac{0{,}38 - 0{,}30}{\sqrt{\dfrac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{36}}} = 1{,}047$.

Como $1{,}047 \in (-1{,}96,\ 1{,}96)$ no puede rechazarse H_0.

b) Contrate unilateral (cola izquierda)

H_0: $p \ge p_0 = 0{,}30$

H_1: $p < 0{,}30$

Para $n = 100$, $p_0 = 0{,}30$ y α = 0,1 ($Z_{0,1} = 1{,}28$), el valor de

$$p_0 - Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = 0{,}30 - 1{,}28\sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{100}} = 0{,}30 - \ 0{,}059 = 0{,}241$$

Como $\hat{p} = 0{,}28 > 0{,}241$, no puede rechazarse H_0: no hay evidencia estadística de que la proporción haya disminuido.

→ Si se tipifica, el estadístico de contraste es $Z = \dfrac{0,28-0,30}{\sqrt{\dfrac{0,30\cdot 0,70}{100}}} = -0,436$.

La región de aceptación de H_0 es $(-1,28,\ +\infty)$. Como $-0{,}436 \in (-1,28,\ +\infty)$ no puede rechazarse H_0.

c) Contraste unilateral (cola derecha)

H_0: $p \le p_0 = 0{,}30$

H_1: $p > 0{,}30$

Para $n = 900$, $p_0 = 0{,}30$ y $\alpha = 0{,}05$, el valor de

$$p_0 + Z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = 0,30 + 1,645\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{900}} = 0{,}30 + 0{,}025 = 0{,}325$$

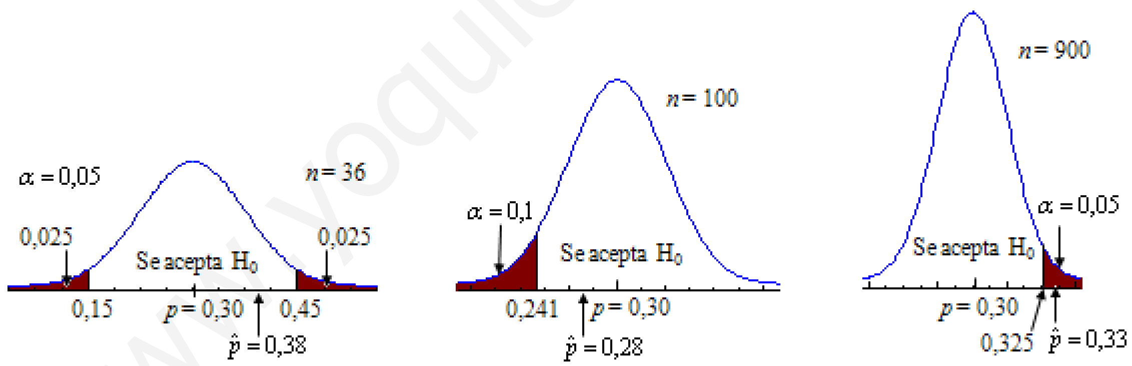
Como $\hat{p} = 0{,}33 > 0{,}325$, se admite que la proporción ha aumentado: se acepta H_1.

→ Si se tipifica, el estadístico de contraste es $Z = \dfrac{0,33-0,30}{\sqrt{\dfrac{0,30\cdot 0,70}{900}}} = 1,964$.

La región de aceptación de H_0 es $(-\infty,\ 1{,}645)$. Como $1{,}964 \notin (-\infty,\ 1{,}645)$ se rechaza H_0; por tanto se acepta H_1: la proporción ha aumentado

Observación:

En las siguientes figuras se da una explicación gráfica de cada caso.



En los dos primeros casos, la proporción de la muestra cae dentro de la región de aceptación de H_0; en el tercer caso, sale de la región de aceptación, luego se rechaza H_0.

Obsérvese cómo al aumentar el tamaño muestral se estrecha la campana; en consecuencia, diferencias más pequeñas pueden tener mayor significación.