1 Matrices

ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Señala el número de filas y columnas que componen las tablas de cada uno de los siguientes ejemplos.
a) Un tablero de ajedrez.
b) Una quiniela de fútbol.
c) El cuadro de un sudoku.

a) Ocho filas y ocho columnas.

b) Quince filas y tres columnas.

c) Nueve filas y nueve columnas.

1.II. Describe tres o cuatro situaciones de la vida cotidiana en las que manejemos tablas numéricas.

Respuesta abierta

1.III. Los cuadrados mágicos tienen la propiedad de que la suma de los elementos de sus filas, columnas o diagonales es siempre la misma. Completa este cuadrado para que sea mágico.

16	3		13
5		11	8
	6	7	12
4	15	14	

Sumamos los términos de la diagonal que está completa.

4 + 6 + 11 + 13 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Como el cuadrado debe ser mágico, todas las filas y columnas deben sumar 34. Con esta información hallamos los términos desconocidos.

1.IV. Escribe el vector $\vec{v}_1 = (3, -2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_2 = (1, 3)$ y $\vec{v}_3 = (-1, 0)$.

Hay que encontrar dos números reales, *a* y *b*, no simultáneamente nulos, tales que: $\vec{v}_1 = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3$

Sustituyendo los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ en la expresión anterior, se obtiene:

(3, –2) = a(1, 3) + b(–1, 0) = (a, 3a) + (–b, 0) = (a – b, 3a)

Igualando las componentes resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a - b \\ -2 = 3a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-2}{3} \Rightarrow 3 = \frac{-2}{3} - b \Rightarrow b = -\frac{2}{3} - 3 = \frac{-11}{3}$$

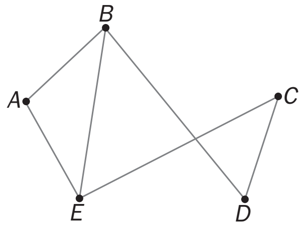
Por tanto, el vector $\vec{v}_1$ se puede escribir como combinación lineal del siguiente modo: $\vec{v}_1 = \frac{-2}{3}\vec{v}_2 - \frac{11}{3}\vec{v}_3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Escribe una matriz *A* de orden 3 × 2 tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{i-j}{2} & \text{si } i > j \\ \sqrt{i \cdot j} & \text{si } i = j \\ (-2)^i & \text{si } i < j \end{cases}$

Haciendo los cálculos correspondientes, la matriz *A* sería: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

1.2. Los pueblos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* están unidos por carreteras de doble sentido tal y como muestra la figura. Escribe la correspondiente matriz de adyacencia.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) 3*A* + 2*B* **b)** $\boldsymbol{\frac{1}{2}A - 3B}$

a) $3A + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 15 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 21 \\ 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}A - 3B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{13}{2} \\ 1 & -7 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

1.4. Dadas las matrices siguientes, comprueba si se verifica la propiedad $\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$ y calcula:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \boldsymbol{\frac{1}{3}} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) −2*A* + 3*B* **b)** $\boldsymbol{4A - \frac{1}{2}B}$

$A^t = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 4 & 0 \\ -4 & \frac{7}{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -4 \\ 4 & \frac{7}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^t + B^t$

a) $-2A + 3B = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -6 \\ -9 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -8 & -10 \\ -7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

b) $4A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} -12 & 16 & 8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{49}{4} & 16 & 9 \\ -\frac{5}{2} & \frac{47}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1.5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explica razonadamente si puedes realizar los productos *AB* y *BA*. En caso afirmativo halla los resultados.

La matriz A tiene dimensión 3 x 4 y la matriz B es de orden 3, es decir, tiene dimensión 3 x 3.

No se puede realizar el producto AB, pues no coincide el número de columnas de A con el de filas de B, pero sí se puede realizar el producto BA, pues coincide el número de columnas de B con el de filas de A, y el resultado es una matriz de dimensión 3 x 4.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.6. Calcula $A^2 - 3A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e I, la matriz identidad de orden 2.

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

explica razonadamente si existe una matriz *B* tal que el producto *AB* sea una matriz de tres filas.

La matriz A tiene dimensión 2 x 4.

Para que pueda efectuarse el producto AB, la matriz B debe tener 4 filas, ya que el número de columnas de A debe coincidir con el de filas de B. Así, si la dimensión de B es 4 x c, siendo c el número de columnas, la matriz producto AB tendrá dimensión 2 x c. Por tanto, la matriz producto AB tendrá 2 filas independientemente de qué valor tome c.

Luego no existe ninguna matriz B tal que AB sea una matriz de 3 filas.

1.8. Calcula las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{cases} -a+c=1; & -a+2c=0 \\ -b+d=0; & -b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow a=-2, c=-1,\ b=1, d=1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow BB^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{cases} a+g=1 \\ b+h=0 \\ c+i=0 \end{cases} \begin{cases} d-g=0 \\ e-h=1 \\ f-i=0 \end{cases} \begin{cases} g=0 \\ h=0 \\ i=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1,\ b=0,\ c=-1 \\ d=0,\ e=1,\ f=1 \\ g=0,\ h=0,\ i=1 \end{cases} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9. Calcula X de forma que $AX + B = C$, siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+3c & -b+3d \\ 2a-5c & 2b-5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a+3c = 1, \; 2a-5c = 0 \\ -b+3d = 0, \; 2b-5d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 5, \; c = 2, \; b = 3, \; d = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -39 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$$

1.10. Obtén razonadamente el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

La fila tercera es la suma de la primera y la segunda. Las filas primera y segunda no son proporcionales, luego rg(A) = 2.

1.11. Comprueba que en la siguiente matriz coincide el número de filas y columnas linealmente independientes.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Por columnas:

La columna tercera es igual al triple de la segunda. Las columnas primera y segunda no son proporcionales, luego rg(B) = 2.

Por filas:

La fila segunda es el triple de la primera. Las filas primera y tercera no son proporcionales, luego rg(B) = 2.

1.12. Calcula el rango de las siguientes matrices aplicando el método de Gauss.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El proceso de transformación ha terminado, ya que de la diagonal principal para abajo, todos los elementos son nulos.

El número de filas no nulas de la matriz final es 2; por tanto, rg(A) = 2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 \\ 4 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -12 \\ 4 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 4F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El proceso de transformación ha terminado, ya que de la diagonal principal para abajo, todos los elementos son nulos.

El número de filas no nulas de la matriz final es 2; por tanto, rg(B) = 2.

1.13. Aplica el método de Gauss para calcular el rango de las matrices siguientes.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 11 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El proceso de transformación ha terminado, ya que de la diagonal principal para abajo, todos los elementos son nulos. El número de filas no nulas de la matriz es 3; por tanto, rg(A) = 3.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & 11 \\ -1 & -4 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 \to F_4 + F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2}]{} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 \to F_4 + F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El proceso de transformación ha terminado, ya que de la diagonal principal para abajo, todos los elementos son nulos. El número de filas no nulas de la matriz es 2; por tanto, rg(B) = 2.

1.14. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to \frac{2}{5}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 + \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{5}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to -5F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + \frac{3}{5}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1+2F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to -F_2\\ F_1\leftrightarrow F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2\to\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-4F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & -7 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+F_2\\ F_3\to -\frac{1}{7}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+F_3\\ F_2\to F_2-2F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{2}{7}\\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

1.15. Comprueba que el rango de

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

es 2, y observa qué ocurre si se intenta calcular A^{-1} por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_2]{}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

El hecho de que en la parte izquierda de la expresión aparezca una fila de todo ceros indica que la matriz no tiene inversa.

1.16. Calcula *X* de forma que *XA* − *B* = 2*C*, siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d\\ 2c & 2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c=1,\ 2c=0\\ b+d=0,\ \ 2d=1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ c=0,\ b=-\frac{1}{2},\ d=\frac{1}{2}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$XA=2C+B\Rightarrow XAA^{-1}=(2C+B)\,A^{-1}\Rightarrow X=(2C+B)A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -7\\ 3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

1.17. Una empresa monta ordenadores de dos tipos: de mesa y portátiles. Para cada clase de ordenador elabora tres calidades: alta, media y baja.
En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los cuales 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja para los de mesa, y 30 de calidad alta, 30 de media y 40 de baja para los portátiles.
Para los ordenadores de mesa se invierten cuatro horas de montaje y siete de instalación del *software*, y para los portátiles, seis y ocho horas, respectivamente.

a) Escribe la matriz *A* que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).
b) Escribe la matriz *B* que determina el número de horas utilizadas de montaje y de *software* (filas) para cada tipo de ordenador (columnas).
c) Calcula e interpreta la matriz AB^t.

a) A :

	Mesa	Portátil
Alta	20	30
Media	40	30
Baja	40	40

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}$

b) B :

	Mesa	Portátil
Montaje	4	6
Software	7	8

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

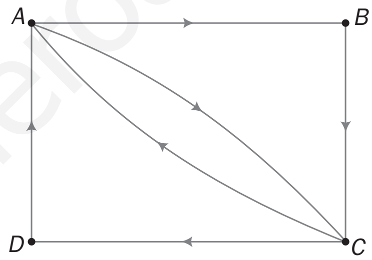
c) $AB^t = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$:

	Montaje	*Software*
Alta	260	380
Media	340	520
Baja	400	600

$\Rightarrow AB^t = \begin{pmatrix} 260 & 380 \\ 340 & 520 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$

Esta última matriz representa el número de horas de cada tipo invertidas en ese mes para montar todos los ordenadores atendiendo a su calidad. Por ejemplo, el número de horas de instalación de software para todos los ordenadores de gama media es de 520.

1.18. Observa el siguiente grafo e indica:



a) Todos los caminos de longitud 3 que se pueden seguir para ir de *C* a *D*.
b) Todos los caminos de longitud cuatro que se pueden seguir para ir de *C* a *A*.

La matriz de adyacencia y sus potencias segunda, tercera y cuarta son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dado que el elemento a_{34} de la matriz A^3 vale 1, existe un único camino de longitud tres para ir de C a D:

$$C \to A \to C \to D$$

b) Dado que el elemento a_{31} de la matriz A^4 vale 3, existen tres caminos diferentes de longitud cuatro para ir de C a A:

$$C \to D \to A \to C \to A$$
$$C \to A \to B \to C \to A$$
$$C \to A \to C \to D \to A$$

EJERCICIOS

Matrices. Grafos

1.19. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$**:**

a) Indica su dimensión.
b) Indica los elementos que forman su cuarta columna.
c) Indica los elementos que forman su tercera fila.
d) Indica el valor de los elementos a_{22}, a_{32}, a_{23}, a_{45}.
e) ¿Cómo designas la ubicación de los elementos cuyo valor es −5 y 0?

a) 3×6

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) (–4 1 3 –3 2 3)

d) a_{22} = –1, a_{32} = 1, a_{23} = –1, a_{45} no existe.

e) –5 = a_{12}, 0 = a_{26}

1.20. Escribe una matriz cuadrada *B* de orden 3 tal que todos sus elementos verifiquen que $b_{ij} = 2i - 3j + 1$.

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.21. Escribe una matriz cuadrada *C* de orden 4 tal que sus elementos verifiquen que: $c_{ij}=\begin{cases} \dfrac{i+2j}{3} & i<j \\ \dfrac{2i+j}{3} & i\geq j \end{cases}$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 \\ \frac{5}{3} & 2 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & 3 & \frac{11}{3} \\ 3 & \frac{10}{3} & \frac{11}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

1.22. Escribe una matriz *D* de dimensión 2×4 tal que sus elementos verifiquen que: $d_{ij}=\begin{cases} 2i+j & i<j-2 \\ 2j+i & i=j-2 \\ i+j & i>j-2 \end{cases}$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

1.23. Calcula el valor de las letras *a*, *b* y *c* para que las matrices *A* y *B* sean iguales.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+b & 2a-3b & 4a+5b \\ -a^2+a+c & b+2c & c^2+2a-b \\ a+b+c & -2a+3c & b^2+c^2-a \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-3b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

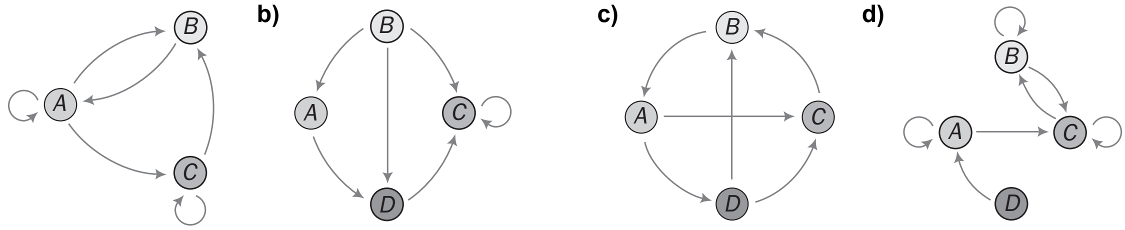
$-a^2+a+c=-1 \Rightarrow c=-1$

Para los valores a = 0, b = 0 y c = –1 se verifican todas las igualdades:

$\begin{cases} a+b=0 \\ -a^2+a+c=-1 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=0 \\ b+2c=-2 \\ -2a+3c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+5b=0 \\ c^2+2a-b=1 \\ b^2+c^2-a=1 \end{cases}$ y, por tanto, *A* = *B*.

1.24. Escribe la matriz asociada a cada uno de los siguientes grafos.

a) **b)** **c)** **d)**



a)

		Hasta		
		A	***B***	***C***
Desde	***A***	1	1	1
	B	1	0	0
	C	0	1	1

c)

		Hasta			
		A	***B***	***C***	***D***
Desde	***A***	0	0	1	1
	B	1	0	0	0
	C	0	1	0	0
	D	0	1	1	0

b)

		Hasta			
		A	***B***	***C***	***D***
Desde	***A***	0	0	0	1
	B	1	0	1	1
	C	0	0	1	0
	D	0	0	1	0

d)

		Hasta			
		A	***B***	***C***	***D***
Desde	***A***	1	0	1	0
	B	0	1	1	0
	C	0	1	1	0
	D	1	0	0	0

Operaciones con matrices

1.25. (TIC) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Calcula:
a) *A* + *B*, *A* − *B* y 2*A* − 3*B* **b) *AB* y *BA*** **c) *ABA***

a) $A+B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 2 & -4\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$; $A-B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ -1 & -6 & -1\end{pmatrix}$; $2A-3B=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 3\\ 0 & 9 & 2\\ -3 & -14 & -5\end{pmatrix}$

b) $AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & -7 & -12\\ 2 & 8 & 14\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 5 & -2\\ 1 & -8 & 2\end{pmatrix}$

c) $ABA=(AB)A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & -7 & -12\\ 2 & 8 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -10 & 2\\ -2 & 31 & -10\\ 2 & -36 & 12\end{pmatrix}$

1.26. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \mathbf{y}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $2A + 3B$, $A - 2B - 3C$ y $2A - B + 4C$ **b) ABC y BAB** **c) A^2B^3**

a) $2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -4 & -8\\ 11 & 3 & -9\\ 4 & -1 & -6\end{pmatrix}$; $A-2B-3C=\begin{pmatrix}3 & 5 & 3\\ -11 & -8 & -1\\ -7 & -6 & -3\end{pmatrix}$; $2A-B+4C=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 7 & 7 & -5\\ 16 & 15 & -6\end{pmatrix}$

b) $ABC=\begin{pmatrix}-24 & -19 & 0\\ -5 & -4 & 0\\ -20 & -15 & 0\end{pmatrix}$; $BAB=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 11 & -5 & -12\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

c) $A^2B^3=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 8\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11 & 8 & 12\\ -6 & -9 & -8\\ -6 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & 7 & 14\\ 8 & 18 & 24\\ -7 & 17 & 24\end{pmatrix}$

1.27. (PAU) Efectúa, si es posible, la siguiente operación matricial.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{-4} & \mathbf{5}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -3\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -4 & 5\\ -5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 8 & 7 & -12\\ -20 & -20 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -4 & 5\\ -5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -26\\ 32 & -61\\ -60 & 128\end{pmatrix}$$

1.28. (PAU) Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-4}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(A+B)C^t$. **b) Comprueba que $(A+B)C^t = AC^t + BC^t$.**

a) $(A+B)C^t=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 0 & -3\\ -15 & 0\end{pmatrix}$

b) $AC^t+BC^t=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 0\\ 4 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & -2\\ -1 & -1\\ -17 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ 0 & -3\\ -15 & 0\end{pmatrix}$

1.29. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$$

Calcula $(AB^t)^t + BA^t$.

$$\left(AB^t\right)^t+BA^t=BA^t+BA^t=2BA^t=2\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 3\\ 2 & -1\\ 4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 38\end{pmatrix}$$

1.30. (TIC) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) *ABC* **b) *CBA*** **c) AB^2C** **d) CB^3A**

a) $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $CBA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $AB^2C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

d) $CB^3A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1.31. (TIC) Dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + I$ **c) $(A + I)^3$**

b) $(A + I)^2$ **d) $(A + I)^4$**

a) $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(A + I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

d) $(A + I)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

1.32. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la expresión de la matriz *AB*. ¿Se puede calcular *BA*?

$AB = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$

No es posible calcular el producto *BA*, ya que el número de columnas de *B*(4) no coincide con el de filas de *A*(2).

1.33. Se consideran las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 9 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & -4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor del elemento de la tercera fila y primera columna de la matriz $C = AB^t$.
b) Calcula el valor del elemento de la primera fila y tercera columna de la matriz $D = BA^t$.

a) $c_{31}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 9 & 6 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=26$

b) Como $D = C^t \Rightarrow d_{13} = c_{31} = 26$

1.34. (PAU) Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $M^2 - N^2$.
b) Calcula $(M + N)(M - N)$.
c) Explica la razón de que $M^2 - N^2 \neq (M + N)(M - N)$.

a) $M^2-N^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -1 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(M+N)(M-N)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $(M+N)(M-N)=M^2-MN+NM-N^2$.

Como en general $MN \neq NM$, se sigue que, en general, $-MN+NM \neq O$.

1.35. (PAU)(TIC) Dadas las matrices $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) A^2, A^3 y A^4
b) $A^2 - 3A + 2I$

a) $A^2=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$; $\quad A^3=\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; $\quad A^4=\begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$

b) $A^2-3A+2I=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$

1.36. Calcula la matriz *X* para que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$2X-3\left[\begin{pmatrix}2&-1\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\-3&-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\3&6\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$2X-3\begin{pmatrix}-1&-1\\11&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&32\\5&26\end{pmatrix}\Rightarrow 2X=\begin{pmatrix}16&32\\5&26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-3\\33&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&29\\38&44\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{13}{2}&\frac{29}{2}\\19&22\end{pmatrix}$$

1.37. (PAU) Resuelve el sistema: $\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}7&-2\\3&8\end{pmatrix}\\3A-4B=\begin{pmatrix}-15&14\\-4&-22\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\begin{cases}6A+9B=\begin{pmatrix}21&-6\\9&24\end{pmatrix}\\-6A+8B=\begin{pmatrix}30&-28\\8&44\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 17B=\begin{pmatrix}51&-34\\17&68\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3&-2\\1&4\end{pmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}-2&4\\0&-4\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-2\end{pmatrix}$$

1.38. (PAU) Resuelve el sistema $\begin{cases}3X+2Y=A\\-X+3Y=B\end{cases}$**, siendo:** $A=\begin{pmatrix}5&-4&6\\-2&10&12\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&5&9\\-3&4&-4\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}3X+2Y=A\\-X+3Y=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3X+2Y=A\\-3X+9Y=3B\end{cases}\Rightarrow 11Y=A+3B\Rightarrow 11Y=\begin{pmatrix}11&11&33\\-11&22&0\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}9X+6Y=3A\\2X-6Y=-2B\end{cases}\Rightarrow 11X=3A-2B=\begin{pmatrix}11&-22&0\\0&22&44\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&4\end{pmatrix}$$

1.39. (PAU) (TIC) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

Calcula:
a) A^2, A^3 **y** A^4
b) A^{23}

a) $A^2=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$; $A^4=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$; $A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$

b) $A^{23}=\begin{pmatrix}1&46\\0&1\end{pmatrix}$

Matriz inversa

1.40. Aplicando directamente la definición, calcula las matrices inversas de $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1&7\\-2&15\end{pmatrix}$**.**

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c&2d\\2a&2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\ d=0\ a=0\ b=\frac{1}{2}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&7\\-2&15\end{pmatrix}\ B^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&7\\-2&15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+7c&b+7d\\-2a+15c&-2b+15d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a+7c=1\ \ -2a+15c=0\\b+7d=0\ \ -2b+15d=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{15}{29}\ b=-\frac{7}{29}\ c=\frac{2}{29}\ d=\frac{1}{29}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{15}{29}&\frac{-7}{29}\\\frac{2}{29}&\frac{1}{29}\end{pmatrix}$$

1.41. Comprueba que las matrices *A* y *B* son inversas.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4}\\ 2 & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & 2 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1\\ \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -4\\ 36 & -24 & -30\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4}\\ 2 & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & 2 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1\\ \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} & -4\\ 36 & -24 & -30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I\Rightarrow A^{-1}=B;\ B^{-1}=A$$

1.42. Aplicando directamente la definición, calcula la matriz inversa de $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\Rightarrow AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces: $\begin{cases}a-g=1\\b-h=0\\c-i=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-d=0\\2b-e=1\\2c-f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a-g=0\\2b-h=0\\2c-i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}g=d=-2 & a=-1\\b=h=0 & e=-1\\c=1\quad i=1 & f=2\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&-1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}$

1.43. Aplicando el método de Gauss, calcula las matrices inversas de:

a) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ **b)** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-3\end{pmatrix}$ **c)** $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&1&0\\3&-4&2\end{pmatrix}$ **d)** $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-2&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc}-1&-1&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to\frac{1}{2}F_2]{F_1\to-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&0\\1&\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 2F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&-1&0\\0&1&2&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1\to F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-3&-1\\0&1&2&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&0\\1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&0\\1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&0\\0&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&0\\0&1&-1&-1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1\to F_1+2F]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-3&-2\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2\\-1&-1\end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\-2&1&0&0&1&0\\3&-4&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2+2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&3&-2&2&1&0\\0&-7&5&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to 3F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&3&-2&2&1&0\\0&-21&15&-9&0&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3\to F_3+7F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&3&-2&2&1&0\\0&0&1&5&7&3\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1+F_3]{F_2\to F_2+2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&6&7&3\\0&3&0&12&15&6\\0&0&1&5&7&3\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to\frac{1}{3}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&6&7&3\\0&1&0&4&5&2\\0&0&1&5&7&3\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1\to F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&2&1\\0&1&0&4&5&2\\0&0&1&5&7&3\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&5&2\\5&7&3\end{pmatrix}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&0&0\\-2&1&0&0&1&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&0&-1&-2&1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_3\to-F_3]{F_1\to-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&0&1&2&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1+2F_3]{F_2\to F_2+4F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-2&-2\\0&1&0&6&-3&-4\\0&0&1&2&-1&-1\end{array}\right)\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\6&-3&-4\\2&-1&-1\end{pmatrix}$

1.44. Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

calcula:
a) A^{-1} y A^t
b) $(A^tA^{-1})^2A$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc}5 & -3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 5F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}5 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1+3F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}5 & 0 & -5 & 15\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to \frac{1}{5}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{array}\right)$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

b) $\left(A^tA^{-1}\right)^2A=A^tA^{-1}A^tA^{-1}A=A^tA^{-1}A^t=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-120 & -43\\ 67 & 24\end{pmatrix}$

1.45. (PAU) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$:

a) Calcula A^{-1}, B^{-1}, $(2A)^{-1}$ y $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}$.

b) Comprueba que $(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$.

c) Comprueba que $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}=3B^{-1}$.

d) Comprueba que $\left[(2A)\cdot\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1}=\frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$; $(2A)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$ $\left(\frac{1}{3}B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & 3\\ -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$

Los apartados b y c se comprueban directamente.

d) $(2A)\left(\frac{1}{3}B\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{10}{3}\\ 2 & \frac{10}{3}\end{pmatrix}$; $B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\end{pmatrix}$

Y se comprueba directamente que $\left[(2A)\left(\frac{1}{3}B\right)\right]^{-1}=\frac{3}{2}B^{-1}A^{-1}$.

Rango de una matriz

1.46. Aplicando el método de Gauss, calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{12} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ -3 & 6 & 8 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 12 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & 20 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{rg}(D) = 2$

1.47. Calcula el rango de la matriz, observando si existe dependencia lineal entre sus filas.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{17} & \mathbf{-9} & \mathbf{11} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Se puede eliminar la fila cuarta, ya que es proporcional a la segunda, $F_4 = -\frac{1}{2}F_2$.

Además, se verifica que $F_3 = 3F_1 + 2F_2$ y, por tanto, se puede eliminar la tercera fila.

$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 17 & -9 & 11 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$, ya que las dos filas que quedan no son proporcionales.

1.48. Calcula el rango de la siguiente matriz.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

Por verificarse que $F_4=-2F_2$: $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Por verificarse que $F_3=2F_2-F_1$: $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Finalmente, como las dos filas no son proporcionales, el rango vale 2.

Ecuaciones matriciales

1.49. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, calcula:

a) La matriz inversa de *A*

b) La matriz *X* que verifica la ecuación $\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 2F_2-3F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to\frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$

b) $X=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{pmatrix}$

1.50. Resuelve la ecuación matricial:

$$\boldsymbol{X}\cdot\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$$X\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow XI=X=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.51. (PAU) Halla la matriz *X* sabiendo que 3*X* + *BA* = *AB* y que:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}[AB-BA]=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -19 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 20 & 0 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 0 & -10 \\ 10 & 3 & -5 \\ -10 & 0 & -19 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -\frac{13}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1.52. Halla la matriz *X* tal que $\boldsymbol{A^2X+BX=C}$, siendo: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$

$$\left(A^2+B\right)X=C\Rightarrow X=\left(A^2+B\right)^{-1}C\ \Rightarrow\ X=\left[\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.53. (PAU) Halla la matriz X tal que $AXB = I$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}IB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}B^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

1.54. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-7&6&-5\\-5&4&-3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda+1&\lambda+2\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de λ para que el producto AB dé como resultado la matriz nula.

b) Para el valor de λ hallado, calcula el resultado de $BA + BAB + BAB^2$.

a) $AB=\begin{pmatrix}2\lambda-2&2\lambda-2&2\lambda-2\\7-7\lambda&7-7\lambda&7-7\lambda\\5-5\lambda&5-5\lambda&5-5\lambda\end{pmatrix}=O\Leftrightarrow\lambda=1$

b) $BA+BAB+BAB^2=BA+BO+BOB=BA=\begin{pmatrix}-27&22&-17\\-54&44&-34\\-27&22&-17\end{pmatrix}$

1.55. (PAU) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$. ¿Qué condiciones deben verificar los números reales a y b para que A y B sean conmutables, es decir, para que $AB = BA$?

$$AB=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b-a\\2a&2b+2a\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&-a+2b\\2a&2a\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b-a\\2a&2b+2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b&-a+2b\\2a&2a\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=a+2b\\b-a=-a+2b\\2b+2a=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\a=a\end{cases}\Rightarrow$ b = 0, y a es cualquier número real.

1.56. (PAU) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$:

a) Halla todas las matrices posibles que conmuten con A.

b) Da un ejemplo de matriz de la forma $\begin{pmatrix}1&a\\b&0\end{pmatrix}$ que conmute con A.

a) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-c=a+2b\\b-d=-a+3b\\2a+3c=c+2d\\2b+3d=-c+3d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c+2b=0\\a-2b-d=0\\a+c-d=0\\c+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=s\\b=t\\c=-2t\\d=s-2t\end{cases}$

Las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix}s&t\\-2t&s-2t\end{pmatrix}$.

b) Para $s=1$, $t=\frac{1}{2}$ se tiene $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\-1&0\end{pmatrix}$.

1.57. (PAU)(TIC) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, y n, un número natural cualquiera. Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{360} - A^{250}$.

Aplicaremos el método de inducción. Calculamos las primeras potencias de A.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Suponemos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$. Vemos que:

1. Se verifica para $n = 1$.
2. Si se cumple para n, también se cumple para $n + 1$, ya que:

$A^{n+1} = A\,A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+3n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$

En consecuencia, nuestra suposición es cierta. Luego $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto: $A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cdot 350 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cdot 250 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 1 \end{pmatrix}$

1.58. (PAU) Estudia el rango de la matriz A según los diferentes valores de λ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \boldsymbol{\lambda+1} & \boldsymbol{\lambda-4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & \lambda+1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2=2C_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & \lambda+1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-3F_1 \\ F_3\to 2F_3-5F_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2\lambda-3 & 2\lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3\to F_3+(2\lambda-3)F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10\lambda-10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \\ \text{Si } \lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \end{cases}$$

1.59. (PAU) Dada la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \alpha & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) Indica para qué valores de α la matriz A posee inversa.
b) Calcula la matriz inversa de A para el valor $\alpha = 0$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-\alpha F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3+\alpha F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix}$

Para $\alpha = 1$, rg(A) = 2, y la matriz no tiene inversa. Para todos los demás valores de α, la matriz posee inversa.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.60. (PAU) Dada la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{a+b} \end{pmatrix}$$

estudia el valor de su rango según los diferentes valores de *a*, *b* y *c*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - (a+b+c)F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 - aF_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \end{pmatrix}$$

Si $a = b = c \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$

Si a, b y c no son los tres iguales $\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

1.61. (PAU) Se dice que dos matrices cuadradas, *A* y *B*, de orden *n*, son semejantes si existe una matriz invertible, *P*, tal que $\boldsymbol{B = P^{-1}A\,P}$, donde $\boldsymbol{P^{-1}}$ denota la matriz inversa de *P*. Determina si son semejantes las matrices *A* y *B*.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Si A y B son semejantes, entonces existe una matriz invertible, P, tal que $B = P^{-1}AP$.

Multiplicando a izquierda por la matriz P los dos miembros de esta igualdad resulta: $PB = PP^{-1}AP \Rightarrow PB = AP$

Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$

Igualando: $\begin{cases} a = a + 2c \\ -b = b + 2d \\ c = c \\ -d = d \end{cases} \Rightarrow b = c = d = 0$, y a indeterminado. Por tanto, $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se comprueba fácilmente que la matriz P no es invertible, sea cual sea el valor de a. De este modo, las matrices dadas no son semejantes.

1.62. (PAU) Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

a) Demuestra que *AB* = *AC*.

b) Calcula el rango de la matriz *A*. ¿Podrá tener inversa?

c) Demuestra que si *A* es una matriz regular cuadrada, y *B* y *C* son matrices tales que se pueden realizar los productos *AB* y *AC*, entonces se verifica que si *AB* = *AC*, obligatoriamente *B* = *C*.

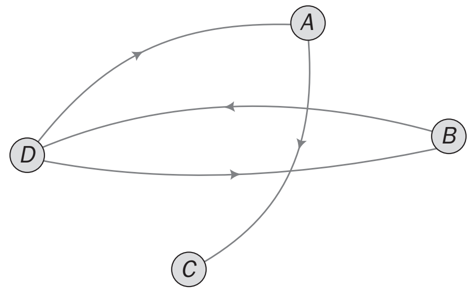
a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 15 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 15 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to \frac{1}{7}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{9}F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

La matriz A no puede tener inversa.

c) $AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow I\,B = I\,C \Rightarrow B = C$

1.63. En cierta zona de montaña existen cuatro refugios *A*, *B*, *C* y *D* que están comunicados por sendas según se establece en el siguiente grafo.



Debido a la pendiente, el recorrido en alguno de los sentidos de ciertas sendas carece de interés para los deportistas.

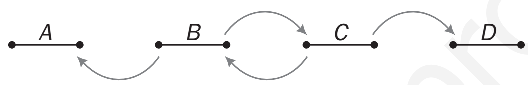
a) Forma la matriz *M* asociada al grafo.

b) Calcula la matriz M^2 e interpreta los resultados.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Indica el número de caminos diferentes de longitud 2 que se pueden seguir para ir de un refugio a otro.

1.64. Una partícula puede tomar una de las cuatro posiciones *A, B, C* o *D*.



En cada instante cambia de posición con las siguientes condiciones:

– Si está en *A*, se queda fija en ese lugar.

– Si está en *D*, se queda fija en ese lugar.

– Si está en *B*, pasa a *A* con probabilidad 0,25, a *C* con probabilidad 0,25 y se queda en *B* con probabilidad 0,5.

– Si está en *C*, pasa a *B* con probabilidad 0,25, a *D* con probabilidad 0,25 y se queda en *C* con probabilidad 0,5.

Escribe la matriz de transición del proceso estocástico y estudia el valor de sus potencias sucesivas. Interpreta el resultado.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}375 & 0{,}313 & 0{,}25 & 0{,}063 \\ 0{,}063 & 0{,}25 & 0{,}313 & 0{,}375 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}453 & 0{,}219 & 0{,}203 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}203 & 0{,}219 & 0{,}453 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Según crece el exponente, la potencia se acerca a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo cual indica que, a largo plazo, si el proceso comienza en la posición *A*, la partícula se mantiene en *A*; si comienza en *B*, la partícula acaba en *A* con probabilidad $\frac{2}{3}$ y en *D* con probabilidad $\frac{1}{3}$; si comienza en *C*, acaba en *A* con probabilidad $\frac{1}{3}$ y en *D* con probabilidad $\frac{2}{3}$, y si comienza en *D*, se mantiene en *D*.

1.65. (PAU) Una empresa empaqueta cinco tipos de lotes de herramientas para bricolaje y las reparte a cuatro provincias *A*, *B*, *C* y *D*. La siguiente tabla muestra el número de lotes de cada tipo que debe repartir en cada provincia.

	Lote1	Lote2	Lote3	Lote4	Lote5
A	12	10	10	30	10
B	15	9	15	25	12
C	23	8	12	25	15
D	12	12	20	15	12

Cada tipo de lote está formado por un número de piezas *P*, *Q* y *R* según la siguiente distribución.

	Lote1	Lote2	Lote3	Lote4	Lote5
P	2	1	2	0	1
Q	2	1	2	2	0
R	0	2	2	3	3

Escribe la matriz que determina el número de piezas de cada clase que se van a repartir a cada provincia.

$$A=\begin{pmatrix}12&10&10&30&10\\15&9&15&25&12\\23&8&12&25&15\\12&12&20&15&12\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&1&2&0&1\\2&1&2&2&0\\0&2&2&3&3\end{pmatrix}$$

Por tanto: $AB^t=\begin{pmatrix}12&10&10&30&10\\15&9&15&25&12\\23&8&12&25&15\\12&12&20&15&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\1&1&2\\2&2&2\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{array}{cccc} & P & Q & R\\ A & 64 & 114 & 160\\ B & 81 & 119 & 159\\ C & 93 & 128 & 160\\ D & 88 & 106 & 145\end{array}$

PROFUNDIZACIÓN

1.66. Al eliminar de *A* una fila se obtiene la submatriz *B*, y al eliminar de *A* una columna se obtiene la submatriz *C*. Di cuáles son las líneas eliminadas si se sabe que $B = C^t$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-3&1&2&1\\2&2&-1&0\\1&1&0&3\end{pmatrix}$$

Se elimina la segunda fila y se obtiene *B*. Se elimina la primera columna y se obtiene *C*.

1.67. Se consideran dos matrices *A* y *B* tales que *AB* = *A* y *BA* = *B*. Demuestra que $A^2 = A$.

$$\left.\begin{array}{l}ABA=AA=A^2\\ABA=AB=A\end{array}\right\}\Rightarrow A^2=A$$

1.68. a) Si *A* es una matriz simétrica, ¿qué relación existe entre ella y su transpuesta?
b) Se consideran dos matrices *A* y *B* simétricas y tales que su producto *AB* da como resultado una matriz también simétrica. Demuestra que *A* y *B* conmutan.

a) *A* es simétrica si y solo si $A^t = A$.

b) $\left.\begin{array}{l}(AB)^t=B^tA^t=BA\\(AB)^t=AB\end{array}\right\}\Rightarrow BA=AB$

1.69. Una matriz cuadrada A es idempotente cuando verifica que $A^2 = A$.
a) Escribe algún ejemplo de matriz cuadrada de orden 3 distinta de la matriz unidad y de la matriz nula y que sea idempotente.
b) Calcula el valor de λ que hace que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}$ sea idempotente.
c) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean idempotentes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $A^2 = A \Rightarrow A$ es una matriz idempotente.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+2\lambda & 2 \\ \lambda & 9+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16+2\lambda = 4 \\ 9+2\lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -6$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+ab = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0$

Por tanto, al menos uno de los dos valores, a o b, debe ser nulo.

1.70. Una matriz cuadrada es nilpotente cuando alguna de sus potencias es igual a la matriz nula. Si n es el menor entero positivo que hace que $A^n = O$, se dice que A es una matriz nilpotente de grado n.
a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es nilpotente de grado 3.
b) Encuentra todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ que sean nilpotentes de grado 2.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0$ .Por tanto, al menos uno de los dos valores, a o b, debe ser nulo.

1.71. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^n = O$, y sea I la matriz unidad del mismo orden que A.
a) Calcula el valor de la expresión matricial: $(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1})(I - A)$
b) Calcula la suma de las matrices: $I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1}$

a) $(I + A + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1})(I - A) = I + A + A^2 + ... + A^{n-1} - A - A^2 - A^3 - ... - A^n = I - A^n = I$

b) Gracias al apartado anterior, se observa que $I + A + A^2 + ... + A^{n-1}$ e $I - A$ son inversas. Por tanto:

$$I + A + A^2 + ... + A^{n-1} = (I - A)^{-1}$$

1.72. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ calcula A^n e $(I + A)^n$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = O$ para $n \geq 3$

$$(I + A)^n = I^n + nI^{n-1} \cdot A + \frac{n^2 - n}{2} I^{n-2} \cdot A^2 \Rightarrow (I + A)^n = \begin{pmatrix} 1+n & \frac{3n^2+7n}{2} & \frac{-3n-n^2}{2} \\ n & \frac{3n^2+n+2}{2} & \frac{-n-n^2}{2} \\ 3n & \frac{9n^2+3n}{2} & \frac{-3n^2-3n+2}{2} \end{pmatrix}$$

1.73. a) Demuestra que si A y B son matrices inversibles, se cumple $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
b) Suponiendo que exista A^{-1}, ¿se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$? ¿Y que $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$?

a) Veamos si $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,I\,A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Luego en efecto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Veamos si $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$:

$$(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

Luego, en efecto, se verifica.

Veamos si $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$:

$$(A^3)^{-1} = (A^2\,A)^{-1} = A^{-1}(A^2)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^2 = (A^{-1})^3$$

Luego también es cierto.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

1.1. Dadas las matrices A y B cuadradas y tales que ambas poseen inversa, la matriz X tal que $BXA^{-1} = (AB)^{-1}$ se puede obtener mediante la expresión:

A) $X = BA^{-1}(AB)^{-1}$

B) $X = BA$

C) $X = B^2$

D) $X = B^{-1}B^{-1}$

E) $X = A^{-1}B^{-1}$

La respuesta correcta es el apartado D: $X = B^{-1}B^{-1}$

1.2. El producto AB es una matriz de dimensión 2 × 4. La matriz A tiene tres columnas. Las dimensiones de A y B son:

A) dim(A) = 2 × 4, dim(B) = 4 × 4

B) dim(A) = 2 × 3, dim(B) = 3 × 2

C) dim(A) = 2 × 3, dim(B) = 3 × 4

D) dim(A) = 1 × 3, dim(B) = 3 × 4

E) dim(A) = 3 × 3, dim(B) = 3 × 4

La respuesta correcta es el apartado C: dim(A) = 2 × 3 y dim(B) = 3 × 4

1.3. La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ es:

A) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & \frac{6}{2} \end{pmatrix}$

B) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & \frac{6}{2} \end{pmatrix}$

C) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

D) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

E) La matriz A no posee inversa.

La respuesta correcta es el apartado E: La matriz A no posee inversa, porque $|A| = 0$.

1.4. Se consideran A y B, matrices cuadradas de orden 2.

A) Siempre se verifica que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

B) En ningún caso se verifica que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

C) En todos los casos, $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$.

D) Solo se verifica que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ cuando A y B conmutan entre sí.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

La respuesta correcta es el apartado D: Solo se verifica que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ cuando A y B conmutan entre sí.

1.5. Los valores de λ para los que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ es distinto de tres son:

A) $\lambda = 3$ o $\lambda = \dfrac{1}{3}$

B) $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -\dfrac{1}{3}$

C) Únicamente para $\lambda = 3$ el rango de A no es 3.

D) Para cualquier valor de λ, el rango de A vale 3.

E) Para ningún valor de λ el rango de A vale 3.

La respuesta correcta es el apartado C: Únicamente para $\lambda = 3$ el rango de A no es 3, porque $|A| = 0$ si $\lambda = 3$.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

1.6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, se verifica que:

A) $a_{ij} = i + j$ si $i < j$

B) $a_{ij} = 2i + j$ si $i = j$

C) $a_{ij} = i - j$ si $i > j$

D) $|a_{ij}| = i - j$ si $i > j$

E) $a_{ij} = |i - j|$ si $i > j$

Las respuestas correctas son los apartados A (porque $a_{12} = 3$, $a_{13} = 4$ y $a_{23} = 5$), B (porque $a_{11} = 3$, $a_{22} = 6$ y $a_{33} = 9$) y D.

1.7. Dadas las matrices $A = (2 \quad 1)$ y $B = (-2 \quad 2)$:

A) $AB^t = BA^t$

B) $A^tB = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

C) $A^tB = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

D) AB^t no está definida.

E) AB^t es una matriz cuadrada de orden 1.

Las respuestas correctas son los apartados A (porque $AB^t = BA^t = -2$), B y E.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

1.8. Cinco localidades vecinas 1, 2, 3, 4 y 5 están unidas por una serie de carreteras de doble sentido. Se conoce la matriz A de adyacencia del correspondiente gráfico que representa dichas carreteras.

a) El elemento a_{23} de la matriz A^3 vale 3.

b) El número de caminos distintos que se pueden seguir comenzando en 2 y acabando en 3 y visitando en total 4 ciudades (repetidas o no) es 3.

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

La respuesta correcta es el apartado A: a es equivalente a b.

Señala el dato innecesario para contestar:

1.9. Se solicita escribir la expresión de una matriz hemisimétrica H. Para ello se dan los siguientes datos:

a) Se trata de una matriz cuadrada de orden 4.

b) Los elementos de la diagonal principal son todos nulos.

c) El valor absoluto de todos los elementos de la forma h_{ij} con $i \neq j$ vale 2.

d) Los elementos de la forma h_{ij} con $i < j$ son positivos.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es el apartado B, al ser todos los elementos de la diagonal principal nulos.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

1.10. De una matriz de dimensión 3 × 4 se quiere hallar su rango. Se conocen los siguientes datos:

1) La primera fila no es nula y es proporcional a la tercera; la segunda fila es nula.

2) La primera columna no es nula y se verifican las siguientes relaciones entre columnas:

$$C_2 = 2C_1 \qquad C_3 = 4C_2 \qquad C_4 = C_1 + C_2 + C_3$$

A) Las informaciones 1 y 2 son suficientes, por sí solas, para obtener el rango.

B) La información 1 es suficiente por sí sola, pero la 2 no.

C) La información 2 es suficiente por sí sola, pero la 1 no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La respuesta correcta es el apartado A.

2 Determinantes

ACTIVIDADES INICIALES

2.I. Busca las relaciones de dependencia lineal entre las filas y columnas de las siguientes matrices e indica el valor de su rango.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \underset{F_2=-\frac{1}{2}F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Como } C_3 = 2C_2 + C_1 \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

2.II. Comprueba que las siguientes matrices son inversas una de la otra.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se deberían comprobar los dos productos $AB = BA = I$, aunque, en este caso especial de producto de dos matrices que dan como resultado la identidad, solo es necesario comprobar uno de ellos.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I \Rightarrow A^{-1}=B \text{ y } B^{-1}=A$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -a & 2 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a+1 & -1 & a \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 14$

c) $\begin{vmatrix} -a & 2 \\ a^2 & 3a \end{vmatrix} = -3a^2 - 2a^2 = -5a^2$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 39$

f) $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a+1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + a - a - 1 - a^3 - a^2 - a + a = -a^2 - 1$

2.2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 3x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 \\ x+1 & 2x \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 11 \Rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{5}{2}$

c) $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \Rightarrow -x^2 + 2 + 2 = 13 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ x & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow -2x + 2 + x^2 - 2x + 2 - x^2 + 3x - 2 + 1 - 4x = -7 \Rightarrow -5x + 3 = -7 \Rightarrow x = 2$

2.3. Dado el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, comprueba que se obtiene el mismo valor al desarrollarlo por los elementos de la tercera fila que al desarrollarlo por los elementos de la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16) + 1 - 14 - 4 = -49$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 - 4 + 3(-21) = -49$$

2.4. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$ desarrollándolo por los elementos de la línea que creas más conveniente.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 5(-25) = 133$$

2.5. Justifica, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ya que tiene una fila con todos los elementos nulos.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, ya que las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = -2F_1$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

ya que las filas primera y tercera son proporcionales: $F_3 = 2F_1$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$,

ya que las columnas segunda y cuarta son proporcionales: $C_4 = -C_2$.

2.6. Comprueba, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} z-2x & z-2y \\ x & y \end{vmatrix} = z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$

b) $\begin{vmatrix} z-2x & z-2y \\ x & y \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+2F_2}{=} \begin{vmatrix} z & z \\ x & y \end{vmatrix} = z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

2.7. Comprueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b-c & c \\ d & e & d+e-f & f \\ p & q & p+q-r & r \\ s & t & s+t-u & u \end{vmatrix} = 0$$

El determinante es 0, ya que la columna 3 es combinación lineal de las restantes, $C_3 = C_1 + C_2 - C_4$.

2.8. Demuestra que el siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & (a-b)^2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_4=C_4-(C_1+C_2-C_3)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.9. (TIC) Calcula el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(-3-2-6-3) = 3(-14) = -42$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1=F_1-3F_3 \\ F_2=F_2-3F_3 \\ F_4=F_4-6F_3}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -17 & -10 \\ -1 & 0 & -12 & -14 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -17 & 0 & -27 & -26 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -17 & -10 \\ -1 & -12 & -14 \\ -17 & -27 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -17 & -10 \\ 1 & 12 & 14 \\ -17 & -27 & -26 \end{vmatrix} =$

$\underset{\substack{F_1=F_1+2F_2 \\ F_3=F_3+17F_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 18 \\ 1 & 12 & 14 \\ 0 & 177 & 212 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 18 \\ 177 & 212 \end{vmatrix} = 1702$

2.10. Halla el valor de los siguientes determinantes haciendo previamente ceros.

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ x+6 & x+9 & x+12 \\ x+7 & x+10 & x+13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x+5 & x+8 & x+11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & b & a^2 \\ b & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-aC_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & b & a^2-ab \\ b & a^2 & 0 \\ a^2 & a^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(a^2-ab\right)\begin{vmatrix} b & a^2 \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-aC_1}{=} \left(a^2-ab\right)\begin{vmatrix} b & a^2-ab \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} = -a^2\left(a^2-ab\right)^2 =$

$= -a^2[a(a-b)]^2 = -a^4(a-b)^2$

2.11. Calcula el valor de los siguientes determinantes por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3 \Leftrightarrow F_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 24$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1 \\ F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2.12. Transforma los siguientes determinantes en sus equivalentes triangulares y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ x+y & x & x \\ x & x+z & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ x & x & x+z \\ x & x & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & -y & 0 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} x & x+y & x \\ 0 & -y & z \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} = xyz$

2.13. En la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **se consideran los menores determinados por:**

***M*₁: filas 1.ª y 2.ª, columnas 1.ª y 2.ª**

***M*₂: filas 1.ª y 2.ª, columnas 2.ª y 3.ª**

***M*₃: filas 2.ª y 4.ª, columnas 2.ª y 4.ª**

a) Escribe y calcula dichos menores.

b) Escribe todos los menores de orden tres a partir de los anteriores.

a) $M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$

b) Menores de $M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

Menores de $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Menores de $M_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2.14. Calcula el rango de las siguientes matrices.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = 2 + 12 - 20 + 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

$\text{rg}(D) \underset{F_2 \to 2F_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D) = 2$

2.15. Estudia el rango de la matriz según los diferentes valores del parámetro λ **:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = (\lambda+1)(\lambda+2-1) = (\lambda+1)^2; (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Si $\lambda \neq -1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Si $\lambda = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg(A)} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

2.16. Calcula las matrices inversas de:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[\text{Adj}(A)]^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}[\text{Adj}(C)]^t = \frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|}[\text{Adj}(B)]^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2.17. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5}\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}[\mathrm{Adj}(A)]^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}7 & -5 & -2\\ -6 & 5 & 2\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}7 & -6 & 4\\ -5 & 5 & -3\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}[\mathrm{Adj}(B)]^t=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3\\ 0 & -3 & -3\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2.18. Calcula los valores de *a* para los cuales la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}-\mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ posee inversa y halla dicha matriz inversa para a = −2.

$\begin{vmatrix}-2 & a\\ a-1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=2\,,\ a=-1.$

Si $a\neq 2$ y $a\neq -1\ \Rightarrow\ A$ tiene inversa.

Si $a=-2\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2.19. (PAU) Halla los valores de *k* para los cuales la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{k} & \mathbf{2}\\ \boldsymbol{k}-\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \boldsymbol{k}-\mathbf{2} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}$ no posee inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & k & 2\\ k-1 & 1 & 1\\ k-2 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -1-4k+4+k^2-2k-2k+4+2+k^2-k=2k^2-9k+9=0\Rightarrow k=3,\ k=\frac{3}{2}$$

La matriz tiene inversa para todos los valores de k salvo para $k=3$ y $k=\frac{3}{2}$.

2.20. Suponiendo que todas las matrices que aparecen son cuadradas del mismo orden y que las matrices *A* y *B* poseen inversa, despeja la matriz *X* en las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AB}$ **c)** $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ **e)** $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{A}^2$ **g)** $\boldsymbol{XAB}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

b) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AB}$ **d)** $\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{B}$ **f)** $\boldsymbol{XA}^t+\boldsymbol{B}^t=(\boldsymbol{AB})^t$

a) $XA=AB\Rightarrow XAA^{-1}=ABA^{-1}\Rightarrow XI=ABA^{-1}\Rightarrow X=ABA^{-1}$

b) $AX=AB\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}AB\Rightarrow IX=IB\Rightarrow X=B$

c) $AX+AB=C\Rightarrow X=A^{-1}(C-AB)$

d) $AXA=B\Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=A^{-1}BA^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}BA^{-1}$

e) $AXB=A^2\Rightarrow X=A^{-1}A^2B^{-1}=AB^{-1}$

f) $XA^t+B^t=(AB)^t\Rightarrow X=\left[(AB)^t-B^t\right]\left(A^t\right)^{-1}$

g) $XAB+AB=BA\Rightarrow XABB^{-1}A^{-1}=(BA-AB)B^{-1}A^{-1}\Rightarrow X=(BA-AB)B^{-1}A^{-1}$

2.21. (PAU) Calcula todas las matrices *X* tales que $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = 0 \\ c = a + d \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$$

2.22. (PAU) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$:

Calcula la matriz *X* tal que $XA - 3B = 4C$.

$$X = (4C + 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 15 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{7} & -\frac{5}{7} \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

Determinantes de orden 2 y 3

2.23. Calcula el valor de los siguientes determinantes de orden 2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$ c) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 16 + 9 = 25$ e) $\begin{vmatrix} 2^3 & 2^{-2} \\ 2^4 & 2^{-4} \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 2^{-4} - 2^4 \cdot 2^{-2} = -\frac{7}{2}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 18 = -25$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 10 = 18$ f) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^4 & a^5 \end{vmatrix} = a \cdot a^5 - a^2 \cdot a^4 = 0$

2.24. Calcula el valor de los siguientes determinantes de orden 3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & \log 4 \\ \log 2 & \log 4 & \log 8 \\ \log 4 & \log 8 & \log 16 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) = 0$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -45 - 96 - 84 - (-105 - 48 - 72) = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -58$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix} = 95-240+450-(-400+90+285) = 330$

e) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -16+9-24+10 = -21$

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 1 \\ a & 1 & a+b \end{vmatrix} = ab^2 - a$

g) $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 2a^3 - 6a^2 + 8$

h) $\begin{vmatrix} 0 & \log 2 & 2\log 2 \\ \log 2 & 2\log 2 & 3\log 2 \\ 2\log 2 & 3\log 2 & 4\log 2 \end{vmatrix} = 6(\log 2)^3 + 6(\log 2)^3 - 8(\log 2)^3 - 4(\log 2)^3 = 0$

2.25. Calcula el valor de la expresión: $3\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$3\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3(-10-32) - 4(-10-24) + 5(20-15) = 35$$

2.26. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 2$ **c)** $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & -8x \end{vmatrix} = -20$ **d)** $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 11+x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -2-3x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 4 - x - 12 = 2 \Rightarrow x = -10$

c) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & -8x \end{vmatrix} = -8x^2 + 6x = -20 \Rightarrow 8x^2 - 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm 26}{16} \Rightarrow x = 2\,,\, x = -\dfrac{5}{4}$

d) $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 11+x \end{vmatrix} = 22 + 2x - 11x - x^2 - 15 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 1,\ x = -7$

2.27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 48$ **c)** $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 30$ **d)** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2x = -6$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 2x - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$

b) $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 15x + 24x - 12x - 15x - 12x + 24x = 48 \Rightarrow x = 2$

c) $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ x+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2x^2 + 3 + 3x + 3 + x^2 + x + x + 18 = 30 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 2$

d) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ -2 & x & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2x = 3x^2 - 4x - 8 - 2x - 2 - x^2 - 2x + 4x + 6x + 6 + 2x = -6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Determinantes de orden superior

2.28. Desarrolla el siguiente determinante por los elementos de su tercera columna y calcula su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-18) = -42$$

2.29. Desarrolla los siguientes determinantes por los elementos de la fila o columna que más ceros posea y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

a) Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 48 = 34$$

b) Desarrollando por los elementos de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$$

Propiedades de los determinantes

2.30. Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -2$. Calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} x & 2x+y \\ a & 2a+b \end{vmatrix} \underset{C_2 = C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -2$

b) $\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -(-2) = 2$

c) $\begin{vmatrix} 10a & 100x \\ 10b & 100y \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} a & 100x \\ b & 100y \end{vmatrix} = 10 \cdot 100\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -1000\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -1000(-2) = 2000$

d) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ -x & -y \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = -6$

2.31. Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$**. Calcula el valor de:**

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 4p & 4q & 4r \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = -4\cdot 6 = -24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x+2a & y+2b & z+2c \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a+x+p & b+y+q & c+z+r \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1-F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

c) $\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{F_1\Leftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{F2\Leftrightarrow F_3}{=} -\left[-\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6$

d) $\begin{vmatrix} a+x & x+p & 2p \\ b+y & y+q & 2q \\ c+z & z+r & 2r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+x & x+p & p \\ b+y & y+q & q \\ c+z & z+r & r \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-C_3}{=} 2\begin{vmatrix} a+x & x & p \\ b+y & y & q \\ c+z & z & r \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1-C_2}{=} 2\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 12$

2.32. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = n$**, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix}$**.**

$\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 2\cdot 3\begin{vmatrix} 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \\ 3a & 2b & c \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -36\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$

2.33. Se sabe que $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$**. Calcula el valor de:**

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 3\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ m+1 & n+2 & p+3 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1}{=} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

b) $\begin{vmatrix} m+1 & n+1 & p+1 \\ m & n & p \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{F_1\Leftrightarrow F_2}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ m+1 & n+1 & p+1 \\ m-1 & n-2 & p-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} -\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3}$

2.34. Calcula el valor de la suma de determinantes: $\begin{vmatrix} a^2+b^2 & x^2+y^2 & p^2+q^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2ab & 2xy & 2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2 & x^2+y^2 & p^2+q^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2ab & 2xy & 2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+2ab & x^2+y^2+2xy & p^2+q^2+2pq \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ (a+b)^2 & (x+y)^2 & (p+q)^2 \\ 2a+b & 2x+y & 2p+q \end{vmatrix} = 0$$

2.35. Prueba, sin necesidad de desarrollar, que el valor del siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{vmatrix}$$

$F_4 = -F_1 + F_2 + F_3 \Rightarrow$ Las filas son linealmente dependientes y el determinante vale 0.

Simplificación de determinantes

2.36. Haz ceros en una de las filas o columnas de los siguientes determinantes y calcula su valor.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-2F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5-12+4-6+4+10) = -10$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_2=C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12-6 = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-2+4-1+8-2) = -9$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = 0$

2.37. Calcula los siguientes determinantes por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2 \Leftrightarrow C_4}{=-} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_3 \Leftrightarrow C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-3F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3+9F_2 \\ F_4=F_4+3F_2}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4-\frac{1}{2}F_3}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -72$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_4=F_4-F_3 \\ F_3=F_3-F_2 \\ F_2=F_2-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_4=F_4-5F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \end{vmatrix} \underset{F_4=F_4+2F_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_2 \Leftrightarrow F_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3+\frac{1}{2}F_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Rango de una matriz

2.38. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Escribe todos los menores de orden 3 a partir del menor de orden 2 determinado por las filas 1.ª y 3.ª y las columnas 2.ª y 4.ª

Escribe todos los menores de orden 4 a partir del menor de orden 3 determinado por las filas 1.ª, 2.ª y 3.ª, y las columnas 2.ª, 3.ª y 4.ª

El menor de orden 2 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$.

Los menores de orden 3 construidos a partir de este menor de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

El menor de orden 3 indicado es $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Los menores de orden 4 construidos a partir de este menor de orden 3 son:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

2.39. (TIC) Calcula el rango de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0{,}5 & 1 & -1{,}5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -10 & 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \quad J=\begin{pmatrix} -2 & 1 & b \\ 4 & b & 1 \\ -6 & 3 & -b \end{pmatrix}$$

a) $|A|=\begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \text{rg}(A)=1$

b) $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0{,}5 & 1 & -1{,}5 \end{vmatrix}=-3-12-1+3+1+12=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2-8=-6\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B)=2$

c) $|C|=-28\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C)=3$

d) $|D|=0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-10\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D)=2$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=36\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E)=3$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(F)=2$

g) $F_3=F_1+F_2$ y $C_1=C_5 \Rightarrow \text{rg}(G)=\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

En esta última matriz se observa que $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0$ y que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(G)=2$

h) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=4-10=-6\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(H)\geq 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \\ -10 & 8 & 6 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \\ -10 & 8 & -8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{rg}(H)=2$

i) $|I|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 3 & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{vmatrix}=4a^2-9a+5 \Rightarrow$ Si $a\neq \frac{5}{4}$ y $a\neq 1 \Rightarrow \text{rg}(I)=3$

Si $a=1$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(I)=2$. Si $a=\frac{5}{4}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(I)=2$

j) $|J|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & b \\ 4 & b & 1 \\ -6 & 3 & -b \end{vmatrix}=8b^2+16b=8b(b+2) \Rightarrow$ Si $b\neq 0$ y $b\neq -2 \Rightarrow \text{rg}(J)=3$

Si $b=0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(J)=2$. Si $b=-2$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(J)=2$

2.40. Calcula las matrices adjuntas de las siguientes y halla, para cada caso, $A \cdot (\mathrm{Adj}(A))^t$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad A\cdot(\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26 & 0\\ 0 & -26\end{pmatrix}$

b) $\mathrm{Adj}(B)=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -6 & -3 & -3\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot(\mathrm{Adj}(B))^t=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -2 & -6\\ -4 & -2 & -3\\ -2 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$

c) $\mathrm{Adj}(C)=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 5\\ -25 & -25 & 25\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$ $\qquad C\cdot(\mathrm{Adj}(C))^t=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -25 & 5\\ -5 & -25 & 5\\ 5 & 25 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $\mathrm{Adj}(D)=\begin{pmatrix}24 & 24 & 24 & 24\\ -12 & -12 & -12 & -12\\ -8 & -8 & -8 & -8\\ 6 & 6 & 6 & 6\end{pmatrix}$ $\qquad D\cdot(\mathrm{Adj}(D))^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\\ 24 & -12 & -8 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2.41. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -7\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ a & 1\end{pmatrix}$$

a) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\ A)^t=-1\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}(\mathrm{Adj}\ C)^t=\dfrac{1}{\frac{5}{8}}\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{16}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$

b) $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}(\mathrm{Adj}\ B)^t=\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $D^{-1}=\dfrac{1}{|D|}(\mathrm{Adj}\ D)^t=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -a\\ -1 & a+1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -a & a+1\end{pmatrix}$

2.42. Calcula las matrices inversas de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -13\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$$

a) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot(\mathrm{Adj}\ A)^t=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}11 & 28 & 6\\ -7 & -19 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}11 & -7 & 2\\ 28 & -19 & 5\\ 6 & -4 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $C^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 8 & -3\\ -2 & -8 & 4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -4\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$

b) $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\cdot(\mathrm{Adj}\ D)^t=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ -3 & 7 & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $D^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1-a & -1\\ -a & a^2 & 1+a\\ 1 & -a & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -a & 1\\ 1-a & a^2 & -a\\ -1 & 1+a & -1\end{pmatrix}$

2.43. (TIC) Calcula la matriz inversa de:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(\text{Adj } A)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

2.44. Despeja *X* en las siguientes ecuaciones suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa.

a) $\boldsymbol{AX+BX=AB}$

b) $\boldsymbol{AXB+C=D}$

c) $\boldsymbol{XA^2=BA}$

d) A(X + B) = CX

a) $AX+BX=AB\Rightarrow(A+B)X=AB\Rightarrow(A+B)^{-1}(A+B)X=(A+B)^{-1}AB\Rightarrow X=(A+B)^{-1}AB$

b) $AXB+C=D\Rightarrow AXB=D-C\Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}(D-C)B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$

c) $XA^2=BA\Rightarrow X=BAA^{-1}A^{-1}=BA^{-1}$

d) $A(X+B)=CX\Rightarrow AX+AB=CX\Rightarrow AX-CX=-AB\Rightarrow(A-C)X=-AB\Rightarrow X=-(A-C)^{-1}AB$

2.45. (PAU) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{X}-\mathbf{2}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\mathbf{6}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\left[6\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2.46. (PAU) Dadas las matrices

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **se considera la ecuación *AX* = *B*.**

a) ¿Cuál debe ser la dimensión de *X*?

b) ¿Crees que sería correcto escribir $\boldsymbol{X=A^{-1}B}$?

c) Encuentra todas las posibles matrices *X* que verifiquen la ecuación.

a) *X* debe ser una matriz cuadrada de orden 2.

b) No es correcto, ya que al no ser cuadrada, *A* no posee inversa.

c) $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2a+c=2 \\ 2b+d=1 \\ a=1 \quad b=1 \\ c=0 \quad d=-1 \end{cases}$$

Por tanto, la única matriz solución de la ecuación es $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.47. (PAU) Resuelve la ecuación matricial: $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.48. (PAU) Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{AX - B = C}$

siendo: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-5} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(C+B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{7}{2} & -2 \\ -1 & \frac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

2.49. (PAU) Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{XA + B = C}$

siendo: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

$$X = (C-B)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & -\frac{9}{2} & -4 \\ -15 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2.50. Dadas las matrices: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Resuelve la ecuación *AX = B*.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.51. Dadas las matrices: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{22} & \mathbf{-14} \end{pmatrix}$**.Resuelve la ecuación *ABXBA = C*.**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{|B|}(\text{Adj } B)^t = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}ABXBAA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow B^{-1}IBXBIB^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1}BXBB^{-1} = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow IXI = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}CA^{-1}B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 & -2 \\ 22 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 45 & -40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 50 & -75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.52. (PAU) Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\quad \mathbf{y}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

Se considera la ecuación *AX* = *B*.

a) ¿Es correcto escribir $X = A^{-1}B$?

b) ¿Cuál debe ser la dimensión de *X*?

c) Calcula todas las matrices *X* soluciones de la ecuación.

a) No existe A^{-1}, ya que $|A| = 0$. Por tanto, la expresión no es correcta.

b) La dimensión de *X* debe ser 3×1.

c) Se utiliza el método directo para calcular *X*:

$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c\\b\\a+b+2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=-4\\b=2\\a+b+2c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4-2c\\b=2\end{cases}$$

Todas las matrices del tipo $X=\begin{pmatrix}-4-2c\\2\\c\end{pmatrix}$ verifican la ecuación.

PROBLEMAS

2.53. Dada la matriz regular *A* de orden tres, con $|A| = 5$, calcula el valor del determinante de su inversa y el valor del determinante de su adjunta.

$$\left|A\cdot A^{-1}\right|=|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=|I|=1\Rightarrow\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{5}$$

$$|A\cdot(\mathrm{Adj}(A))|=|A|\cdot|\mathrm{Adj}(A)|=|A|^3=125\Rightarrow|\mathrm{Adj}(A)|=\frac{125}{|A|}=\frac{125}{5}=25$$

2.54. Estudia, según los valores del parámetro *a*, el rango de las siguientes matrices.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-3}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\boldsymbol{a}&\mathbf{-5}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\boldsymbol{a}\\\mathbf{2}&\mathbf{4}&\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}&\mathbf{6}&\mathbf{9}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\boldsymbol{a}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\boldsymbol{-a}&\boldsymbol{a}\mathbf{-4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\boldsymbol{a}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}\boldsymbol{a}&\mathbf{2}\boldsymbol{a}\\\mathbf{3}&\mathbf{3}&\boldsymbol{a}\mathbf{+2}\end{pmatrix}$$

a) $|A| = -10-6a+6-8-3a-15 = -9a-27 = 0 \Rightarrow a = -3$

$\begin{vmatrix}1&1\\-3&2\end{vmatrix}=5\neq 0$

Si $a = -3 \Rightarrow$ rg(A) = 2

Si $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(A) = 3

b) $|B| = 36+12a+2a^2-4a^2-6a-36 = -2a^2+6a = -2a(a-3) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad a = 3$

Si $a = 0 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&6&9\end{pmatrix}\Rightarrow$ rg(B) = 2, ya que $\begin{vmatrix}2&4\\0&6\end{vmatrix}=12\neq 0$

Si $a = 3 \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&3\\3&6&9\end{pmatrix}\Rightarrow$rg($B$) = 2, ya que $\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=-6\neq 0$

Si $a \neq 0$ y $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(B) = 3

c) $|C| = a^2 - 4a - a + 4 - a + 2a - 2a + 8 = a^2 - 6a + 12 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-48}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ No existe ningún valor real de a que anule el determinante de $C \Rightarrow$ rg(C) = 3 en todos los casos.

d) $|D| = 2a^2 + 4a + 6a + 6a - 6a^2 - 6a - 2a - 4 = -4a^2 + 8a - 4 = -4(a^2 - 2a + 1) = -4(a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a = 1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(D) = 1, ya que las tres filas son proporcionales.

Si $a \neq 1 \Rightarrow$ rg(D) = 3

2.55. (PAU) Estudia, según los valores de *m*, el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{m} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\boldsymbol{m} \end{pmatrix}$.

$|A| = -4m^2 - 4m - 4 + 4 + 4m + 4m^2 = 0$ en todos los casos. Por tanto, rg(A) ≤ 2

Como $F_2 = 2F_1 \Rightarrow$ rg(A) = rg$\begin{pmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2m \end{pmatrix}$

Si $m = 1 \Rightarrow$ rg(A) = rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ = 1

Si $m \neq 1 \Rightarrow$ rg(A) = 2

2.56. Estudia, según los valores de λ, el rango de las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$

Obtenemos los menores de orden 3 a partir de este determinante de orden 2:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -6\lambda + 6 = -6(\lambda - 1) \\ \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 3 \cdot (\lambda - 1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \\ \text{Si } \lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \end{cases}$$

b) rg(B) = rg$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ porque $C_4 = 2C_3$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow$ rg(B) = rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(B) = 1

Si $\lambda = -2 \Rightarrow$ rg(B) = rg$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(B) = 2

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ rg(B) = 3

2.57. (PAU) Estudia, según los valores de *k*, el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-k\\ 1 & k+1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Se considera el menor de orden 3: $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-k\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-1$ en todos los casos.

Por tanto, rg(A) = 3 para cualquier valor de k

2.58. (PAU) Calcula los valores del parámetro λ para los cuales la siguiente matriz cuadrada tiene inversa. Calcula el valor de dicha matriz inversa para el valor $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 3\\ 1 & \lambda & -1\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A| = 2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{10 \pm 2}{4} = \begin{cases}\lambda = 3\\ \lambda = 2\end{cases}$$

La matriz A tendrá inversa para todos los valores reales de λ excepto para $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$.

En el caso de que $\lambda = 4 \ \Rightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}10 & -6 & -14\\ 8 & -4 & -12\\ -11 & 7 & 17\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 2 & -\frac{11}{4}\\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{7}{4}\\ -\frac{7}{2} & -3 & \frac{17}{4}\end{pmatrix}$

2.59. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 1 & t & 2\end{pmatrix}$:

Calcula los valores de *t* para los cuales existe la matriz inversa de *A*.

Calcula dicha matriz inversa para *t* = 2.

Resuelve la ecuación matricial *AX* = *B* siendo *A* la matriz correspondiente al valor *t* = 2 y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

a) $|A| = 2 - t - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}t = 1\\ t = -2\end{cases}$

La matriz A tendrá inversa para todos los valores de t excepto para 1 y −2.

b) $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

c) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

2.60. (PAU) ¿Para qué valores de λ tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 2 & -1 & 2\\ \lambda & -3 & 2\end{pmatrix}$?

Calcula la expresión de dicha matriz inversa para $\lambda = 0$.

$|A| = 2\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}$ y $\lambda=-2$

Existe inversa de *A* para todos los valores reales de λ excepto para $\lambda=\frac{3}{2}$ *y* $\lambda=-2$.

Para λ =0:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\mathrm{Adj}(A)\right)^t=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2.61. Los elementos de la matriz cuadrada de orden 4 $A=(a_{ij})$ son: $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=j=1\\ 0 \text{ si } i=j\neq 1\\ -1 \text{ si } i\neq j\end{cases}$

a) Escribe la matriz.

b) Calcula el valor del determinante de la matriz.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

b) $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1\\ F_3=F_3+F_1\\ F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -2 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{vmatrix} = -5$

2.62. ¿Qué relación deben verificar los números *a*, *b* y *c* para que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=0$?

En los ejercicios resueltos del final de la unidad se ha obtenido el valor del determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

Este producto es nulo si y solo sí al menos uno de los paréntesis es nulo. Por tanto, el determinante valdrá cero si al menos dos de los tres números *a*, *b* y *c* son iguales.

2.63. (TIC) Calcula el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(4-3) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = 12$$

2.64. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = 5$**, calcula el valor de** $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & x+y \\ u+2 & v+2 & u+v \\ s+3 & t+3 & s+t \end{vmatrix}$**.**

Restando a los elementos de la tercera columna los de la primera y segunda, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & -2 \\ u+2 & v+2 & -4 \\ s+3 & t+3 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & 1 \\ u+2 & v+2 & 2 \\ s+3 & t+3 & 3 \end{vmatrix}$$

Restando el valor de los elementos de la tercera columna a los de la primera y segunda:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ u & v & 2 \\ s & t & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$$

2.65. Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-2 & x-3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

Restando a la segunda fila la primera multiplicada por x y a la tercera fila la primera, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 0$$, ya que las filas segunda y tercera son proporcionales.

2.66. (TIC) Calcula el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-F_1\\F_4=F_4-F_1}}{=} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

2.67. (TIC) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3\\ 3 & x & 1 & 2\\ 2 & 3 & x & 1\\ 1 & 2 & 3 & x\end{vmatrix} = 80x - 96$

$$\begin{vmatrix} x&1&2&3\\3&x&1&2\\2&3&x&1\\1&2&3&x\end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} x+6&1&2&3\\x+6&x&1&2\\x+6&3&x&1\\x+6&2&3&x\end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&x&1&2\\1&3&x&1\\1&2&3&x\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-F_1\\F_4=F_4-F_1}}{=} (x+6)\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&x-1&-1&-1\\0&2&x-2&-2\\0&1&1&x-3\end{vmatrix}=$$

$$= (x+6)\begin{vmatrix} x-1&-1&-1\\2&x-2&-2\\1&1&x-3\end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-C_2}{=} (x+6)\begin{vmatrix}x-1&-1&0\\2&x-2&-x\\1&1&x-4\end{vmatrix} \underset{C_1=C_1-C_2}{=} (x+6)\begin{vmatrix}x&-1&0\\4-x&x-2&-x\\0&1&x-4\end{vmatrix}=$$

$$= (x+6)\left[x(x-2)(x-4)+x^2+(4-x)(x-4)\right] = x^4-20x^2+80x-96$$

Por tanto:

$$x^4-20x^2+80x-96 = 80x-96 \Rightarrow x^4-20x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-20)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{20},\ x=-\sqrt{20}$$

2.68. a) Comprueba que los números 297, 351 y 405 son todos múltiplos de 27.

b) Demuestra, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix}2&9&7\\3&5&1\\4&0&5\end{vmatrix}$ **es múltiplo de 27.**

a) $297 = 27 \cdot 11$ $\quad 351 = 27 \cdot 13 \quad 405 = 27 \cdot 15$

b) $\begin{vmatrix}2&9&7\\3&5&1\\4&0&5\end{vmatrix} \underset{C_3=C_3+10C_2+100C_1}{=} \begin{vmatrix}2&9&297\\3&5&351\\4&0&405\end{vmatrix} = 27\begin{vmatrix}2&9&11\\3&5&13\\4&0&15\end{vmatrix}$

Como todos los elementos de la última columna son múltiplos de 27, se podrá extraer este número como factor común, y, por tanto, el valor del determinante será múltiplo de 27.

2.69. Calcula el valor del determinante: $\begin{vmatrix} x&x&x&x\\-x&y&x&x\\-x&-x&y&x\\-x&-x&-x&y\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x&x&x&x\\-x&y&x&x\\-x&-x&y&x\\-x&-x&-x&y\end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2+F_1\\F_3=F_3+F_1\\F_4=F_4+F_1}}{=} \begin{vmatrix} x&x&x&x\\0&x+y&2x&2x\\0&0&x+y&2x\\0&0&0&x+y\end{vmatrix} = x(x+y)^3$$

2.70. En un país hay tres comunidades autónomas *A*, *B* y *C*. La probabilidad de que un residente en *A* permanezca en *A* al año siguiente es de 0,90; la de que se vaya a *B*, de 0,06, y la de que se vaya a *C*, de 0,04. La probabilidad de que un residente en *B* permanezca en *B* es de 0,95; la de que se vaya a *A*, de 0,03, y la de que se vaya a *C*, de 0,02. Finalmente, la probabilidad de que un residente en *C* se quede en *C* es de 0,96; la de que se vaya a *A*, de 0,02, y la de que se vaya a *B*, de 0,02. Si las poblaciones en 2008 eran de 1,52, 2,56 y 5,48 millones de personas, respectivamente, ¿cuáles eran las de 2007?

La matriz de transición de la población de un año al siguiente es $T = \begin{pmatrix}0,90&0,06&0,04\\0,03&0,95&0,02\\0,02&0,02&0,96\end{pmatrix}$

$P_{2008} = P_{2007} \cdot T \Rightarrow P_{2007} = P_{2008} \cdot T^{-1}$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}\left[\mathrm{Adj}(T)\right]^t = \frac{1}{0,818}\begin{pmatrix}0,9116&-0,0284&-0,0184\\-0,0568&0,8632&-0,0168\\-0,0184&-0,0168&0,8532\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1,1144&-0,0694&-0,0450\\-0,0347&1,0553&-0,0205\\-0,0225&-0,0205&1,0430\end{pmatrix}$$

$$P_{2007} = \begin{pmatrix}1,52 & 2,56 & 5,48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,1144&-0,0694&-0,0450\\-0,0347&1,0553&-0,0205\\-0,0225&-0,0205&1,0430\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,48 & 2,48 & 5,59\end{pmatrix}$$

2.71. En una determinada localidad existen tres compañías *A*, *B* y *C* que ofrecen el servicio de telefonía móvil. La siguiente matriz representa las probabilidades que tiene un cliente de cada zona de permanecer en la misma compañía o cambiarse a otra el año que viene:

$$T=\begin{pmatrix}0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05\\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}20\\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}90\end{pmatrix}$$

Para realizar una investigación de mercado se cuenta con los datos del número de clientes en 2008:

***A*: 12 500   *B*: 25 000   *C*: 18 000**

Calcula el número de clientes correspondientes a los años 2006 y 2007.

$$P_{2008}=P_{2007}\cdot T\Rightarrow P_{2007}=P_{2008}\cdot T^{-1}=\begin{pmatrix}12500 & 25000 & 18000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}05\\ 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}20\\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}90\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}12500 & 25000 & 18000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}285 & -0{,}275 & -0{,}010\\ -0{,}166 & 1{,}487 & -0{,}321\\ -0{,}062 & -0{,}067 & 1{,}130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10798 & 32531 & 12171\end{pmatrix}$$

$$P_{2007}=P_{2006}\cdot T\Rightarrow P_{2006}=P_{2007}\cdot T^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}10798 & 32531 & 12171\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}285 & -0{,}275 & -0{,}010\\ -0{,}166 & 1{,}487 & -0{,}321\\ -0{,}062 & -0{,}067 & 1{,}130\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7725 & 44590 & 3185\end{pmatrix}$$

PROFUNDIZACIÓN

2.72. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix}x-y-z & 2x & 2x\\ 2y & y-x-z & 2y\\ 2z & 2z & z-x-y\end{vmatrix}=(x+y+x)^3$$

$$\begin{vmatrix}x-y-z & 2x & 2x\\ 2y & y-x-z & 2y\\ 2z & 2z & z-x-y\end{vmatrix}\underset{F_1=F_1+F_2+F_3}{=}\begin{vmatrix}x+y+z & x+y+z & x+y+z\\ 2y & y-x-z & 2y\\ 2z & 2z & z-x-y\end{vmatrix}=$$

$$=(x+y+z)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2y & y-x-z & 2y\\ 2z & 2z & z-x-y\end{vmatrix}\underset{C_3=C_3-C_1}{=}(x+y+z)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2y & y-x-z & 0\\ 2z & 2z & -z-x-y\end{vmatrix}=$$

$$=-(x+y+z)^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2y & y-x-z\end{vmatrix}=-(x+y+z)^2\left[y-x-z-2y\right]=(x+y+x)^3$$

2.73. Demuestra la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}yz & x & x^2\\ xz & y & y^2\\ xy & z & z^2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}yz & x & x^2\\ xz & y & y^2\\ xy & z & z^2\end{vmatrix}=\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix}yz & x & x^2\\ xz & y & y^2\\ xy & z & z^2\end{vmatrix}=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix}xyz & x^2 & x^3\\ xyz & y^2 & y^3\\ xyz & z^2 & z^3\end{vmatrix}=\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^3\\ 1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}$$

2.74. Calcula el valor del siguiente determinante de orden *n*.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & a & a & \dots & a \\ a & -2 & a & \dots & a \\ a & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & a & a & \dots & a \\ a & -2 & a & \dots & a \\ a & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2+C_3+\dots+C_n}{=} \begin{vmatrix} (n-1)a-2 & a & a & \dots & a \\ (n-1)a-2 & -2 & a & \dots & a \\ (n-1)a-2 & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)a-2 & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(n-1)a-2\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & -2 & a & \dots & a \\ 1 & a & -2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ \dots \\ F_n=F_n-F_1}}{=} \left[(n-1)a-2\right] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & -2-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2-a \end{vmatrix}$$

$$= \left[(n-1)a-2\right] (-2-a)^{n-1}$$

2.75. Estudia, según los valores de los parámetros *a* y *b*, el rango de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (3a+b)b^2$$

$$|A| = (3a+b)b^2 \ , \ \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (2a+b)\,b$$

Entonces:

$$b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 0 \\ a \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1 \end{cases}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \\ b \neq -3a \Rightarrow \text{rg}\ (A) = 3 \end{cases}$$

2.76. Estudia, según los valores de *x* e *y*, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1+x \\ 2 & 1 & 2 \\ 2x & y & x+y \end{pmatrix}$.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & x & 1+x \\ 2 & 1 & 2 \\ 2x & y & x+y \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & x & 1+x \\ 1 & 1 & 2 \\ x & y & x+y \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Si $x = y = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$

En cualquier otro caso, $\text{rg}(A) = 2$

2.77. Estudia, según los valores de *a*, el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a-2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{a+2} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-5} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a+1} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -3 & a+2 & 2 \\ -5 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{F_2=F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} a-2 & 1 & 2 \\ -1-a & a+1 & 0 \\ -5 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{C_1=C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ -4 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ -4 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2+7)$$

Si $a = -1 \Rightarrow$ rg(A) = rg $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si $a \neq -1 \Rightarrow$ rg(A) = 3

2.78. Calcula todas las matrices *X* tales que:

$$\boldsymbol{X}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 \\ 2c-2d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2-2ab & 2ab-2b^2 \\ 2ca-2da & 2cb-2bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a^2-2ab & 2ab-2b^2 \\ 2ca-2da & 2cb-2bd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-ab=1 \\ ab-b^2=0 \\ ca-da=1 \\ cb-bd=0 \end{cases}$$

$$ab-b^2=0 \Rightarrow b(a-b)=0 \begin{cases} b=0 \quad a=1 \quad c=1+d \\ b=0 \quad a=-1 \quad d=1+c \\ a=b \Rightarrow \begin{cases} cb-db=1 \\ cb-db=0 \end{cases} \Rightarrow \text{imposible} \end{cases}$$

Las matrices X son de la forma $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+d & d \end{pmatrix}$ o $X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1+c \end{pmatrix}$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

2.1. Los valores de *a* que anulan el valor del determinante $\Delta=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{4a} \end{vmatrix}$ **son:**

A) $\boldsymbol{a=2}$

B) $\boldsymbol{a=2}$ **y** $\boldsymbol{a=-\frac{9}{2}}$

C) $\boldsymbol{a=2}$ **y** $\boldsymbol{a=-3}$

D) Para cualquier valor real de *a*, el determinante es nulo.

E) No existe ningún valor de *a* que anule el determinante.

La respuesta correcta es B) $a = 2$ y $a = -\frac{9}{2}$, ya que $|\Delta| = -4a^2 - 10a + 36 = 0$

2.2. Dado el determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$**, su valor se puede calcular mediante el desarrollo:**

A) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

B) $\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

C) $\Delta = -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

D) $\Delta = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

E) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

La respuesta correcta es E. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2.3. Se sabe que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$**, el valor de** $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$ **es:**

A) 10 **B) −10** **C)** $\frac{5}{2}$ **D)** $-\frac{5}{2}$ **E) 0**

La respuesta correcta es A: 10, los cambios para tener el segundo determinante en función del primero son: $F_1 : F_1 + F_2,\ F_3 : -2F_3 + F_2$

2.4. El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 45 & 50 & 80 \\ 2025 & 2500 & 6400 \end{vmatrix}$ **es:**

A) 5125 **B) −5000** **C) 5250** **D)0** **E) 175**

La respuesta correcta es C: 5250.

2.5. Los adjuntos A_{32} y A_{13} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ -a & 2 & a^2 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix}$ **se anulan a la vez en el caso de que:**

A) $a = 1$

B) $a = -1$

C) $a = 0$

D) Se anulan en cualquier caso.

E) No existe ningún valor de *a* que anule los dos adjuntos a la vez.

La respuesta correcta es B: $a = -1$.

2.6. El valor de la diferencia de determinantes $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ a & 2 & -3 \\ -2 & a & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -a & -1 \end{vmatrix}$ **vale:**

A) $-18 - 15a$

B) $-18 + 15a$

C) $18 - 15a$

D) $-18a + 15a$

E) Ninguna de las respuestas es cierta.

La respuesta correcta es C) $18 - 15a$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

2.7. En relación con el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 & 2 \\ m^2 & 2 & -3 & 1 \\ m-1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

A) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ **, entonces rg(*A*) = 2**

B) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ **, entonces rg(*A*) ≥ 2**

C) Existe algún valor de *m* para el cual rg(*A*) > 3.

D) El valor del rango de *A* sólo puede ser 2 ó 3.

E) El valor del rango de *A* es 3 en todos los casos excepto para *m* = 0, *m* = 4 o *m* = 1, que vale 2.

Las respuestas correctas son B) Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces rg(*A*) ≥ 2 y D) El valor del rango de *A* sólo puede ser 2 ó 3.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

2.8. La ecuación matricial *AXA* = *B*, donde *A* y *B* son matrices cuadradas de orden 3 y la matriz *X* es la matriz incógnita.

a) Tiene solución, es decir, se puede calcular *X*.

b) La matriz *A* es regular, es decir, $\det(A) \neq 0$ **.**

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

La respuesta correcta es C) b implica a, pero a no implica b.

Señala el dato innecesario para contestar:

2.9. Para calcular el determinante de *A* se dan los siguientes datos:

a) La matriz *A* es cuadrada de orden 4.

b) Si $i = j$, el valor de a_{ij} es nulo.

c) Si $i \neq j$, el valor de a_{ij} es $-2i + j$.

d) Los adjuntos de los elementos de la primera fila valen −12, −16, 36 y 62, respectivamente.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es D) Puede eliminarse el dato d, porque aunque sepamos los adjuntos de los elementos de la primera fila necesitamos saber los valores de los elementos a_{ij} para calcular el determinante de *A.*

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

2.10. Se quiere obtener el valor del rango de la matriz $A = (a_{ij})$, de dimensión 3×4. Para ello, se sabe que $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ y $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$, y se dan, como dato, los valores de:

a) Todos los menores de orden dos que contienen a Δ_1.

b) Todos los menores de orden tres que contienen a Δ_2.

A) Las informaciones a y b son suficientes por sí solas para obtener el rango.

B) La información a es suficiente por sí sola, pero la b no.

C) La información b es suficiente por sí sola, pero la a no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La respuesta correcta es C) La información b es suficiente por sí sola, pero la a no, ya que se debería tener información acerca de los menores de orden tres que contienen a Δ_1.

3 Sistemas de ecuaciones lineales

ACTIVIDADES INICIALES

3.I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ -6x-3y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases}$

a) $x=1, y=3$ b) $x=\lambda, y=-2\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$ c) Sistema incompatible d) $x=0, y=0$

3.II. En cada caso, escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea la señalada.

a) $x=3, y=-2$ b) $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-\lambda \end{cases}$ c) $x=-4, y=5$ d) $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-1, \lambda \in R \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Escribe en forma matricial los sistemas (indica también la expresión de las matrices ampliadas).

a) $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x-5y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-2z=4 \\ x-y=0 \\ 3x+3z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=3 \\ 2x_1-x_2-x_3=2 \\ -x_1-x_4=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-3y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2. Escribe de forma desarrollada el sistema: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x-3y+3z=-1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

3.3. Mediante el cálculo de la matriz inversa, resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - 2y - 2z = -4 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left[\text{Adj}(A)\right]^t = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}B = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,\ y = 2$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{-10}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}B = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

3.4. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 4x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = -4 \\ 3x + 6z = -9 \end{cases}$**, escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones:**

i) $E_3 \to \frac{1}{3}E_3$ **ii)** $E_1 \leftrightarrow E_3$ **iii)** $E_2 \to E_2 - 2E_1$ **iv)** $E_3 \to E_3 - 4E_1$ **v)** $E_3 \to E_3 - E_2$

$$\begin{cases} 4x+2y-z=6 \\ 2x+2y+3z=-4 \\ 3x+6z=-9 \end{cases} \underset{E_3=\frac{1}{3}E_3}{\rightarrow} \begin{cases} 4x+2y-z=6 \\ 2x+2y+3z=-4 \\ x+2z=-3 \end{cases} \underset{E_1\Leftrightarrow E_3}{\rightarrow} \begin{cases} x+2z=-3 \\ 2x+2y+3z=-4 \\ 4x+2y-z=6 \end{cases} \underset{E_2=E_2-2E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x+2z=-3 \\ 2y-z=2 \\ 4x+2y-z=6 \end{cases}$$

$$\underset{E_3=E_3-4E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x+2z=-3 \\ 2y-z=2 \\ 2y-9z=18 \end{cases} \underset{E_3=E_3-E_2}{\rightarrow} \begin{cases} x+2z=-3 \\ 2y-z=2 \\ -8z=16 \end{cases}$$

3.5. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, escribe la matriz de los coeficientes e indica si son o no escalonados.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ y + 3z = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 3y - z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí es escalonado.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ No es escalonado.

b) Cambiando ecuaciones, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sí es escalonado.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ No es escalonado.

3.6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 3x+7y=14 \\ -7x+3y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -2x+y+z=7 \\ x-z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ x-2y=3 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ 3x+2y-3z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x-y=\dfrac{1}{2} \\ 3x+4y=-\dfrac{17}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+y-z=7 \\ 3x-2y-z=4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 3x+3y-2z=8 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-y=7 \\ 2x+5y=15 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ -7 & 3 & 6 \end{array}\right) \underset{F_2=3F_2+7F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 0 & 58 & 116 \end{array}\right) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 3x + 7y = 14 \Rightarrow 3x + 14 = 14 \Rightarrow x = 0$. Solución: $x = 0$, $y = 2$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & -\frac{17}{2} \end{array}\right) \underset{F_2=5F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 23 & -44 \end{array}\right) \Rightarrow y=-\dfrac{44}{23} \Rightarrow 5x+\dfrac{44}{23}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-\dfrac{13}{46}$. Solución: $x=-\dfrac{13}{46}$, $y=-\dfrac{44}{23}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_3=3F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2=\frac{1}{3}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{F_2\Leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & -17 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+5F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución única $x = 3$, $y = 3$, $z = -1$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3\Leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

No tiene solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 8 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$ Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=\dfrac{4+\lambda}{3} \\ y=\dfrac{4+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases}$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Infinitas soluciones: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$

h) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 15 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3=7F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow$ No tiene solución.

3.7. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, comprueba si verifica las condiciones para aplicar directamente la regla de Cramer y, en caso afirmativo, resuélvelos:

a) $\begin{cases} 3x-5y=18 \\ 4x+3y=-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y-2z=10 \\ 3x-2y-2z=5 \\ 7x-4y-6z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 3x+3y-3z=-1 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+y=5 \\ x+z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x+8y=12 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-17 \\ x+3y-2z=-12 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \\ 2x+4y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+2z=-4 \\ y+2z=-4 \\ x+2y=6 \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $|A|=9+20=29\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 18 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{29}=\frac{54-25}{29}=\frac{29}{29}=1\,,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{29}=\frac{-15-72}{29}=\frac{-87}{29}=-3$$

b) $A=\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $|A|=16-16=0$. No se puede aplicar directamente la regla de Cramer.

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ $|A|=24+24+14-28-16-18=0$. No se puede aplicar la regla de Cramer.

d) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A|=-9+5-8+30-6+2=14\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -17 & 2 & -5 \\ -12 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{14}=\frac{56}{14}=4\,,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & -5 \\ 1 & -12 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{14}=\frac{-28}{14}=-2\,,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -17 \\ 1 & 3 & -12 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{14}=\frac{70}{14}=5$$

e) El sistema no es cuadrado. No se puede aplicar la regla de Cramer directamente.

f) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $|A|=4-2=2\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{vmatrix}}{2}=\frac{7}{6}\,,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}}{2}=-\frac{2}{3}$$

g) El sistema no es cuadrado. No se puede aplicar la regla de Cramer directamente.

h) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|A|=-6\neq 0$. Se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2\,,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2\,,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{-6}=\frac{18}{-6}=-3$$

3.8. Analizando los rangos de las matrices del sistema y la matriz ampliada, estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-4y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ -3x-2y-z=10 \\ -y+z=44 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x+2y-4z=4 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x+3y-2z+4w=1 \\ x+y-z+w=0 \\ x-w=3 \\ 4x+4y-3z+4w=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-3y=9 \\ -x+y=-3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x-2y-z=3 \\ 4x-y-7z=1 \\ 8x-3y-8z=2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -4x-2y+8z=3 \\ 2x+y-4z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2y=1 \\ -2x+y=-6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x+3y+4z=1 \\ 3x+2y+4z=2 \\ 4x+3y+2z=3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+4y=7 \\ -x+4y=3 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 11 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -11 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Incompatible

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_1+2F_2 \\ F_3=F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*)= 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -7 & 1 \\ 8 & -3 & -8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-F_1+F_2 \\ F_3=-2F_1+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Incompatible

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-3F_1+2F_2 \\ F_3=-2F_1+F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-3F_2+5F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=-2F_1+3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \Leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=2F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2$\Rightarrow$ Incompatible

i) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_1+F_2 \\ F_3=2F_1+F_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & 16 \\ 0 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=\frac{1}{16}F_2 \\ F_3=\frac{1}{9}F_3}]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD

j) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \Leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=-2F_1+F_2 \\ F_3=-F_1+F_3 \\ F_4=-4F_1+F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_2+F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow[F_4=-F_3+F_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 3 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

3.9. Aplicando el método de Gauss, discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ x-4y+z=11 \\ x+3y-2z=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-3y+2z=4 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x-3y+3z=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x-y-z=-1 \\ 4x-4y-z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & -1 & -12 \end{array}\right) \underset{F_2=\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -12 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+5F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución única: $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3+F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 11 \end{array}\right) \underset{F_3=7F_3+6F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. La solución única es $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_1 \Leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones son: $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda, y=\lambda, z=1$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{F_2 \Leftrightarrow F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=F_3-2F_2 \\ F_4=F_4-3F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{F_4=F_4+2F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Por lo tanto el sistema es compatible determinado. La única solución es $x = -1$, $y = 0$, $z = 5$.

3.10. Aplicando el teorema de Rouché y la regla de Cramer, discute y resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ -3x+2y+2z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ 4x-y-5z=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+3z=-14 \\ 3x-y-z=-4 \\ -x-y+15z=-40 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución única: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -14 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{-24}{12}=-2$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -14 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{12}{12}=1$, $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{12}=\dfrac{-36}{12}=-3$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Si $z = \lambda$, el sistema equivale: $\begin{cases} 2x-y=-14-3\lambda \\ 3x-y=-4+\lambda \end{cases}$

Soluciones: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -14-3\lambda & -1 \\ -4+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{1}=10+4\lambda$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -14-3\lambda \\ 3 & -4+\lambda \end{vmatrix}}{1}=34+11\lambda$.

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 15 & -40 \end{pmatrix}$ rg(A) = 2 rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-9\neq 0$ y $|A^*|=-9\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3, rg(A^*) = 4

$\Rightarrow$ Sistema incompatible

3.11. Discute y resuelve, según los distintos valores del parámetro *a*, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y = a - 1 \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & a-1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$; $|A| = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -1$

CASO I. $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Sus infinitas soluciones son: $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x = -\lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ rg(A) = 1, rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SI

CASO III. $a \neq 1$ y $a \neq -1$,rg(A) = 2 rg(A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD. La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a}{a+1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-1)}{(a-1)(a+1)} = -\frac{1}{a+1}$$

3.12. a) Calcula el valor de *a* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y resuélvelo.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 15 \\ x - 2y + z = 11 \\ x - z = a \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor real de a para el cual el sistema anterior sea compatible determinado?

a) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right) \underset{F_1 \Leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -3 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & a-11 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - 2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ El sistema será compatible indeterminado cuando el rg(A^*)= rg (A) = 2 $\Rightarrow$ $a + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $a = -3$

Resolviendo por Gauss para $a = -3$, el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 11 \\ \quad y - z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + 2(-7 + z) - z = -3 + z \\ y = -7 + z \end{cases}$$

Las infinitas soluciones pueden expresarse de la forma: $x = -3 + \lambda,\quad y = -7 + \lambda,\quad z = \lambda$

b) Es imposible ya que el rango de A es siempre 2.

3.13.Estudia la compatibilidad del siguiente sistema según los diferentes valores de *a* y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ y + z = 2 \\ 2x + ay + z = 8 \end{cases}$$

Matrices del sistema: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow |A| = 1 + 6 - 2 - a = 5 - a$

$|A| = 0 \Rightarrow 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$

CASO I. Cuando $a = 5$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 12 - 10 - 10 = 0 \Rightarrow$ rg(A^*) = 2

Entonces: rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Sus infinitas soluciones son: $x = 2\lambda - 1$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

CASO II. Cuando $a \neq 5$, rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Su solución por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15-3a}{5-a} = 3\ ,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{5-a} = 0\ ,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & a & 8 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10-2a}{5-a} = 2$$

3.14. Calcula el valor de *a* para que el siguiente sistema tenga una única solución y halla, para este valor, dicha solución:

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 4y + z = 10} \\ \mathbf{ax - z = 4} \\ \mathbf{2x + y = a} \\ \mathbf{x - 3y + 2z = 3a} \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado si rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 10 \\ a & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -3 & 2 & 3a \end{vmatrix} = -2a^2 + 12a - 18 = 0 \Rightarrow a = 3$

Para $a = 3$, rg(A) = rg(A^*) = 3 = n.º incógnitas, ya que $|A| = 13 \neq 0$ $\Rightarrow$ La única solución, en este caso, es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{26}{13} = 2\ ,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{-13}{13} = -1\ ,\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{26}{13} = 2$$

3.15. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + 3y + 4z = 0} \\ \mathbf{-2x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 0} \\ \mathbf{2x + 2y + 2z = 0} \\ \mathbf{3x + 3y + 3z = 0} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{2x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x - y + z = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x - 2y + z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 3z = 0} \\ \mathbf{-x + 2y - 5z = 0} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \mathbf{-x - 2y + 3z = 0} \\ \mathbf{2x + 4y - 6z = 0} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 0} \\ \mathbf{-x + 4y = 0} \\ \mathbf{-2x - 3y = 0} \end{cases}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow$ SCD. Única solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ SCI. Si $y = \lambda$, el sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + z = 2\lambda \\ x + 3z = 2\lambda \end{cases}$

Sus soluciones: $x = 2\lambda,\ \ y = \lambda,\ \ z = 0$

c) El sistema es equivalente a $\{x + y + z = 0$ $\Rightarrow$ Compatible indeterminado.

Sus infinitas soluciones de deben escribir con la ayuda de dos parámetros: $x = -\lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

d) Compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son $x = 0$, $y = \lambda$, $z = \lambda$.

e) El sistema es equivalente a $\{x + 2y - 3z = 0$ $\Rightarrow$ Compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones se deben escribir con la ayuda de dos parámetros: $x = -2\lambda + 3\mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ rg(A) = 2 $\Rightarrow$ El sistema es compatible determinado. Su única solución es la trivial:

$x = 0$, $y = 0$.

3.16.Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) *A*(3, −2)   *B*(2, 4)

b) *A*(2, −5)   *B*(1, −3)

c) *A*(3, −3)   *B*(−3, −3)

Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + b$.

a) $\begin{cases} 3m+b=-2 \\ 2m+b=4 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6}{1} = -6 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{16}{1} = 16$

Ecuación de la recta: $y = -6x + 16 \Rightarrow 6x + y = 16$

b) $\begin{cases} 2m+b=-5 \\ m+b=-3 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{1} = -2 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Ecuación de la recta: $y = -2x - 1 \Rightarrow 2x + y = -1$

c) $\begin{cases} 3m+b=-3 \\ -3m+b=-3 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{6} = 0 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-18}{6} = -3$

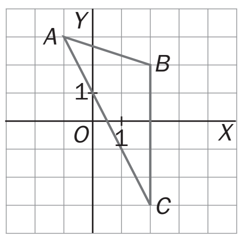
Ecuación de la recta: $y = -3$

3.17.Calcula las ecuaciones de los lados del triángulo de vértices:

$A(-1, 3)$ $B(2, 2)$ y $C(2, -3)$

El lado que pasa por *A* y *B*: $\begin{cases} -m+b=3 \\ 2m+b=2 \end{cases}$

$m = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{-3} \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-8}{-3} = \dfrac{8}{3}$



Ecuación de la recta: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} \Rightarrow x + 3y - 8 = 0$

El lado que pasa por *A* y *C*: $\begin{cases} -m+b=3 \\ 2m+b=-3 \end{cases}$

$m = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{-3} = -2 \quad b = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

Ecuación de la recta: $y = -2x + 1 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

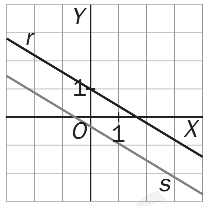
El lado que pasa por *B* y *C*: $x = 2$

3.18. Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas y represéntalas.

a) $r: 3x+5y-5=0$ **y** $s: 9x+15y+5=0$

b) $r: 3x+5y-5=0$ **y** $s: 3x-5y+5=0$

c) $r: 3x+5y-5=0$ **y** $s: -6x-10y+10=0$

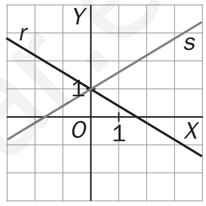


Se plantea el sistema formado por las ecuaciones de las rectas y se estudia su compatibilidad.

a) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 9x+15y=-5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 9 & 15 & -5 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -20 \end{array}\right)$

rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Incompatible.

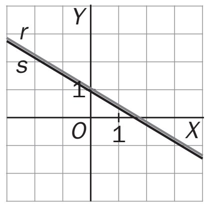
Las rectas son paralelas.



b) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 3x-5y=-5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 3 & -5 & -5 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible determinado con solución única:x = 0 y = 1. Las rectas son secantes y se cortan en el punto P(0, 1).

c) $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ -6x-10y=-10 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ -6 & -10 & -10 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2+2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$



rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ Compatible indeterminado

Las rectas son coincidentes.

3.19. Se consideran tres barras de metal compuestas de la siguiente forma:

- **Primera barra: 20 g de oro, 30 g de plata y 50 g de cobre.**
- **Segunda barra: 40 g de oro, 20 g de plata y 90 g de cobre.**
- **Tercera barra: 30 g de oro, 40 de plata y 50 g de cobre.**

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 43 g de oro, 46 g de plata y 91 g de cobre?

La composición de cada barra es: $\frac{2}{10}$ es oro, $\frac{3}{10}$ es plata y $\frac{5}{10}$ es cobre, en la primera; $\frac{4}{15}$ es oro, $\frac{2}{15}$ es plata y $\frac{9}{15}$ es cobre, en la segunda y $\frac{3}{12}$ es oro, $\frac{4}{12}$ es plata y $\frac{5}{12}$ es cobre, en la tercera.

Si tomamos x gramos de la primera barra, y de la segunda y z de la tercera, el sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=43 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=46 \\ \frac{5}{10}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=2580 \\ 18x+8y+20z=2760 \\ 30x+36y+25z=5460 \end{cases} \Rightarrow x = 60,\ y = 60,\ z = 60$$

Deberán tomar 60 gramos de cada barra.

3.20. En un determinado periodo de tiempo la población de una determinada localidad ha variado. Se conocen los siguientes datos:

- **La población al comienzo del periodo era de 35420 habitantes y al final de 35551.**
- **Nacieron 127 personas más de las que fallecieron.**
- **La diferencia entre las personas que inmigraron y las que emigraron fue de 4.**
- **Entre nacimientos e inmigrantes sumaron 543.**

¿Es suficiente la información para averiguar el número de nacimientos, defunciones, inmigrantes y emigrantes correspondientes a ese período?

La ecuación fundamental de la población es: $Pf = Pi + N - D + I - E$

Con esta ecuación y los datos, se puede escribir el sistema:

$$\begin{cases} 35551 = 35420 + N - D + I - E \\ N - D = 127 \\ I - E = 4 \\ N + I = 543 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N - D + I - E = 131 \\ N - D = 127 \\ I - E = 4 \\ N + I = 543 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 127 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 543 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3+F_2 \\ F_4=F_4-F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 412 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 412 \end{array}\right) \underset{F_2 \Leftrightarrow F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 131 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 412 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible indeterminado. No se puede determinar con exactitud el valor de las variables.

EJERCICIOS

Forma matricial de un sistema

3.21. Escribe en forma matricial los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - z = 4} \\ \mathbf{5x - y + z = 7} \\ \mathbf{2x + 2y - 3z = 9} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x - 2z = 0} \\ \mathbf{3x + 3y = 1} \\ \mathbf{4y - 4z = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1} \\ \mathbf{2x_1 - 2x_3 + x_4 = 0} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 2} \\ \mathbf{x - 3y = -2} \\ \mathbf{x + y = -4} \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3.22. Para cada uno de los siguientes sistemas, escribe la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x+y-z=4} \\ \mathbf{x-y=2} \\ \mathbf{x+2y+2z=0} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-3z=2} \\ \mathbf{x-y-3z=-2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x+y=0} \\ \mathbf{x-3y=2} \\ \mathbf{3x-y=4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{x_1+2x_2-3x_3+x_4=2} \\ \mathbf{-x_1-2x_2+4x_3-x_4=-2} \\ \mathbf{x_1+x_2+x_3+x_4=0} \\ \mathbf{-2x_1+3x_2-x_3+2x_4=3} \end{cases}$

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.23. Escribe de forma desarrollada los siguientes sistemas.

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 2x-2y+3z=1 \\ x-2z=2 \\ 2x+2y-z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+2y=\dfrac{2}{3} \\ -2x+\dfrac{3}{4}y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=2 \\ -2x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

Soluciones de un sistema

3.24. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-3z=1} \\ \mathbf{-2x+y-4z=5} \\ \mathbf{3x+2y-z=-1} \end{cases}$

escribe sistemas equivalentes a él aplicando sucesivamente las siguientes transformaciones.

i) $\mathbf{E_2=E_2+E_1}$ **ii)** $\mathbf{E_3=2E_3-3E_1}$ **iii)** $\mathbf{E_3=4E_3+5E_2}$

$$\begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ -2x+y-4z=5 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \underset{E_2=E_2+E_1}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases} \underset{E_3=2E_3-3E_1}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ -5y+7z=-5 \end{cases} \underset{E_3=4E_3+5E_2}{\rightarrow} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 4y-7z=6 \\ -7z=10 \end{cases}$$

3.25. Dado el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{3x+2y-4z=a} \\ \mathbf{2x+2y-z=b} \\ \mathbf{3x+y-z=c} \end{cases}$$

calcula el valor de *a*, *b* y *c* para que la terna (2, −1, 4) sea solución del mismo.

$$\begin{cases} 3\cdot 2+2\cdot(-1)-4\cdot 4=a \\ 2\cdot 2+2\cdot(-1)-4=b \\ 3\cdot 2-1-4=c \end{cases} \Rightarrow a=-12,\ b=-2,\ c=1$$

Método de Gauss

3.26. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 3x - 5y = -21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x - 2y = 7 \\ -2x + 7y = -37 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & -21 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2-3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -16 & -48 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCD. Solución: $x = -2$, $y = 3$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ -2 & 7 & -37 \end{array}\right) \underset{F_2=3F_2-2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -2 & 7 \\ 0 & 25 & -125 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCD. Solución: $x = 1$, $y = -5$

3.27. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2} \\ 3x - 11y + 4z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 11 \\ \frac{1}{13}x + \frac{1}{13}y = 1 \\ 5x + 8y - 9z = 59 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_2=-\frac{1}{3}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 4 & 2 & -6 & 6 \end{array}\right) \underset{F_3=\frac{1}{2}F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right) \underset{F_3=3F_3-5F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -14 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-4F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 5 & -1 & 2 & 11 \\ 6 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-5F_1 \\ F_3=F_3-6F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & -11 & 7 & 35 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 7 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & 8 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \\ 0 & -18 & 18 & 36 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=-\frac{1}{9}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{18}F_3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = -\lambda$, $y = \lambda - 2$, $z = \lambda$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 \\ 3 & -11 & 4 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & -2 & 10 & 13 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 13 \\ 5 & 8 & -9 & 59 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SCI. $x = 15 - 3\lambda$, $y = 3\lambda - 2$, $z = \lambda$

3.28. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) $\begin{cases} x+2y+9z=5 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+2y-4z=2 \\ -x-y+2z=1 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \end{array}\right) \underset{F_2=-\frac{1}{6}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x=1-3\lambda$, $y=2-3\lambda$, $z=\lambda$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_2+F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

3.29. (TIC) Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-3y=-1 \\ x-12y=-11 \\ x+9y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x-2y=-1 \\ 2x-4y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -12 & -11 \\ 1 & 9 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=F_3-2F_2 \\ F_4=F_4+F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2=-\frac{1}{7}F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = 1$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=2F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_4=F_4+5F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible

3.30. (TIC) Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

a) $\begin{cases} x+y-2z+2w=-8 \\ x-y-z+w=-2 \\ 2x+3y-z-w=-1 \\ 3x+y+z-3w=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z+w=2 \\ 2x-y-z+2w=4 \\ 2x+3y-z-4w=-2 \\ 3x-z-3w=0 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=2F_3+F_2 \\ F_4=F_4-F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 28 \end{array}\right) \underset{F_4=7F_4-6F_3}{\rightarrow}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = -2$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-2F_1 \\ F_4=F_4-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \underset{F_2 \Leftrightarrow F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3=F_3-5F_2 \\ F_4=F_4-6F_2}}{\rightarrow}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & -4 & 30 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -15 & -15 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Soluciones: $x = \dfrac{7\lambda-5}{2}$, $y = \dfrac{3\lambda-3}{2}$, $z = \dfrac{15\lambda-15}{2}$, $w = \lambda$

Regla de Cramer

3.31. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 5x-4y=14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y=-23 \\ -2x+4y=-10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x+3y=15 \\ -5x-y=27 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-3y=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{5}y=\dfrac{21}{60} \end{cases}$

a) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=2$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}}=-1$

c) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}=-6$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ -5 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}}=3$

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -23 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}=-3$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -2 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}=-4$

d) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & -3 \\ \frac{21}{60} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}=\dfrac{7}{74}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{21}{60} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}}=-\dfrac{28}{37}$

3.32. Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas utilizando el método de Cramer.

a) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ -2x+y-2z=-10 \\ 3x-2y+5z=22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y=30-4z \\ -\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y+z=5 \\ -3x+y-5z=-33 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ 3x-2y-z=2 \\ -x-6y+z=5 \end{cases}$

a) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 14 & -2 & 3 \\ -10 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-4}{-4}=1,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ -2 & -10 & -2 \\ 3 & 22 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{8}{-4}=-2,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 14 \\ -2 & 1 & -10 \\ 3 & -2 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-12}{-4}=3$

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{-7}{-7}=1,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{0}{-7}=0,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{14}{-7}=-2$

c) $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 30 & -3 & 4 \\ 5 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -33 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{20}{10}=2,$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ -\frac{1}{3} & 5 & 1 \\ -3 & -33 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{-20}{10}=-2,$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 30 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 5 \\ -3 & 1 & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}=\dfrac{50}{10}=5$

d) Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0$, el sistema no es compatible determinado y no se puede resolver por Cramer.

3.33. (TIC)Dado el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+w=4 \\ y+z+w=5 \\ 2x+y+w=5 \end{cases}$$

a) Comprueba que verifica las condiciones para aplicar la regla de Cramer.

b) Calcula su solución.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_4=F_4-2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$, $w = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$

Teorema de Rouché

3.34. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-24 \\ -4x+3y=20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x+y=10 \\ 6x-2y=-20 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2x+5y=4 \\ 4x-10y=-7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ x+y=\dfrac{3}{2} \\ 3x-2y=2 \end{cases}$

a) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -24 \\ -4 & 3 & 20 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 = rg(A^*) = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -24 & -5 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{28}{-14} = -2$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -24 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-56}{-14} = 4$

b) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 10 \\ 6 & -2 & -20 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 = rg(A^*) < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 10 + 3\lambda$

c) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 5 & 4 \\ 4 & -10 & -7 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ SCD. El sistema es equivalente a $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$.

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-10}{-10} = 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-5}{-10} = \dfrac{1}{2}$

3.35. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -17 \\ -5x + 2y - 4z = -17 \\ 4x + y - 5z = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \\ 3x - 3z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

a) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -17 \\ -5 & 2 & -4 & -17 \\ 4 & 1 & -5 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 51 \neq 0$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD. Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -17 & -2 & 1 \\ -17 & 2 & -4 \\ 17 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{357}{51} = 7,\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -17 & 1 \\ -5 & -17 & -4 \\ 4 & 17 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1139}{51} = \frac{67}{3},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -17 \\ -5 & 2 & -17 \\ 4 & 1 & 17 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{340}{51} = \frac{20}{3}$$

b) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 96 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

c) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & 18 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rg(A*) = 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x + 2y = 4 + 2\lambda \\ 2x + 5y = 10 + 2\lambda \end{cases}$

Solución: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

d) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$

e) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

f) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -6 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$, $z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

3.36. Discute con la ayuda del teorema de Rouché y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas:

a) $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \\ x+3y+2z=6 \\ x-y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 2y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -2x+5y+4z=1 \\ 8y+6z=5 \\ 4y+8z=1 \\ x+6y+4z=3 \end{cases}$

a) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow |A^*|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ rg (A) = 3 = rg(A^*) $\Rightarrow$ SCD

El sistema es equivalente a : $\begin{cases} x+z=4 \\ 2y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Solución: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{-1}=-1,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{0}{-1}=0,\quad z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-5}{-1}=5$

b) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 2 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

El sistema es equivalente a: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x=\dfrac{3-\lambda}{2}$, $y=\dfrac{3-\lambda}{2}$, $z=\lambda$

c) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-9\neq 0$ y $|A^*|=-9\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 y rg(A^*) = 4 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}=-80\neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 $\neq$ rg(A^*) = 4 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

3.37. Estudia y resuelve, en su caso, el sistema: $\begin{cases} x+y=4 \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Un menor de orden 3 extraído de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow$

rg(A) = rg(A^*) = 3 < n.º incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Solución: Si $y=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x=4-\lambda \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{cases} \Rightarrow x = 4 - \lambda,\ y=\lambda,\ z=2,\ w=1$

Sistemas con un parámetro

3.38. (PAU) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro *a* y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = a \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + (3-a)y = 26 \\ -3x + (2+a)y = -a - 26 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} ax - y = 1 \\ -2x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + (2a+3)y = 1 \\ 3ax - y = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} ax + y = a \\ a^2x + ay = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$

a) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & a \end{array}\right)$ $|A| = -4 + 9 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2 = rg(A*) = n.º incógnitas $\Rightarrow$

Sistema compatible determinado para cualquier valor de a.

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ a & -2 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{3}{5}a$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{2}{5}a$

b) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2a+3 & 1 \\ 3a & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -3 - 6a^2 - 9a = -6a^2 - 9a - 3 = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = -\dfrac{1}{2}$

CASO I. $a = -1 \Rightarrow (A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = \dfrac{1-\lambda}{3}$, $y = \lambda$

CASO II. $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = 1 rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq -1$ y $a \neq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-2}{6a+3}$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3a & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{2a+1}$

c) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3-a & 26 \\ -3 & 2+a & -a-26 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = 13 - a = 0 \Rightarrow a = 13$

CASO I. $a = 13$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -10 & 26 \\ -3 & 15 & -39 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = 13 + 5\lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a \neq 13 \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 26 & 3-a \\ -a-26 & 2+a \end{vmatrix}}{|A|} = a + 10$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 26 \\ -3 & -a-26 \end{vmatrix}}{|A|} = 2$

d) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{array}\right)$; $|A| = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$ rg (A) = 1 para cualquier valor de a. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -1,\ a = 1$

CASO I. $a = 1$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$.

CASO II. $a = -1$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ rg(A) = rg(A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$

CASO III. $a \neq 1$ y $a \neq -1$ rg(A) = 1 $\neq$ rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

e) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ -2 & a-1 & 2 \end{array}\right)$ $\qquad |A| = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad a = 2$

CASO I. $a = -1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Soluciones: $x = -1 - \lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = 2$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 1 rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq -1$ y $a \neq 2$ rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{a-2}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{2}{a-2}$

f) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{array}\right)$; $|A| = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad a = 1$

CASO I. $a = 1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ rg (A) = rg (A*) = 1 < n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCI . Soluciones: $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$

CASO II. $a = -1$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$ rg (A) = 1 $\neq$ rg (A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq -1$ y $a \neq 1$ rg (A) = rg (A^*) = 2 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a-1 & -a \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{1}{a+1}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{2a+1}{a+1}$

3.39. (PAU) Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = a \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = a \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x + ay - z = 0 \\ ax + y + z = 2a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ -2x + 3y + 4z = 6 \\ (a-3)x + 12y + (a+3)z = 27 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x + az = a \\ 3x + ay + az = a \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ ax + y + z = -a^2 \\ a^2x + ay + z = -a^3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ ax - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

a) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{array}\right)$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 6$

CASO I. $a = 6$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = 10 + 4\lambda$, $y = 34 + 11\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 6$ rg(A) =2 $\neq$ rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

b) $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ a-3 & 12 & a+3 & 27 \end{array}\right)$ $\qquad |A| = 18a - 36 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

CASO I. $a = 2$ $\left(A|A^*\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 12 & 5 & 27 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = \dfrac{11\lambda + 3}{7}$, $y = \dfrac{-2\lambda + 16}{7}$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 2$ rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ SCD

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 27 & 12 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{6}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ -1 & 27 & a+3 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{7}{3}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 12 & 27 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{1}{6}$

c) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 10 \\ 4 & 9 & -6 & a \end{array}\right)$ $\quad |A| = 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2. Un menor de orden 3 de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 10 \\ 4 & 9 & a \end{vmatrix} = a - 18$$

CASO I. a = 18 $\Rightarrow$ rg(A) = rg (A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 6\lambda$, $y = 2 - 2\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a \neq 18$ rg(A) = 2 $\neq$ rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

d) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & a & a \\ 3 & a & a & a \end{array}\right)$ $\quad |A| = 5a - a^2 = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 5$

CASO I. a = 0 $\quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 1 = rg(A*) $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 0$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. a = 5 $\quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq 0$ y $a \neq 5$ $\Rightarrow$ rg(A) = 3 = rg(A*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & 0 & a \\ a & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{2a}{a-5}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & a & a \\ 3 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-4}{a-5}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 3 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a-7}{a-5}$

e) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 - 2a + 2 \end{array}\right)$ $\quad |A| = (a+2)(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ ó $a = 1$

CASO I. a = –2 $\ (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 1 Todos los términos de las matrices de coeficientes y ampliada son 1 $\Rightarrow$ rg(A) = 1 = rg(A*) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = 1 - \lambda - \mu \quad y = \lambda \quad z = \mu$

CASO III. $a \neq -2$ y $a \neq 1$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 - 2a + 2 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1-a}{a+2}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2a + 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{3}{a+2}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 - 2a + 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a^2 - 1}{a+2}$

f) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & 1 & -a^3 \end{array}\right)$ $\quad |A| = (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

CASO I. a = 1 rg(A) = rg(A*) = 1 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = -1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

CASO II. $a \neq 1$ rg (A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema Compatible determinado. Solución:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a^2 & 1 & 1 \\ -a^3 & a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -a - 1$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a^2 & 1 \\ a^2 & -a^3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = a$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -a^2 \\ a^2 & a & -a^3 \end{vmatrix}}{|A|} = 0$

g) $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 2a \end{array}\right)$ $\quad |A| = 2a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1$

CASO I. a = 1 $\ (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$

CASO II. a = 0 $\ (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ rg(A) = 2 y rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq 1$ y $a \neq 0$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 2a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1+2a}{a}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{1}{a}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & a & 0 \\ a & 1 & 2a \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{a+1}{a}$

h) $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ a & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $|A| = a^3 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1$

CASO I. $a = 1$ $\left(A|A^*\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \dfrac{2-\lambda}{5}$, $y = \dfrac{-1+3\lambda}{5}$, $z = \lambda$.

CASO II. $a \neq$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a+2}{a^2+a+6}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a-2}{a^2+a+6}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a}{a^2+a+6}$

3.40. (PAU) Estudia los siguientes sistemas homogéneos según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{2x + ay + 3z = 0} \\ \boldsymbol{3x + 2y + 6az = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{2x - 3y + z = 0} \\ \boldsymbol{x - ay - 3z = 0} \\ \boldsymbol{5x + 2y - z = 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{5x + 2y - z = 0} \\ \boldsymbol{x + ay - 3z = 0} \\ \boldsymbol{3x + 5y - 2z = 0} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{x - ay + 3z = 0} \\ \boldsymbol{x + ay - 2z = 0} \\ \boldsymbol{2x + z = 0} \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 2 & 6a \end{pmatrix}$ $|A| = 2a^2 - 7a + 5 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{5}{2}$, $a = 1$

CASO I. $a = \dfrac{5}{2}$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = -9\lambda$, $y = 6\lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a = 1$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI Soluciones: $x = 0$, $y = -3\lambda$, $z = \lambda$

CASO III. $a \neq \dfrac{5}{2}$, $a \neq 1$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & a & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 56 - 7a = 0 \Rightarrow a = 8$

CASO I. $a = 8$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 19\lambda$

CASO II. $a \neq 8$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $|A| = 7a + 56 = 0 \Rightarrow a = -8$

CASO I. $a = -8$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 19\lambda$

CASO II. $a \neq -8$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\Rightarrow$ SCD. Solución trivial: $x = y = z = 0$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 3 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ rg(A) = rg(A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI

Soluciones: $x = -a\lambda$, y = 5λ, $z = 2a\lambda$

Si $a = 0$ el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas y, en este caso, es compatible determinado y su solución es la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

3.41. (PAU) Calcula el valor de *m* para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y escribe las infinitas soluciones para este valor hallado. (Aplica el método de Gauss.)

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 4x-y-2z=1 \\ 2x-4y-z=-3 \\ 2x-my-z=4 \end{cases}$$

$$(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -m-3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado, la última ecuación sea de la forma $0 \cdot y = 0$ y, por tanto, el valor de *m* debe ser *m* = –3.

Para este valor, las infinitas soluciones se pueden expresar mediante las ecuaciones: $x = \frac{\lambda+1}{2}$, $y = 1$, $z = \lambda$.

3.42. (PAU) Discute y resuelve según los valores del parámetro *k* el sistema:

$$\begin{cases} kx+3y=4 \\ 3x-y=2 \\ 2x-y=k \end{cases}$$

$$(A|A^*)=\left(\begin{array}{cc|c} k & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{rg}(A) = 2 \text{ y } |A^*| = -k^2-7k+8=0 \Rightarrow k=1,\ k=-8$$

CASO I. $k = 1$ — rg(*A*) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Considerando las dos últimas ecuaciones del sistema, la solución es $x = 1$, $y = 1$

CASO II. $k = -8$ — rg(*A*) = 2 = rg(A^*) $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Considerando las dos últimas ecuaciones del sistema, la solución es $x = 10$, $y = 28$

CASO III. $k \neq 1$ y $k \neq -8$ — rg(*A*) = 2 ≠ rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

Sistemas homogéneos

3.43. (TIC)Estudia y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} 4x-3y+2z=0 \\ 3y-4z=0 \\ 2x-2y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=z \\ x-y=z \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-6y-8z=0 \\ x-y-3z=0 \\ -4x-12y+4z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \end{cases}$

a) $|A| = 16 \Rightarrow$ rg(*A*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

b) $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = 5\lambda$, $y = -\lambda$, $z = 2\lambda$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

d) El sistema es equivalente a $\{x+y+z=0$ rg(*A*) = 1 $\Rightarrow$ SCI. Soluciones: $x = -\lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ rg(*A*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

f) El sistema es equivalente a $\{x-y+z=0$ rg(*A*) = 1 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x = \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$

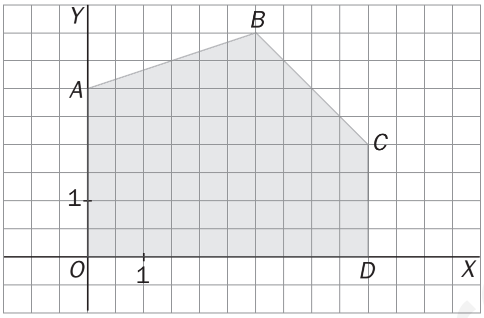
g) $|A| = -18 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema Compatible determinado. Solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rg(A) = 2 $\Rightarrow$ Sistema Compatible indeterminado.

Soluciones: $z = \lambda,\ w = \mu \Rightarrow \begin{cases} x + y = -\lambda - \mu \\ x - y = -\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow x = -\lambda,\ y = -\mu,\ z = \lambda,\ w = \mu$

Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

3.44. Calcula las ecuaciones de las rectas que limitan el recinto sombreado de la figura.



Los vértices son los puntos: $O(0, 0)$ $A(0, 3)$ $B(3, 4)$ $C(5, 2)$ $D(5, 0)$.

Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + b$.

Recta OA: $x = 0$

Recta AB: $\begin{cases} b = 3 \\ 3m + b = 4 \end{cases}$ $m = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 3 \Rightarrow x - 3y + 9 = 0$

Recta BC: $\begin{cases} 3m + b = 4 \\ 5m + b = 2 \end{cases}$ $m = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{-2} = -1$, $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-14}{-2} = 7 \Rightarrow y = -x + 7 \Rightarrow x + y - 7 = 0$

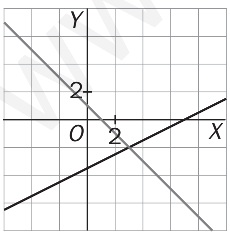
Recta CD: $x = 5$

Recta DO: $y = 0$

3.45. Representa los sistemas propuestos y, a partir de sus gráficas, calcula las soluciones, si es posible.

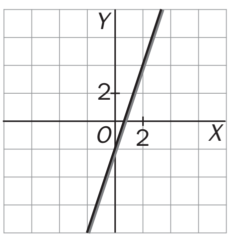
a) $\begin{cases} \mathbf{2x + 2y = 2} \\ \mathbf{-2x + 4y + 14 = 0} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{3x - y = 2} \\ \mathbf{-6x + 2y = -4} \end{cases}$

a)



La solución es el punto de corte: $x = 3$, $y = -2$.

b)



Como las rectas son coincidentes, las soluciones son todos los puntos de las mismas: $x = \lambda,\ y = -2 + 3\lambda$

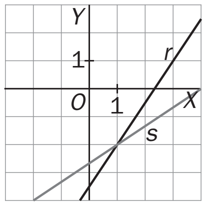
3.46. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas.

a) $r: 3x - 2y = 7 \quad s: 2x - 3y = 8$ **c)** $r: x + y = 7 \quad s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

b) $r: 2x - y - 5 = 0 \quad s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$ **d)** $r: y = -2x + 3 \quad s: y = \frac{x}{2}$

Representa gráficamente cada apartado.

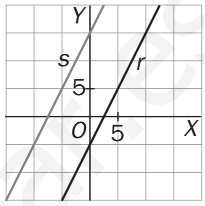
Se plantea el sistema formado por las ecuaciones de las rectas y se estudia su compatibilidad.



a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \underset{F_2 = 3F_2 - 2F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCD. Solución única: $x = 1$, $y = -2$

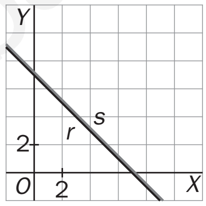
Las rectas son secantes y se cortan en el punto $P(1, -2)$.



b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + y = 15 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 15 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 + F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

rg(A) = 1 y rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

Las rectas son paralelas.

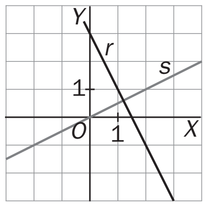


c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ -x - y = -7 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & -7 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 + F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 1 < n.º de incógnitas $\Rightarrow$ SCI

Infinitas soluciones: los puntos de la recta $x + y = 7$.

Las rectas son coincidentes.



d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = 2F_2 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \end{array}\right)$

rg(A) = rg(A^*) = 2 = n.º de incógnitas $\Rightarrow$ compatible determinado con solución única: $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{3}{5}$

Las rectas son secantes y se cortan en el punto $P\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

3.47. Calcula los valores de *k* para que las rectas *r* y *s* de ecuaciones:

***r*: $(2k - 2)x - y = -2k$** ***s*: $(k - 1)x + (k + 1)y = 17$**

a) Sean paralelas. **b) Sean secantes.**

a) El sistema $\begin{cases} (2k - 2)x - y + 2k = 0 \\ (k - 1)x + (k + 1)y - 17 = 0 \end{cases}$ debe ser incompatible. Para ello, rg(A) = 1 $\neq$ rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$

$(A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 2k - 2 & -1 & -2k \\ k - 1 & k + 1 & 17 \end{array}\right) \quad |A| = (2k - 2)(k + 1) + k - 1 = 2k^2 + k - 3 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = -\frac{3}{2}$

CASO I. $k = 1$ $\quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 17 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 y rg(A^*) = 2. Las rectas son paralelas.

CASO I. $k = -\frac{3}{2}$ $\quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -1 & -3 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 17 \end{array}\right)$ rg(A) = 1 y rg (A^*) = 2. Las rectas son paralelas.

b) Son secantes cuando el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ $k \neq 1$, $k \neq -\frac{3}{2}$, ya que en ese caso rg(A)=2 = rg (A^*).

3.48.(PAU) En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la información, diez estudian Comunicación audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian Tecnologías de la información, tres estudian Francés. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

x : alumnos Tecnología de la información

y : alumnos Comunicación audiovisual

z : alumnos Francés

$$\begin{cases} x+y+z=35 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=35 \\ 10x-3y=0 \\ 3x-2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 10 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-10F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -13 & -10 & -350 \\ 0 & -3 & -5 & -105 \end{array}\right) \underset{F_3=13F_3-3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & -13 & -10 & -350 \\ 0 & 0 & -35 & -315 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 9,\ y = 20,\ x = 6$

Por tanto, 6 alumnos estudian Tecnología de la información, 20 Comunicación audiovisual y 9 Francés.

3.49. (PAU)En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada.

Los hay de tres tipos:

– Sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros.

– Con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores.

– Con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto.

Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

x : pantalones sin defecto

y : con defecto no apreciable

z : con defecto apreciable.

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ 20x+16y+8z=1280 \\ y+z=\dfrac{4}{10}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ 5x+4y+2z=320 \\ 2x-5y-5z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-5F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$x = 50,\ y = 15,\ z = 5 \Rightarrow$ Hay 50 sin defecto, 15 con defecto no apreciable y 5 con defecto apreciable.

3.50. Escribe la expresión de un polinomio de tercer grado $P(x)$ de forma que:

$$\boldsymbol{P(0) = 0 \quad P(1) = 0 \quad P(-1) = 2 \;\; \text{y} \;\; P(-2) = -6}$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 2 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + b - c = 2 \\ 4a - 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ 3a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$$

El polinomio es: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$

3.51. (PAU) En una papelería entran tres clientes: el primero compra cuatro lapiceros y seis gomas de borrar y paga 1,60 euros; el segundo compra cinco lapiceros y tres bolígrafos y paga 2,45 euros, y el tercero paga 1,30 euros por cinco gomas de borrar y dos bolígrafos.

a) Averigua el precio de cada uno de los productos.

b) ¿Cuánto deberá pagar otro cliente por cinco lapiceros, cinco gomas de borrar y diez bolígrafos?

a) x precio de cada lapicero

y precio de cada goma de borrar

z precio de cada bolígrafo

$$\begin{cases} 4x + 6y = 1{,}6 \\ 5x + 3z = 2{,}45 \\ 5y + 2z = 1{,}3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 5 & 0 & 3 & 2{,}45 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \underset{F_2 = 2F_2 - 5F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \\ 0 & -15 & 6 & 0{,}9 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 + 3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 5 & 2 & 1{,}3 \\ 0 & 0 & 12 & 4{,}8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0{,}25 \;\; y = 0{,}1 \;\; z = 0{,}4 \Rightarrow$ Cada lapicero cuesta 0,25 €; cada goma de borrar, 0,10 € y cada bolígrafo, 0,40 €.

b) El nuevo cliente deberá pagar $5 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}10 + 10 \cdot 0{,}40 = 5{,}75$ €.

3.52. (PAU) Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de otro producto *B*. Mezclando los productos *A* y *B* se obtienen diferentes perfumes. Este año se quieren preparar dos clases de perfume: el de la primera clase llevará tres partes de *A* y una de *B*, y será vendido a 50 euros el L, y el de la segunda clase llevará los productos *A* y *B* al 50% y será vendido a 60 euros el L.

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

a) x : número de litros que se preparará de la primera clase.

y : número de litros que se preparará de la segunda.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{y}{2} = 600 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2400 \\ x + 2y = 1600 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2400 \\ 1 & 2 & 1600 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1600 \\ 3 & 2 & 2400 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1600 \\ 0 & -4 & -2400 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 400 \quad y = 600$

Se prepararán 400 L del perfume de la primera clase y 600 del de la segunda.

b) El ingreso total que se obtendrá: $I = 400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56000$ €.

3.53. (PAU) En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros, pero el dependiente informa al cliente de que los libros están rebajados el 6%, y las pulseras, el 12%, por lo que en realidad debe pagar 31,40 euros.
a) ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera?
b) ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

a) x : precio inicial del libro

y :precio de la pulsera

$$\begin{cases} 0{,}94x + 0{,}88y = 31{,}4 \\ x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}94 & 0{,}88 & 31{,}4 \\ 1 & 1 & 35 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 35 \\ 0{,}94 & 0{,}88 & 31{,}4 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 0{,}94F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 35 \\ 0 & -0{,}06 & -1{,}5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 10,\ y = 25$

Por tanto, el libro marcaba 10 € y la pulsera, 25 €.

b) Finalmente, se ha pagado 9,4 € por el libro y 22 € por la pulsera.

3.54. Halla un número de tres cifras sabiendo que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y que, por último, el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que este.

Llamando x a las centenas, y a las decenas, z a las unidades.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ 100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 198 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ -3z = -12 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 6,\ y = 2,\ z = 4$$

El número buscado es el 624.

3.55. (PAU) Determina la medida de cuatro pesas de una balanza si se sabe que pesadas en grupos de tres dan como resultados respectivos 9, 10, 11 y 12 g.

Si $x_1,\ x_2,\ x_3$ y x_4 son las medidas de las pesas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \underset{F_4 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 + F_2}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 = F_4 + F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

$x_1 = 2$ g, $x_2 = 3$ g, $x_3 = 4$ g, $x_4 = 5$ g

3.56. Tres arroyos diferentes surten de agua a un depósito de agua destinada al consumo humano.
El primero y el segundo juntos tardan 63 horas en llenarlo; el primero y el tercero juntos, 70 horas, y el segundo y el tercero, 90 horas.
a) Calcula el tiempo que tardará en llenar el estanque cada uno de los arroyos por separado.
b) Calcula el tiempo que tardarán los tres arroyos juntos en llenar el estanque.

a) Si el primero tarda *x* horas, el segundo *y* horas y el tercero *z* horas, en una sola hora cada uno de ellos llenaría $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ del estanque respectivamente.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{63} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{70} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{90} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{x} \quad b=\frac{1}{y} \quad c=\frac{1}{z} \begin{cases} a+b=\frac{1}{63} \\ a+c=\frac{1}{70} \\ b+c=\frac{1}{90} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{70} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{90} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{630} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{90} \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{63} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{630} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{105} \end{array}\right)$$

Por tanto $a=\frac{1}{105}$,$b=\frac{2}{315}$, $c=\frac{1}{210}$ $\Rightarrow$ *x* = 105 horas, *y* = 157,5 horas, *z* = 210 horas

b) Los arroyos tardarán: $\dfrac{1}{\frac{1}{105}+\frac{1}{157{,}5}+\frac{1}{210}} \approx$ 48 horas 28 minutos

3.57. (PAU) Dado el sistema $\begin{cases} \mathbf{2x+y+3z=5} \\ \mathbf{x-2y+z=1} \end{cases}$**:**
a) Añade una tercera ecuación para que sea incompatible.
b) Añade una tercera ecuación para que sea compatible determinado.
c) Añade una tercera ecuación para que sea compatible indeterminado.

a) Se escribe una ecuación cuyo primer miembro sea, por ejemplo, la suma de los de las dos ecuaciones dadas y que el término independiente sea diferente de la suma de los términos independientes de las ecuaciones dadas:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ 3x-y+4z=0 \end{cases}$$

b) Se escribe una ecuación linealmente independiente de las dos dadas: $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$

c) Se escribe una ecuación que sea, por ejemplo, suma de las dos dadas: $\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ x-2y+z=1 \\ 3x-y+4z=6 \end{cases}$

3.58. a) Escribe razonadamente un sistema compatible indeterminado y que tenga cuatro ecuaciones y tres incógnitas.

b) Escribe razonadamente un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas y de forma que (−2, 1, 0) sea una solución.

a) Una forma de conseguirlo es escribir dos ecuaciones independientes, la siguiente igual a la suma de las dos primeras y la última igual a la diferencia de las dos primeras. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=2 \\ 3x+2y+z=3 \\ -x+z=-1 \end{cases}$

b) Se escriben dos ecuaciones independientes cuya solución sea (−2, 1, 0) y otra que sea la suma de las dos primeras: $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases}$

3.59. Escribe de forma razonada:

a) Un sistema lineal de tres ecuaciones y dos incógnitas con infinitas soluciones.

b) Un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas y una única solución.

c) Un sistema lineal homogéneo con dos ecuaciones y tres incógnitas y cuya única solución sea (0, 0, 0).

d) Un sistema lineal homogéneo con tres ecuaciones y tres incógnitas, y dos de cuyas soluciones sean (−2, 0, 1) y (3, 2, −1).

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$. Las ecuaciones segunda y tercera son proporcionales a la primera.

b) No es posible ya que el rango de *A* no puede ser 3 para que coincida con el número de incógnitas.

c) No es posible ya que debería ser compatible determinado y para ello, el rango de *A* debería ser 3, y en este caso es imposible.

d) $\begin{cases} x=-2\lambda+3\mu \\ y=2\mu \\ z=\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 3 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+y-4z=0$

El sistema puede ser : $\begin{cases} 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ 2x-y+4z=0 \end{cases}$

3.60.(PAU) La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años. Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos, y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hermanos.

Si las edades actuales son x, y, z:

$$\begin{cases} x+y+z=63 \\ y-2=5+\dfrac{x-2+z-2}{3} \\ z+4=9+\dfrac{x+4+y+4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=63 \\ x-3y+z=-17 \\ x+y-5z=-33 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -3 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & -5 & -33 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -4 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & -6 & -96 \end{array}\right)$$

x = 27, y = 20, z = 16

Las edades actuales de los tres hermanos son 27, 20 y 16 años.

3.61. (PAU) En una población se han presentado dos partidos políticos *A* y *B,* a las elecciones municipales y se han contabilizado 6464 votos. Si 655 votantes del partido *A* hubiesen votado a *B*, ambos partidos habrían empatado a votos. La suma de votos no válidos y en blanco supone el 1% de los que han votado a *A* o a *B*. Halla el número de votos obtenidos por cada partido.

x : número de votos al partido *A*

y : número de votos al partido *B*

z : número de votos en blanco

$$\begin{cases} x+y+z=6464 \\ x-655=y+655 \Rightarrow 101z=6464 \Rightarrow z=64 \\ 100z=x+y \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=6400 \\ x-y=1310 \end{cases} \Rightarrow x=3855\ , y=2545$$

El partido *A* ha obtenido 3855 votos y el *B*, 2545.

3.62.(PAU) La producción de bicicletas de montaña precisa las siguientes acciones: montaje de las piezas, ajuste de los cambios y control de calidad. Una empresa produce tres tipos de bicicletas: para niños, para jóvenes y para adultos mayores de 40 años. La siguiente tabla muestra las horas necesarias para llevar a cabo cada una de las acciones en cada una de las clases de bicicleta mencionadas:

	Niño	Joven	Adulto
Montaje	2	4	3
Ajuste	1	2	2
Control	2	1	1

Por otra parte, se cuenta con la siguiente disponibilidad total de horas de trabajo:

Montaje: 510

Ajuste: 270

Control: 180

Comprueba si existe alguna posibilidad de fabricación que consuma todas las horas disponibles.

x : bicicletas de niño

y : de joven

z : de adulto

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=510 \\ x+2y+2z=270 \\ 2x+y+z=180 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 510 \\ 1 & 2 & 2 & 270 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 510 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & -3 & -2 & -330 \end{array}\right)$$

$z = 30$, $y = 90$ $\Rightarrow$ $2x + 4y + 3z = 510 \Rightarrow 2x + 360 + 90 = 510 \Rightarrow x = 30$

Fabricando 30 bicicletas de niño, 90 de joven y 30 de adulto mayor de 40 años, se consumen exactamente las horas disponibles.

Profundización

3.63. Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible.

a) $\begin{cases} 2x+2y-3z=6+a \\ y+z=6 \\ 3x+y-z=17 \\ 2y-z=a \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} ax-3y+z=-10 \\ ay+z=3 \\ -3x-3y+z=-10 \\ -3y+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x+ay-z=0 \\ y-z=0 \\ 2x+2ay+z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ x-y+3z=a \\ 2y+3z=7 \\ x-3z=-a \end{cases}$

a) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{array}\right)$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=15$ $|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 6+a \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -1 & a \end{vmatrix}=2(a-6)$

CASO I. $a \neq 6$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 6 rg(A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: x = 5 , y = 4 , z = 2

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$. Sus dos menores orlados de orden tres son:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2a-4,$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2a & 1 \end{vmatrix}=4a+8$ que son nulos sólo si a = −2.

CASO I. $a \neq 2$ rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial: $x=0$, $y=0$, $z=0$

CASO II. a = 2 rg(A) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x=3\lambda$, $y=2\lambda$, $z=2\lambda$

c) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & 1 & -10 \\ 0 & a & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$ $|A^*|=13(a+3)^2=0\Rightarrow a=-3$

CASO I. $a \neq -3 \Rightarrow$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = −3 Como $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=9\neq 0$ y $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} -3 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & -10 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -10 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 2 $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x=\dfrac{13}{3}$, $y=\dfrac{\lambda-3}{3}$, $z=\lambda$

d) $(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & -a \end{array}\right)$ $|A^*|=14-7a=0\Rightarrow a=2$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-19\neq 0$

CASO I. $a \neq 2 \Rightarrow$ rg(A^*) = 4 y rg(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible

CASO II. a = 2 $\Rightarrow$ rg (A) = rg(A^*) = 3 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: x = 1, y = 2, z = 1

3.64. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{5}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Haciendo $A=\dfrac{4}{x}$, $B=\dfrac{5}{y}$ y $C=\dfrac{3}{z}$, se obtiene el sistema: $\begin{cases} A+B=\dfrac{1}{4} \\ A+C=\dfrac{5}{12} \\ B+C=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$(A|A^*)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

Solución: $A=\dfrac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{6}$, $B=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{12} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{12}$, $C=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = 24,\ y = 60,\ z = 12$

3.65. Calcula los valores de *a* y *b* para que los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x+ay-3z=-9 \\ x+2y-z=-6 \\ 3x-y-z=b \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} ax-by+3z=14 \\ 2x+y+2z=6 \\ 4x-2y+z=11 \end{cases}$$

sean compatibles y equivalentes.

Se forma un nuevo sistema con las ecuaciones de los dos sistemas que no tienen parámetros:

$$\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ 2x+y+2z=6 \\ 4x-2y+z=11 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=25\neq 0 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

Esta es la solución de los dos sistemas. Por tanto, todas las ecuaciones deben verificarla:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 1+a\cdot(-2)-3\cdot 3=-9 \\ 3\cdot 1-(-2)-3=b \\ a\cdot 1-b\cdot(-2)+3\cdot 3=14 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1,\quad b=2$$

3.66. Encuentra los valores de *a* y *b* que hacen que el siguiente sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} 3x - 4y + z = a \\ -x + y + z = b \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible si rg(A) ≠ rg(A^*).

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right) \qquad |A| = 0 \ \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Por tanto, debe verificarse que $\begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 12 + 3a - 8b - 2a + 9b - 16 \neq 0 \Rightarrow a + b \neq 4$

El sistema es compatible si la suma de los valores de *a* y *b* es distinta de 4.

3.67. Discute el siguiente sistema según los diferentes valores de los parámetros a y b. Resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ ay + z = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \qquad |A| = a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = ab - 2 = 0$$

CASO I. $a = 1$, $b = 2$ $\quad (A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad$ rg(A) = rg (A^*) = 2 ⇒ Sistema compatible indeterminado

Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

CASO II. $a = 1$, $b \neq 2$ $\quad$ rg(A) = 2 y rg(A^*) = 3 ⇒ Sistema incompatible

CASO III. $a \neq 1$ $\quad$ rg(A) = rg(A^*) = 3 ⇒ Sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{a^2b - 3a + 1}{1 - a}$, $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{2 - b}{1 - a}$, $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}}{|A|} = -\dfrac{ab - 2}{1 - a}$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

3.1. Dadas las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

¿Qué ecuación de las siguientes debe añadirse a estas dos para que el sistema sea incompatible?

A) $4x - 2y + z = -2$

B) $4x - 2y + z = 2$

C) $z = \frac{2}{3}$

D) $x + y + z = 1$

E) $x + y + z = 2$

La respuesta correcta es la B. $4x - 2y + z = 2$, ya que se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tales que el rango de de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la ampliada 3, luego el sistema es incompatible.

3.2. El rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales es 2.

El rango de la matriz ampliada:

A) Es seguro que vale 2.

B) Es seguro que vale 3.

C) Puede valer 1 ó 2.

D) Puede valer 2 ó 3.

E) Puede valer 4.

La respuesta correcta es la D. puede valer 2 ó 3, ya que en un sistema de ecuaciones lineales, el rango de la matriz ampliada es siempre o igual o una unidad mayor que el rango de la matriz de coeficientes.

3.3. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 2 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$

A) Tiene como única solución ($x = 1$, $y = 1$, $z = 0$).

B) Una de sus soluciones es ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$).

C) Sus únicas soluciones son ($x = 1$, $y = 1$, $z = 0$) y ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$).

D) Es incompatible.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

La respuesta correcta es la B. una de sus soluciones es ($x = 2$, $y = 0$, $z = 2$), es un SCI porque
rg(A) = rg(B) = 2 < n.ºincóg = 3

3.4. Los valores que hacen que el sistema $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax - y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 3 \end{cases}$ no sea compatible determinado son:

A) $a = \frac{1}{3}$

B) $a = 1$

C) $a = 1$, $a = \frac{1}{3}$

D) $a = -1$

E) $a = -1$, $a = \frac{1}{3}$

La respuesta correcta es la C. $a = 1$, $a = \frac{1}{3}$, porque para que no sea un sistema compatible determinado, el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser diferente a 3, es decir, el determinante de A debe ser cero

3.5. El valor de m que hace que las rectas del plano r: $2x - 3y + 5 = 0$ y s: $-3x + my + 5 = 0$ sean paralelas es:

A) $m = 2$

B) $m = -2$

C) $m = 3$

D) $m = -3$

E) $m = \frac{9}{2}$

La respuesta correcta es la E. $m = \frac{9}{2}$, para que las rectas sean paralelas, el sistema debe ser incompatible.

Por tanto, los coeficientes de las incógnitas deben ser proporcionales pero los coeficientes independientes no deben guardar esta proporción.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

3.6. Las infinitas soluciones del sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$ son:

A) $x = 1 - \lambda$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \lambda$

B) $x = \lambda$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 1 - \lambda$

C) $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = -\lambda$

D) $x = 1 - \lambda$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \lambda$

E) El sistema no tiene infinitas soluciones

Las respuestas correctas son la A, $x = 1 - \lambda$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \lambda$, y la B, $x = \lambda$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 1 - \lambda$.

Al sustituir estos valores se verifican las 2 ecuaciones a la vez.

3.7. En un sistema de *n* ecuaciones lineales con *m* incógnitas:

A) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser incompatible.

B) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

C) Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema es compatible indeterminado.

D) Si $n = 2$, $m = 3$ y el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado.

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

Las respuestas correctas son la B. Si $n = 2$ y $m = 3$, entonces el sistema no puede ser compatible determinado, ya que el rango de la matriz de coeficientes no puede ser 3 y la D) si $n = 2$, $m = 3$ y el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado ya que posee la solución trivial y ,por tanto, no puede ser incompatible.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

3.8. Se considera un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) El rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es 2.

b) El sistema es compatible determinado.

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Ninguna de las dos afirmaciones se puede verificar.

La respuesta correcta es la D. *a* y *b* no se pueden dar a la vez. Para que un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas sea compatible determinado, debe verificar como única condición que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3.

Señala el dato innecesario para contestar:

3.9. Se quiere resolver el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Para ello se dan los siguientes datos:

a) Las dos primeras ecuaciones son $2x + y - z = 0$ y $3x + y + z = 1$.

b) El sistema tiene una única solución.

c) El determinante de la matriz de los coeficientes vale −3.

d) El determinante cuya primera columna son los coeficientes independientes y cuyas segunda y tercera columnas son los coeficientes de la segunda y tercera incógnita, respectivamente, vale −3.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es la B. Puede eliminarse el dato b, ya que si el determinante de la matriz de coeficientes es –3, el rango de dicha matriz vale 3 y, por tanto, con seguridad el sistema es compatible determinado.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

3.10. Se quiere estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Se conoce que:

a) La matriz de los coeficientes del sistema es una matriz escalonada con un número de filas no nulas igual al número de incógnitas del sistema.

b) El rango de la matriz ampliada es igual al número de incógnitas.

A) Tanto la información a como la b son suficientes, por sí solas, para establecer que el sistema es compatible determinado

B) Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información a es suficiente por sí sola, pero la b no.

C) Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información b es suficiente por sí sola, pero la a no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

La respuesta correcta es la B. Para establecer que el sistema es compatible determinado, la información a es suficiente por sí sola(gracias al método de Gauss), pero la b no, ya que el rango de la matriz de los coeficientes puede ser igual al número de incógnitas disminuido en una unidad.

4 Programación lineal

ACTIVIDADES INICIALES

4.I. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \leq 2 - x$

b) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2}$

a) $3x + 6x - 15 - 4x + 8 \leq 2 - x$

$3x + 6x - 4x + x \leq 2 + 15 - 8$

$6x \leq 9,\ x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$ Solución: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

b) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2}$

$\frac{3x}{6} - \frac{x-1}{6} > \frac{6}{6} - \frac{6x-15}{6}$

$3x - x + 1 > 6 - 6x + 15$

$3x - x + 6x > 6 + 15 - 1$

$8x > 20\ \ x > \frac{5}{2} \Rightarrow$ Solución: $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

4.II. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$

a) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$

$\frac{4x-12}{8} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{4x}{8}$

$4x - 12 - x + 2 \leq 4x$

$-x \leq 12 - 2$

$x \geq -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \frac{x}{2} > x + \frac{3x+1}{6}$

$\frac{12x}{6} - \frac{18}{6} - \frac{3x}{6} > \frac{6x}{6} + \frac{3x+1}{6}$

$12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1$

$12x - 3x - 6x - 3x > 1 + 18$

$0 > 19 \Rightarrow$ No tiene solución.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

4.1. Representa los semiplanos determinados por las siguientes expresiones.

a) $y \le -4$

b) $3x \ge 6$

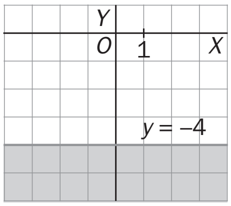
c) $2x - 4y < 6$

d) $2(3x - 5) + (4y - 2) < 2$

e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} < 1$

f) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{2} \ge -6$

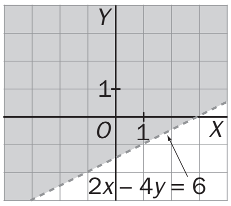
a)



Semiplano con borde.

El borde es una recta horizontal.

c)

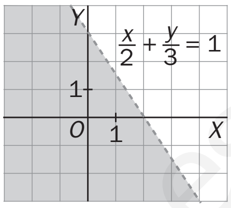


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(3, 0)$ y $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

e)

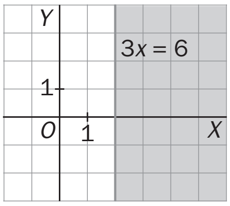


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(2, 0)$ y $(0, 3)$

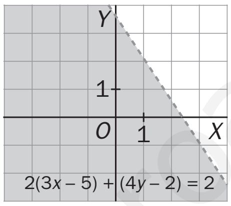
b)



Semiplano con borde.

El borde es una recta vertical.

d)

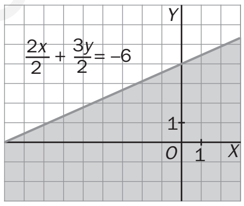


Semiplano sin borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(-1, 5)$ y $(1, 2)$

f)



Semiplano con borde.

Puntos del borde del semiplano:

$(0, 4)$ y $(-9, 0)$

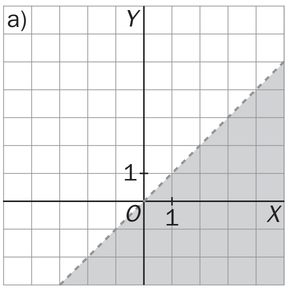
4.2. Comprueba si los puntos siguientes están o no a un mismo lado de la recta: $3x + 5y - 4 = 0$.

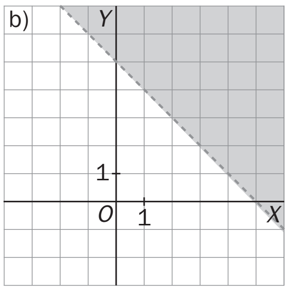
a) $A(-3,0)$ **y** $B(4,2)$ **b)** $A(2, -3)$ **y** $B(1, -2)$

a) $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 - 4 = -13 < 0$ $3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 4 = 18 > 0 \Rightarrow$ *A* y *B* están a diferente lado de *r*.

b) $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) - 4 = -13 < 0$ $3 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 4 = -11 < 0 \Rightarrow$ *A* y *B* están a un mismo lado de *r*.

4.3. Establece las expresiones algebraicas que determinan cada uno de los siguientes semiplanos.





a) $x > y$

b) $x + y > 5$

4.4. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa la solución, calcula las coordenadas de sus vértices e indica si es o no acotada.

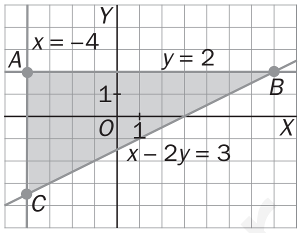
a) $\begin{cases} y \le 2 \\ x \ge -4 \\ x - 2y \le 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \ge -2 \\ y \le 5 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y \le 15 \\ 4x + y \le 16 \\ x - y \le 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \le 0 \\ x - y \ge -3 \\ x \le 3 \end{cases}$

a) Solución acotada.

$$A: \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 2)$$

$$B: \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(7, 2)$$

$$C: \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-4, -\frac{7}{2})$$

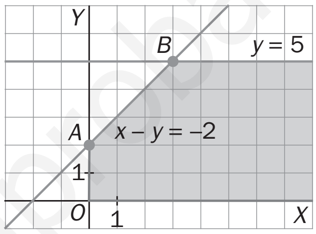


b) Solución no acotada.

$$A: \begin{cases} x - y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$$

$$B: \begin{cases} y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(3, 5)$$

$O(0, 0)$



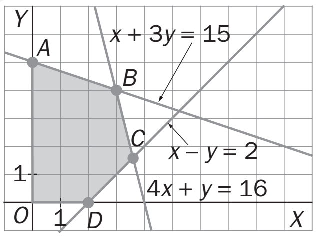
c) Solución acotada.

$$A: \begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$$

$$B: \begin{cases} 4x + y = 16 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow B(3, 4)$$

$$C: \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{18}{5}, \frac{8}{5})$$

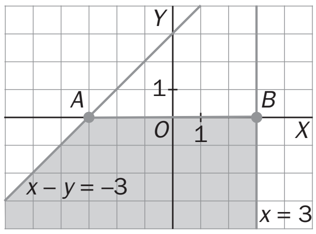
$$D: \begin{cases} y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow D(2, 0), \quad O(0, 0)$$



d) Solución no acotada.

$$A: \begin{cases} y = 0 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 0)$$

$$B: \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B(3, 0)$$



4.5. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal.

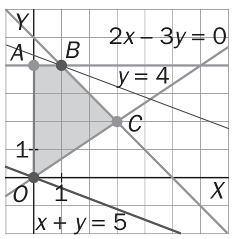
Max y Min $z = 3x + 8y$ sujeto a: $\begin{cases} 2x - 3y \le 0 \\ x + y \le 5 \\ y \le 4 \quad x \ge 0 \end{cases}$

Vértices: C: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3, 2)$, B: $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(1, 4)$, $A(0, 4)$, $O(0, 0)$

Valor de la función objetivo en los vértices:

$z_A = 32$; $z_B = 35$; $z_C = 25$; $z_O = 0$

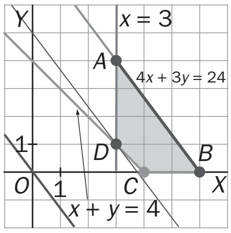
El máximo se obtiene en $x = 1$, $y = 4$, y vale 35, y el mínimo, en $x = 0$, $y = 0$, y vale 0.



4.6. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal.

Max y Min $z = 10x + 7{,}5y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x \geq 3 \quad y \geq 0 \end{cases}$$



Vértices:

A: $\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A(3,\ 4)$ B: $\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(6,\ 0)$

C: $\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4,\ 0)$ D: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow D(3,\ 1)$

Valor de la función objetivo en los vértices:

$z_A = 60$ $z_B = 60$ $z_C = 40$ $z_D = 37{,}5$

El mínimo se obtiene en $x = 3$, $y = 1$, y vale 37,5.

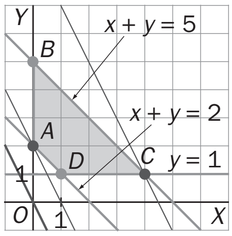
El máximo se encuentra en cualquiera de los puntos pertenecientes al segmento de extremos A y B, y vale 60.

4.7. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema.

Max y Min $z = 10x + 5y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \quad y \geq 1 \end{cases}$$

La región factible es acotada.



La pendiente de la función objetivo es negativa.

El mínimo se obtiene en el vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 2$

El valor mínimo de la función es $z = 10$.

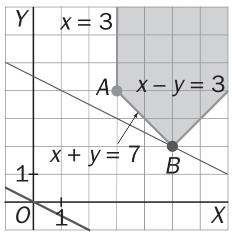
El máximo se obtiene en el vértice C: $\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ y = 1$

El valor máximo de la función es $z = 45$.

4.8. Resuelve de forma gráfica el siguiente problema.

Max y Min $z = x + 2y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \geq 7 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 3 \quad y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es negativa.

El mínimo se obtiene en el vértice B: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 2$

El valor mínimo de la función es $z = 9$.

Cuando la recta variable se mueve hacia arriba, nunca deja de tocar puntos de la región factible.

Por tanto, no existe solución óptima para el máximo.

4.9. (PAU) En un comercio se vende café con dos tipos de mezcla, M_1 y M_2. La mezcla M_1 lleva dos partes de café natural y una parte de café torrefacto, y la mezcla M_2, una parte de café natural y dos partes de café torrefacto. Por cada kilo de M_1 se obtiene un beneficio de 1,10 euros, y por cada kilo de M_2 se obtiene un beneficio de 1,30 euros. Se cuenta con 35 kg de café natural y 40 kg de café torrefacto para mezclar. ¿Cuántos kilos de cada mezcla se deben preparar para que las ganancias sean máximas?

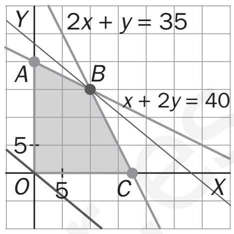
x : kg de M1, y : kg de M2 Función objetivo: $z = 1{,}10x + 1{,}30y$ Restricciones: $\begin{cases} 2x + y \le 35 \\ x + 2y \le 40 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

Vértices:

A: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 20) \Rightarrow z_A = 26$,

B: $\begin{cases} x + 2y = 40 \\ 2x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow B(10,\ 15) \Rightarrow z_B = 30{,}5$

C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow C(17{,}5;\ 0) \Rightarrow z_C = 19{,}25$



El máximo se alcanza en el vértice B, es decir, cuando se preparan 10 kg de M1 y 15 kg de M2.

La ganancia máxima es de 30,50 €.

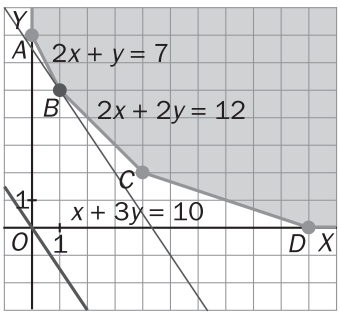
4.10. (PAU) Para la elaboración de un alimento para el ganado, una empresa láctea puede adquirir dos productos básicos, P_1 y P_2, y mezclarlos. La tabla siguiente muestra las unidades de nutrientes A, B y C que tiene cada kg de P_1 y P_2, las cantidades mínimas de A, B y C necesarias para que el producto sea adecuado y el coste, en unidades monetarias, de cada kg de P_1 y P_2:

	A	B	C	Precio
P_1	2	2	1	3
P_2	1	2	3	2
C. mínimas	7	12	10	

Halla la mejor mezcla de forma que el coste sea mínimo.

x :kg de P_1, y : kg de P_2 Función objetivo: $z = 3x + 2y$

Restricciones: $\begin{cases} 2x + y \ge 7 \\ 2x + 2y \ge 12 \\ x + 3y \ge 10 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ El mínimo se alcanza en el vértice



B : $\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow B(1, 5)$.

Es decir, se debe mezclar 1 kg de P_1 con 5 de P_2. El coste será de 13 unidades monetarias.

EJERCICIOS

Sistemas de inecuaciones lineales

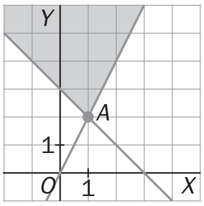
4.11. Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales, representa el recinto correspondiente a la solución y calcula las coordenadas de sus vértices. Indica si es o no acotado.

a) $\begin{cases} \mathbf{x+y\geq 3} \\ \mathbf{2x-y\leq 0} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x-1\geq 0} \\ \mathbf{y-1\geq 0} \\ \mathbf{x+y\geq 4} \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} \mathbf{3x-4y\leq -12} \\ \mathbf{3x+4y\leq 12} \\ \mathbf{y\geq -3} \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} \mathbf{x+3y\leq 15} \\ \mathbf{x+y\leq 7} \\ \mathbf{3x+y\leq 15} \\ \mathbf{x\geq 0\ \ y\geq 0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x-2y\geq 0} \\ \mathbf{2x+3y\leq 7} \\ \mathbf{y\geq 0} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \mathbf{3x+2y\leq 0} \\ \mathbf{y\geq x} \\ \mathbf{5x+6y\leq 8} \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \mathbf{y\leq 4} \\ \mathbf{x+3y\leq 15} \\ \mathbf{x\leq 6} \\ \mathbf{x\geq 0\ \ y\geq 0} \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \mathbf{y\leq x+3} \\ \mathbf{y\leq -x+9} \\ \mathbf{x+y\leq 3} \\ \mathbf{y\geq x-3} \\ \mathbf{x\geq 1\ x\leq 5} \end{cases}$

a) Recinto no acotado.

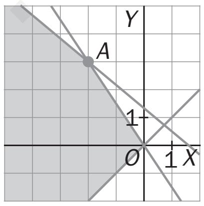
$A:\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,\ 2)$



d) Recinto no acotado.

$A:\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x+6y=8 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ A(-2,\ 3)$



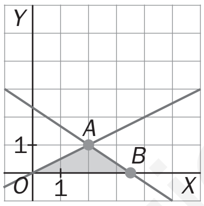
b) Recinto acotado.

$A:\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A(2,\ 1)$

$B:\begin{cases} y=0 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\left(\dfrac{7}{2},\ 0\right);\ O(0,\ 0)$

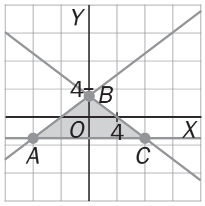


e) Recinto acotado.

$A:\begin{cases} y=-3 \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow\ A(-8,\ -3)$

$C:\begin{cases} y=-3 \\ 3x+4y=12 \end{cases} \Rightarrow\ C(8,\ -3)$

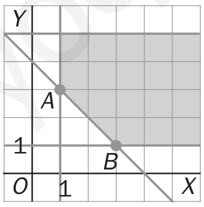
$B:\begin{cases} 3x-4y=-12 \\ 3x+4y=12 \end{cases} \Rightarrow\ B(0,\ 3)$



c) Recinto no acotado.

$A:\begin{cases} x=1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow\ A(1,\ 3)$

$B:\begin{cases} y=1 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow\ B(3,\ 1)$



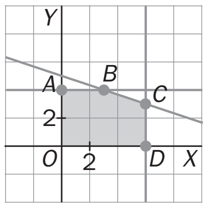
f) Recinto acotado.

$A:\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow\ A(0,\ 4)$

$B:\begin{cases} x+3y=15 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow\ B(3,\ 4)$

$C:\begin{cases} x+3y=15 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow\ C(6,\ 3)$

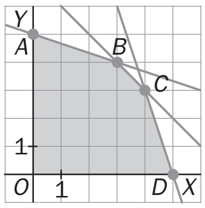
$D:\begin{cases} y=0 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow\ D(6,\ 0);\ \ O(0,\ 0)$



g) Recinto acotado.

$A:\begin{cases} x+3y=15 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow\ A(0,\ 5);\ B:\begin{cases} x+3y=15 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow\ B(3,\ 4);\ \ C:\begin{cases} 3x+y=15 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow\ C(4,\ 3)$

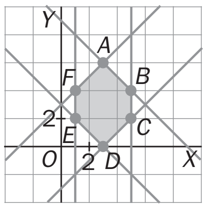
$D:\begin{cases} 3x+y=15 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow\ D(5,\ 0);\ \ O(0,\ 0)$



h) Recinto acotado.

$A:\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x+9 \end{cases} \Rightarrow\ A(3,\ 6);\ B:\begin{cases} y=-x+9 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow\ B(5,\ 4);\ \ C:\begin{cases} y=x-3 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow\ C(5,\ 2);$

$D:\begin{cases} y=x-3 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow\ D(3,\ 0)\ \ E:\begin{cases} x+y=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow\ E(1,\ 2);\ \ F:\begin{cases} x=1 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow\ F(1,\ 4)$



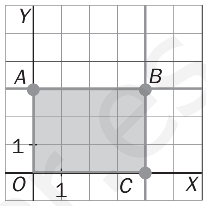
4.12. **Para cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones, representa la solución e indica si alguna de las ecuaciones que lo forman es redundante.**

a) $\begin{cases} x \le 4,\ x \le 6 \\ y \le 4,\ y \le 3 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y \le x+6 \\ 4x+y \le 12 \\ x \le 4 \\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \le x+2 \\ x+y \le 6 \\ x \le 4 \\ x+2y \ge 4 \\ x \ge 0\ ,y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \ge -2x+4 \\ x+y \ge 3 \\ 2y+x \ge 4 \\ x+y \ge 2 \\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0 \end{cases}$

a) Las inecuaciones $x \le 6$ e $y \le 4$ son redundantes. Se puede prescindir de ellas.

$A: \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3)$ $C: \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(4, 0)$

$B: \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(4, 3)$ $O(0, 0)$

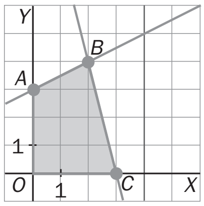


b) La inecuación $x \le 4$ es redundante. Se puede prescindir de ella.

$A: \begin{cases} 2y = x+6 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3)$

$B: \begin{cases} 2y = x+6 \\ 4x+y=12 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$

$C: \begin{cases} 4x+y=12 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(3, 0)$



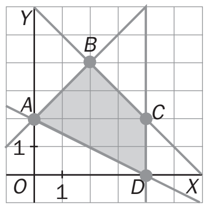
c) Las inecuaciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ son redundantes. Se puede prescindir de ellas.

$A: \begin{cases} y = x+2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 2)$

$B: \begin{cases} y = x+2 \\ x+y=6 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$

$C: \begin{cases} x+y=6 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow C(4, 2)$

$D: \begin{cases} x=4 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow D(4, 0)$



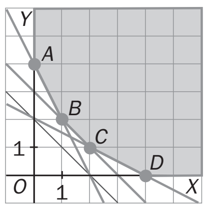
d) La inecuación $x + y \ge 2$ es redundante. Se puede prescindir de ella.

$A: \begin{cases} y = -2x+4 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 4)$

$B: \begin{cases} y = -2x+4 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow B(1, 2)$

$C: \begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow C(2, 1)$

$D: \begin{cases} x+2y=4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(4, 0)$



4.13. Se considera el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y \le 8} \\ \boldsymbol{2x + y \le 7} \\ \boldsymbol{0 \le x \le 3, \ \ y \ge 0} \end{cases}$$

Comprueba si la intersección de las rectas $x + 2y = 8$ y $x = 3$ es o no vértice del recinto solución.

El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(3, \ \dfrac{5}{2}\right)$

Este punto no es vértice del recinto solución, ya que no verifica la segunda inecuación del sistema:

$2 \cdot 3 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{17}{2} > 7$

4.14. Se considera el sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y \le 7} \\ \boldsymbol{2x + y \le 7} \\ \boldsymbol{3x - y \le 7, \ x \ge 0, \ y \ge 0} \end{cases}$$

Comprueba si la intersección de las rectas $2x + y = 7$ y $3x - y = 7$ es o no vértice del recinto solución.

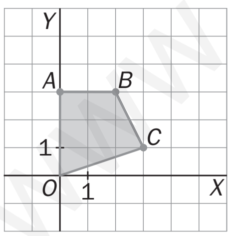
El punto de intersección de las dos rectas es: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$

Este punto es vértice del recinto solución, ya que verifica todas las inecuaciones del sistema:

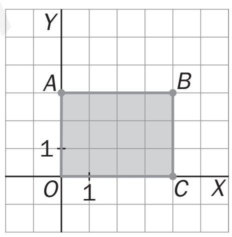
$\dfrac{14}{5} - \dfrac{14}{5} = 0 \le 4$, $\dfrac{14}{5} \ge 0$, $\dfrac{7}{5} \ge 0$

4.15. Escribe en cada caso un sistema de inecuaciones lineales que tenga como recinto solución la figura sombreada.

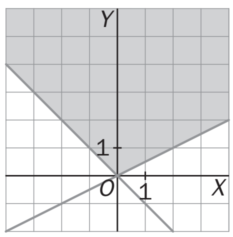
a)



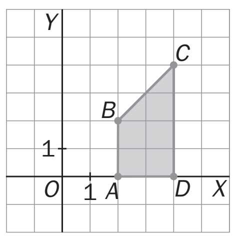
b)



c)



d)



a) $\begin{cases} x \ge 0 \quad y \le 3 \\ 2x + y \le 7 \\ 3y \ge x \end{cases}$

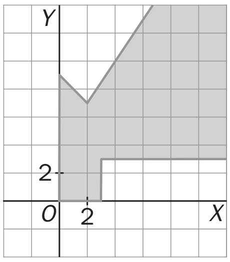
b) $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \ge 0 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$

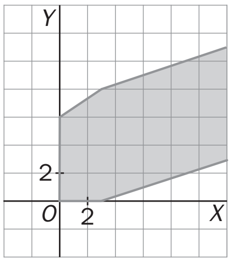
d) $\begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ y \le x \\ y \ge 0 \end{cases}$

4.16. En cada caso, indica si la región sombreada es acotada o no y si es convexa o no.

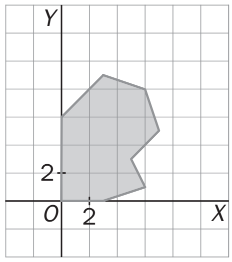
a)



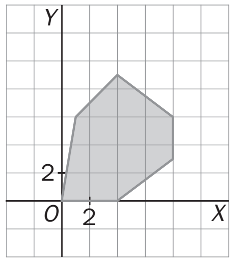
b)



c)



d)

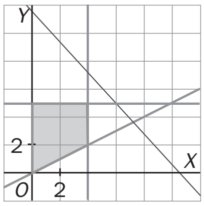


a) No acotada. No convexa b) No acotada. Convexa c) Acotada. No convexa d) Acotada. Convexa

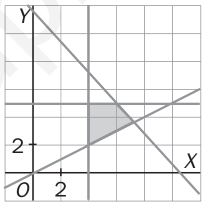
4.17. Dibuja en cada caso la región determinada por las siguientes condiciones. Señala también si existe alguna condición redundante o no.

a) $\begin{cases} y \le 5 \\ x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y \le 5 \\ x \le 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \ge 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \le 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \ge 5 \\ x \ge 4 \\ x - 2y \le 0 \\ x + y \le 11 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$

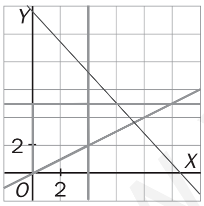
a) La condición $x + y < 11$ es redundante.



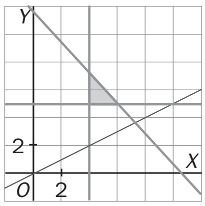
c) Las condiciones $x \ge 0$ e $y \ge 0$ son redundantes.



b) La región es vacía.

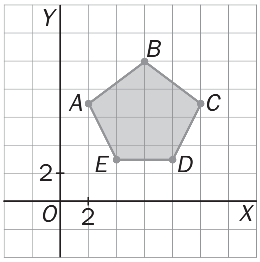


d) Las condiciones $x \ge 0$, $y \ge 0$ y $x - 2y \le 0$ son redundantes



Método analítico para resolver problemas de programación lineal

4.18. Evalúa la función objetivo $z = \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}y$ en los vértices del recinto de la figura.



Los vértices del recinto son: $A(2, 7)$, $B(6, 10)$, $C(10, 7)$, $D(8, 3)$, $E(4, 3)$.

El valor de la función objetivo en ellos es:

$z_A = \frac{52}{3}$ $z_B = \frac{79}{3}$ $z_C = \frac{64}{3}$ $z_D = 11$ $z_E = 9$

4.19. (PAU) Resuelve de forma analítica los siguientes problemas de programación lineal.

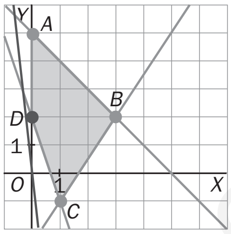
a) Min $z = 9x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ 3x + y \ge 2 \\ 3x - 2y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $z = 4x + 5y$ sujeta a:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} \le 1 \\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{8} \ge 1 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{4} \ge 1 \end{cases}$$

a) Vértices:



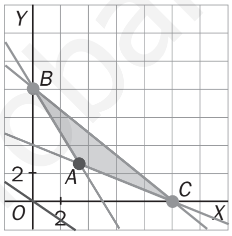
$$A: \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,5) \qquad C: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(1,-1)$$

$$B: \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(3,2) \qquad D: \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0,2)$$

Valor de la función objetivo: $z_A = 5$, $z_B = 29$, $z_C = 8$, $z_D = 2$.

El mínimo se obtiene en $x = 0$, $y = 2$, y vale 2.

b) Vértices:



$$A: \begin{cases} 8x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right), C: \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow C(10,0)$$

$$B: \begin{cases} 4x + 5y = 40 \\ 8x + 5y = 40 \end{cases} \Rightarrow B(0,8)$$

Valor de la función objetivo: $z_A = \dfrac{80}{3}$, $z_B = 40$, $z_C = 40$.

El mínimo se obtiene en $x = \dfrac{10}{3}$, $y = \dfrac{8}{3}$, y vale $\dfrac{80}{3}$.

4.20. (PAU) Resuelve de forma analítica los siguientes problemas de programación lineal.

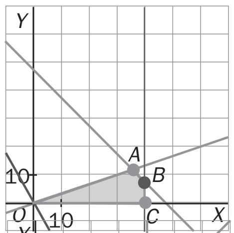
a) Max $z = 5x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + y \le 48 \\ 3y \le x \\ x \le 40 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $z = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 3x + 4y \ge 12 \\ x \ge y \\ x \le 20,\ y \le 10 \end{cases}$$

a) Vértices:



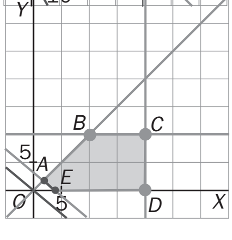
$$A: \begin{cases} x + y = 48 \\ 3y = x \end{cases} \Rightarrow A(36,12) \quad C: \begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(40,0)$$

$$B: \begin{cases} x = 40 \\ x + y = 48 \end{cases} \Rightarrow B(40,8) \qquad O(0,\ 0)$$

Valor de la función objetivo en los vértices: $z_A = 228$, $z_B = 232$, $z_C = 200$, $z_O = 0$

El máximo se obtiene en $x = 40$, $y = 8$, y vale 232.

b) Vértices:



$$A: \begin{cases} x = y \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) \qquad C: \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(20,10)$$

$$E: \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Rightarrow E(4,0) \qquad B: \begin{cases} x = y \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(10,10)$$

$$D: \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(20,0)$$

Valor de la función objetivo en los vértices: $z_A = 2$, $z_B = \dfrac{35}{3}$, $z_C = \dfrac{50}{3}$, $z_D = 10$, $z_E = 2$

El mínimo se obtiene en cualquier punto del segmento de extremos A y E, y vale 2.

Método gráfico para resolver problemas de programación lineal

4.21. (PAU) Resuelve de forma gráfica los siguientes problemas de programación lineal.

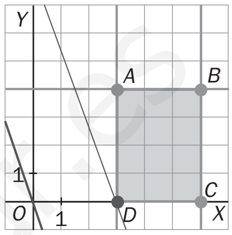
a) Min $z = 12x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

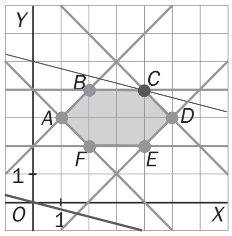
b) Max $z = 10x + 30y$ sujeta a:

$$\begin{cases} 4 \le x + y \le 8 \\ -2 \le x - y \le 2 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

a) La región factible es acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en el vértice *D*: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 0$, y vale $z = 36$.



b) La región factible es acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El máximo se obtiene en el vértice *C*: $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 4,\ y = 4$, y vale $z = 160$.



4.22. (PAU) Resuelve de forma gráfica los siguientes problemas de programación lineal.

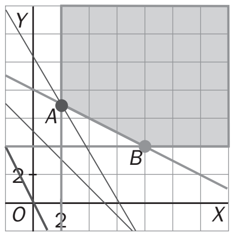
a) Máximo y mínimo de $z = 2x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 4 \\ x + y \ge 5 \\ x + 2y \ge 16 \end{cases}$$

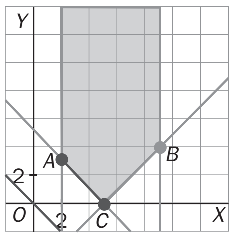
b) Máximo y mínimo de $z = x + y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 9 \\ x + y \ge 5 \\ x - 2y \le 5 \end{cases}$$

a) La región factible es no acotada.
La condición $x + y \ge 5$ es redundante.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en el vértice *A*: $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 7$, y vale $z = 11$.
No existe el máximo.



b) La región factible es no acotada.
La pendiente de la función objetivo es negativa.
El mínimo se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos *A* y *C*, y vale $z = 5$.
No hay máximo.



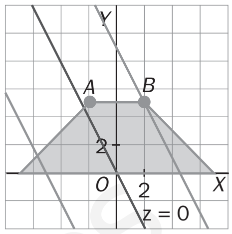
4.23. Comprueba que la función $f(x, y) = 2x + y$ no alcanza ni máximo ni mínimo si está sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x - y \ge -7 \\ y \le 5 \end{cases}$$

La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es negativa.

Según se desplaza la recta $2x + y = k$ tanto hacia arriba como hacia abajo, toca en todo momento a la región factible. Por tanto, los problemas de maximizar y de minimizar carecen de solución óptima.



4.24. Dibuja la región determinada por las condiciones:
$x - y \ge -3$ $x - 3y \ge -13$ $x + y \le 11$ $0 \le x \le 7$ $y \ge 0$
Halla el máximo y el mínimo de la función de dos variables $f(x, y) = x - 2y$ cuando está sujeta a las anteriores condiciones.
Resuelve el problema por el método geométrico y teniendo en cuenta que la pendiente de la función objetivo es positiva.

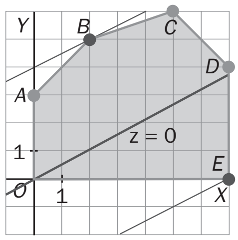
La región factible es acotada.

La pendiente de la función objetivo es positiva.

Por tanto, el máximo se alcanza en el último vértice por el que pasan las rectas paralelas a $x - 2y = k$ cuando se desplazan hacia abajo, y el mínimo, en el último vértice que tocan cuando se desplazan hacia arriba.

Máximo en *E*: $x = 7$, $y = 0$, y vale 7.

Mínimo en *B*: $x = 2$, $y = 5$, y vale −8.



4.25. Dibuja la región determinada por las condiciones:
$4x - 7y \le 0$ $7x - 2y \le 14$ $x + y \ge 0$ $x \ge -2$
Halla el máximo y el mínimo de la función de dos variables $f(x, y) = x - 4y$ cuando está sujeta a las anteriores condiciones.
Resuelve el problema por el método geométrico y teniendo en cuenta que la pendiente de la función objetivo es positiva.

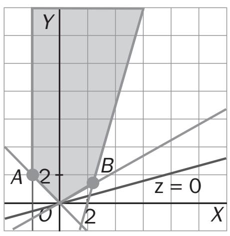
La región factible es no acotada.

La pendiente de la función objetivo es positiva.

Por tanto, el máximo se alcanza en el último vértice por el que pasan las rectas paralelas a $x - 4y = k$ cuando se desplazan hacia abajo, y el mínimo, en el último vértice que tocan cuando se desplazan hacia arriba.

Máximo en O: $x = 0$, $y = 0$, y vale 0.

El mínimo no existe.



PROBLEMAS

4.26.(PAU) Una empresa cuenta con tres empleados que trabajan durante 40 horas semanales para elaborar dos tipos de guitarras eléctricas, *G1* y *G2*. Cada unidad de *G1* requiere tres horas de trabajo, y cada unidad de *G2*, cuatro. Independientemente del tipo que sea, cada guitarra proporciona un beneficio de 75 euros.

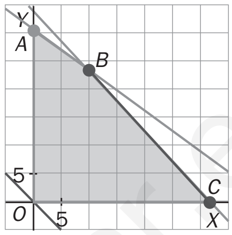
Un estudio de mercado señala que no se deben producir en total más de 32 guitarras semanales. Determina la producción para que los beneficios sean máximos.

x: unidades de *G1*

y: unidades de *G2*

Función objetivo: $z = 75x + 75y$

Restricciones: $\begin{cases} 3x + 4y \le 120 \\ x + y \le 32 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El máximo se obtiene en todos los puntos del segmento de extremos B y C : B: $\begin{cases} 3x + 4y = 120 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow B(8, 24)$

$C : \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow C(32, 0)$

El beneficio que se obtiene asciende a 2400 euros.

4.27.(PAU) Se desea fabricar comida para gatos de dos clases diferentes: gama alta y gama media. La comida está formada por una mezcla de carne, cereales y grasa animal en diferentes proporciones, según la gama. La mezcla de gama alta incluye 3 kg de carne, 2 kg de cereales y 1 kg de grasa animal por paquete, y produce un beneficio de 20 euros, mientras que la mezcla de gama media incluye 1 kg de carne, 2 kg de cereales y 2 kg de grasa animal por paquete, y produce un beneficio de 30 euros.

Se cuenta con un total de 105 kg de carne, 110 de cereales y 85 de grasa animal para elaborar las mezclas.

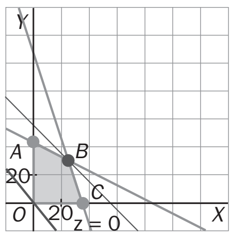
¿Cuántos paquetes de cada gama se deberán fabricar para que el beneficio producido sea máximo?

x : paquetes de gama alta

y : paquetes de gama media

Función objetivo: $z = 20x + 30y$

Restricciones: $\begin{cases} 3x + y \le 105 \\ 2x + 2y \le 110 \\ x + 2y \le 85 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$



El máximo se encuentra en el vértice B: $\begin{cases} 2x + 2y = 110 \\ x + 2y = 85 \end{cases} \Rightarrow B(25, 30)$

Se deben fabricar 25 paquetes de gama alta y 30 de gama baja, y se obtiene un beneficio de 1400 euros.

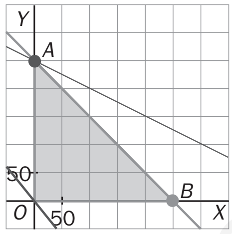
4.28. (PAU) En una empresa se editan revistas de dos tipos: de información deportiva y de cultura. Cada revista de información deportiva precisa dos cartuchos de tinta negra y uno de color y se vende a 3 euros. Cada revista de cultura precisa dos cartuchos de tinta negra y dos de color y se vende a 5 euros. Se dispone de 500 cartuchos de cada clase.

¿Cuántas revistas de cada tipo se deben editar para ingresar el máximo posible?

x : revistas de información deportiva

y : revistas de cultura

Función objetivo: $z = 3x + 5y$



Restricciones: $\begin{cases} 2x + 2y \leq 500 \\ x + 2y \leq 500 \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases}$

El máximo es el vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y = 500 \end{cases} \Rightarrow A(0, 250)$

El máximo de ingresos se obtiene al editar 250 revistas de cultura y ninguna de información deportiva, y ascienden a 1250 euros.

4.29. (PAU) Para iluminar una sala de pintura es preciso colocar suficientes bombillas que sumen un total de 1440 vatios como mínimo. En el mercado se pueden adquirir bombillas incandescentes tradicionales de 90 vatios al precio de 1 euro la unidad y bombillas de bajo consumo de 9 vatios (equivalentes a 60 vatios) al precio de 5 euros la unidad.

Debido a la estructura del espacio, el número total de bombillas no puede ser mayor de 20. Por otra parte, las normas del Ayuntamiento imponen que, para este tipo de salas, el número de bombillas de bajo consumo no puede ser inferior a la mitad del de bombillas tradicionales.

Calcula el número de bombillas de cada clase que se debe colocar para que el coste sea mínimo.

x : bombillas de 90 w

y : bombillas de 9 w (equivalentes a 60 w)

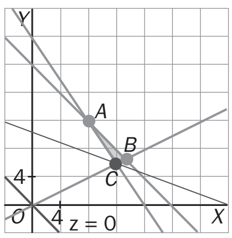
Función objetivo: $z = x + 5y$

Restricciones: $\begin{cases} 90x + 60y \geq 1440 \\ x + y \leq 20 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{cases}$

El mínimo es el vértice C: $\begin{cases} 90x + 60y = 1440 \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow C(12, 6)$

El mínimo gasto se obtiene al iluminar la sala con 12 bombillas de 90 w y 6 de bajo consumo de 9 w.

El coste mínimo es de 42 euros.



4.30. (PAU) Dos jóvenes empresarios se disponen a abrir un negocio de informática. Montarán y comercializarán dos tipos de ordenador: el tipo *A* llevará una unidad de memoria de pequeña capacidad y un disco duro; el tipo *B* llevará una unidad de memoria de alta capacidad y dos discos duros. En total se cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador de tipo *A* esperan obtener 150 euros de beneficios, y por cada ordenador de tipo *B*, 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

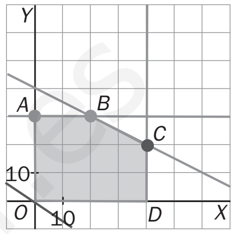
b) ¿Cuáles serían los beneficios en ese caso?

c) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

a) x : ordenadores de tipo *A*

y : ordenadores de tipo *B*

Función objetivo: $z = 150x + 250y$



Restricciones: $\begin{cases} x \le 40 \\ y \le 30 \\ x + 2y \le 80 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

El máximo es el vértice *C*: $\begin{cases} x = 40 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40, 20)$

La mejor decisión es montar 40 ordenadores de tipo *A* y 20 de tipo *B*.

b) Para este caso se obtendrían unos beneficios de 11 000 euros.

c) Con esta producción sobrarán 10 unidades de memoria de alta capacidad.

4.31. (PAU) En un taller de confección se van a elaborar trajes de cocinero y de camarero. Se dispone para ello de 30 m^2 de algodón, 10 m^2 de fibra sintética y 20 m^2 de lana. Para hacer cada traje de cocinero se precisan 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de fibra sintética y 2 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 20 euros de beneficios. Para hacer cada traje de camarero se precisan 2 m^2 de algodón, 1 m^2 de fibra sintética y 1 m^2 de lana. Cada unidad de este tipo deja 30 euros de beneficios. Se deben confeccionar mayor o igual número de trajes de camarero que de cocinero y, como mínimo, se deben hacer un traje de cocinero y dos de camarero. El total no podrá ser superior a 20.

a) ¿Cuántos trajes de cada tipo se deberán confeccionar de forma que el beneficio sea máximo?

b) ¿Sobrará algún tipo de material?

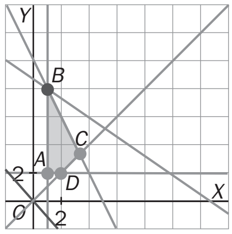
c) ¿Hay alguna condición redundante?

a) x : trajes de cocinero

y : trajes de camarero

Función objetivo: $z = 20x + 30y$

Restricciones: $\begin{cases} x + 2y \le 30 \\ 2x + y \le 10 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 20 \\ y \ge x \\ x \ge 1 \quad y \ge 2 \end{cases}$



El máximo es el vértice *B*: $\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow B(1, 8)$

El beneficio máximo se obtiene confeccionando 1 traje de cocinero y 8 de camarero, y es de 260 euros.

b) Sobran 13 m^2 de algodón y 10 m^2 de lana.

c) Las condiciones $2x + y \le 20$ y $x + y \le 20$ son redundantes.

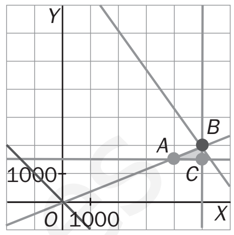
4.32. (PAU) Una empresaria desea invertir los beneficios de 7500 euros obtenidos en su negocio en dos tipos de acciones, *A* y *B*. El tipo *A* produce un interés anual esperado del 6%, y el tipo *B*, del 4%. Como máximo desea invertir 5000 euros en A, y como mínimo, 1500 euros en *B*. Además, desea que la inversión en *A* sea superior a dos veces y media la inversión en *B*.

¿Cómo deberá realizar la inversión para que las ganancias sean máximas?

x : euros en acciones de tipo A

y : euros en acciones de tipo B

Función objetivo: $z = 0{,}06x + 0{,}04y$



Restricciones: $\begin{cases} x + y \le 7500 \\ x \le 5000 \\ y \ge 1500 \\ x \ge 2{,}5y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$ El máximo es el vértice B: $\begin{cases} x = 5000 \\ x = 2{,}5y \end{cases} \Rightarrow B(5000,\ 2000)$

Para obtener el máximo beneficio deben invertirse 5000 euros en acciones de tipo A y 2000 en las de tipo B. El beneficio obtenido en ese caso asciende a 380 euros.

4.33. (PAU) Una empresa de siderurgia cuenta con tres tipos de recursos productivos para fabricar dos tipos de aleaciones de hierro, A_1 y A_2: 1000 horas de trabajo de personal y 880 y 1160 toneladas, respectivamente, de dos materias primas, M_1 y M_2, que se deben mezclar.

Para fabricar una unidad de la aleación A1 se precisan 10 horas de trabajo de personal, 20 toneladas de M_1 y 50 toneladas de M_2. Para fabricar una unidad de la aleación A2 se precisan 40 horas de trabajo de personal, 50 toneladas de M_1 y 60 toneladas de M_2.

Gracias a un estudio de mercado, se supone que por cada unidad de A_1 se obtendrán unos beneficios de 125 unidades monetarias, y por cada unidad de A_2 se obtendrán 250 unidades monetarias.

a) Halla la producción que maximiza los beneficios.

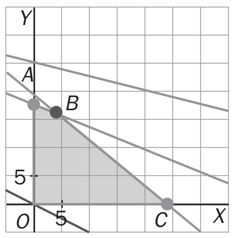
b) Indica si se genera algún tipo de excedente en los recursos productivos.

c) Si se produce una rebaja del 40% en los beneficios obtenidos por cada unidad de A_2 y se mantienen los obtenidos por cada unidad de A_1, ¿cómo variará la producción óptima?

a) x : unidades de A_1

y : unidades de A_2

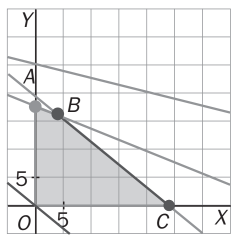
Función objetivo: $z_1 = 125x + 250y$



Restricciones: $\begin{cases} 10x + 40y \le 1000 \\ 20x + 50y \le 880 \\ 50x + 60y \le 1160 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

El máximo es el vértice B: $\begin{cases} 20x + 50y = 880 \\ 50x + 60y = 1160 \end{cases} \Rightarrow B(4,\ 16)$

El máximo de beneficios se obtiene cuando se producen 4 unidades de A_1 y 16 unidades de A_2, y es de 4500 u m.



b) Sobran 320 horas de trabajo de personal.

c) La nueva función objetivo es $z_2 = 125x + 150y$

En este caso, el máximo de producción se obtiene en cualquier punto del segmento de extremos B y C, y vale 2900 u m.

4.34. (PAU) Una empresa que empaqueta y comercializa cajas de cereales tiene dos factorías situadas en *A* y en *B*. Un hipermercado le encarga que, mensualmente, le provea como mínimo de 1125 cajas de cereales normales, 1350 cajas de cereales con chocolate y 1875 cajas de cereales con miel. La factoría *A* produce en una hora 75 cajas de cereales normales, 150 cajas de cereales con chocolate y 75 cajas de cereales con miel a un coste de 210 euros. La factoría *B* produce, también en una hora, 75, 225 y 90 cajas, respectivamente, de cada tipo de cereal a un coste de 180 euros por hora.

a) Calcula el número de horas que debe trabajar cada factoría para abastecer la demanda de forma que el coste sea mínimo.

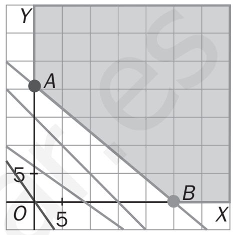
b) Calcula el valor de dicho coste mínimo.

a) x : número de horas que trabaja la factoría *A*.

y : número de horas que trabaja la factoría *B*.

Función objetivo: $z = 210x + 180y$

Restricciones: $\begin{cases} 75x + 75y \geq 1125 \\ 150x + 225y \geq 1350 \\ 75x + 90y \geq 1875 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El mínimo se encuentra en *A*: $\begin{cases} 75x + 90y = 1875 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ 20{,}83)$

Por tanto, no se deben trabajar ninguna hora en *A* y 20,83 horas en *B* para que el coste sea mínimo.

b) El coste mínimo será de 3749,4 euros.

4.35. En cierta zona de una comunidad autónoma hay tres fábricas de televisores, O_1, O_2 y O_3, que proveen de aparatos a dos ciudades, D_1 y D_2.

Las producciones de las fábricas son:

O_1	O_2	O_3
100	150	225

Las demandas de las ciudades son:

D_1	D_2
175	300

Los costes de transporte, en euros, de cada unidad desde un punto de origen a uno de destino son:

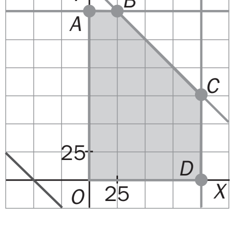
	D_1	D_2
O_1	10	8
O_2	6	5
O_3	4	5

Halla cuántos televisores deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo. Calcula dicho coste mínimo.

	D_1	D_2	Total
O_1	x	$100 - x$	100
O_2	y	$150 - y$	150
O_3	$175 - x - y$	$x + y + 50$	225
Total	175	300	475

Función objetivo: $z = 10x + 8(100 - x) + 6y + 5(150 - y) + 4(175 - x - y) + 5(x + y + 50) = 3x + 2y + 2500$

Restricciones: $\begin{cases} x \leq 100 \\ y \leq 150 \\ x + y \geq -50 \\ x + y \leq 175 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El coste mínimo se obtiene en $O(0, 0)$.

Por tanto, han de llevarse 100 televisores de O_1 a D_2, 150 de O_2 a D_2, 175 de O_3 a D_1 y 50 de O_3 a D_2.

El coste para esos valores es de 2500 euros.

4.36.Las fábricas de automóviles de Fráncfort y de Milán proveen de un cierto modelo a las ciudades de París, Viena y Praga.

Las producciones de las fábricas son:

Fráncfort	Milán
150	100

Las demandas de las ciudades son:

París	Viena	Praga
125	100	25

Los costes de transporte, en unidades monetarias, de cada automóvil desde un punto de origen a uno de destino son:

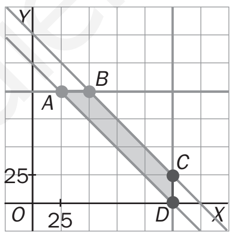
	París	Viena	Praga
Fráncfort	5	10	15
Milán	20	15	20

Halla cuántos automóviles deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo y calcula dicho coste mínimo.

	París	Viena	Praga	Total
Fráncfort	x	y	$150 - x - y$	150
Milán	$125 - x$	$100 - y$	$x + y - 125$	100
Total	125	100	25	250

Función objetivo: $z = 5x + 10y + 15(150 - x - y) + 20(125 - x) + 15(100 - y) + 20(x + y - 125) = -10x + 3750$

Restricciones: $\begin{cases} x \le 125 \\ y \le 100 \\ x + y \ge 125 \\ x + y \le 150 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{cases}$



El mínimo se encuentra en todos los puntos pertenecientes al segmento de extremos $C(125, 25)$ y $D(125, 0)$.
Dos ejemplos de solución son

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	0	25
Milán	0	100	0

	París	Viena	Praga
Fráncfort	125	25	0
Milán	0	75	25

El coste mínimo será de 2500 euros.

4.37. (PAU) En un comedor escolar se desea diseñar un menú para los alumnos que debe cumplir las siguientes especificaciones.

- **El número de calorías no ha de ser inferior a 2000.**
- **Debe contener un total de, al menos, 60 g de proteínas.**
- **Debe contener un total de, al menos, 80 g de grasas.**

Para ello se dispone de dos platos con las siguientes características:

	Calorías	Proteínas	Grasas
1.er plato (100 g)	250	10	15
2.º plato (100 g)	800	15	20

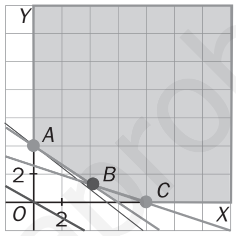
El precio de 100 g del segundo plato es doble del de 100 g del primer plato.

Halla cuántos gramos se deben servir de cada plato para que el coste sea mínimo.

Se sirven 100*x* gramos del primer plato y 100*y* gramos del segundo.

Función objetivo: $z = x + 2y$

Restricciones: $\begin{cases} 250x + 800y \geq 2000 \\ 10x + 15y \geq 60 \\ 15x + 20y \geq 80 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$



El mínimo es: $\begin{cases} 250x + 800y = 2000 \\ 10x + 15y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(4{,}24;\ 1{,}18)$ deben servir 424 gramos del primer plato y 118 del segundo.

4.38. Una compañía que ofrece servicios de conexión rápida a internet quiere iniciar una campaña de captación de clientes mediante una serie de llamadas telefónicas elegidas al azar.

Las llamadas se pueden realizar a propietarios de viviendas de dos localidades diferentes, *A* y *B*. Por anteriores estudios de mercado se sabe que la probabilidad de que un vecino de la localidad *A* acepte el servicio es de 0,06, y de que lo haga un vecino de la localidad *B*, de 0,05.

El mencionado estudio indica también que, como mucho, se deberán realizar 20 llamadas a vecinos de *A* y 20 a vecinos de *B*. El total de llamadas no puede superar la cantidad de 30 y, por lo menos, se deberá llamar a 5 vecinos de cada ciudad.

Además y dado el coste de las llamadas, el número de vecinos consultados de *B* no podrá ser superior al de consultados de *A*.

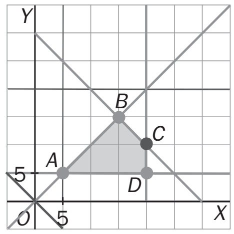
Calcula el número de llamadas que se deberán hacer a *A* y a *B* para maximizar el número de futuros clientes.

x : número de llamadas a *A*

y : número de llamadas a *B*

Función objetivo: $z = 0{,}06x + 0{,}05y$

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 30 \\ x \geq y \\ 5 \leq x \leq 20 \\ 5 \leq y \leq 20 \end{cases}$ El máximo se encuentra en *C*: $\begin{cases} x = 20 \\ x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow C(20,\ 10)$

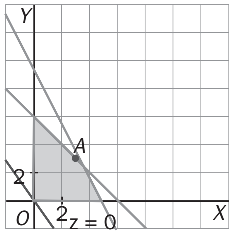


Por tanto, se deben realizar 20 llamadas a *A* y 10 a *B* para maximizar el número de futuros clientes.

4.39. Resuelve el problema de programación lineal entera.

Máximo $z = 8x + 5y$

Sujeto a: $\begin{cases} 9x + 5y \le 45 \\ x + y \le 6 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0\text{, donde } x, y \in Z \end{cases}$

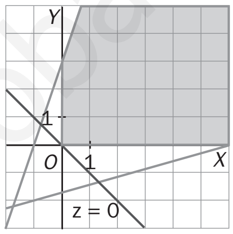


El máximo se encuentra en el punto $A(3\,,\ 3)$ en donde la función objetivo vale $z = 39$.

4.40. Resuelve el problema de programación lineal entera.

Máximo $z = x + y$

Sujeto a: $\begin{cases} x - 3y \le 6 \\ -3x + y \le 3 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \;\text{ donde } x,\ y \in Z \end{cases}$



Al ser una región no acotada no tendría máximo.
El mínimo se encuentra en el punto (0, 0) y vale $z = 0$.

4.41. Dado el siguiente problema de programación lineal. Máximo $z = 2x + \lambda y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x - 3y \ge -9 \\ 5x + 2y \le 25 \\ 0 \le x \le 5,\ y \ge 0 \end{cases}$$

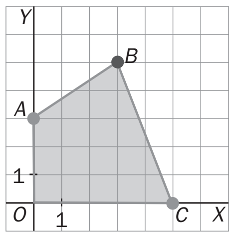
Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice *B*(3, 5). ¿Cuánto vale *z* en este caso?

La región factible tiene por vértices:

$A\text{:} \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 3)$ $\;B\text{:} \begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases} \Rightarrow B(3,\ 5)$ $\;C\text{:} \begin{cases} x = 5 \\ 5x + 2y = 25 \end{cases} \Rightarrow C(5,\ 0)\ O(0,\ 0)$

El valor de *z* en los vértices es: $z_A = 3\lambda$, $z_B = 6 + 5\lambda$, $z_C = 10$, $z_D = 0$.
Para que el máximo se encuentre en *B* debe ocurrir:

$$\begin{cases} 6 + 5\lambda \ge 3\lambda \\ 6 + 5\lambda \ge 10 \\ 6 + 5\lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \ge -3 \\ \lambda \ge \dfrac{4}{5} \\ \lambda \ge -\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \lambda \ge \frac{4}{5}$$



Por tanto, el valor de λ debe ser superior o igual a $\frac{4}{5}$. En este caso, $z = 6 + \lambda$.

4.42. Dado el siguiente problema de programación lineal: Mínimo $z = 3x + \lambda y$ sujeto a:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 5 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

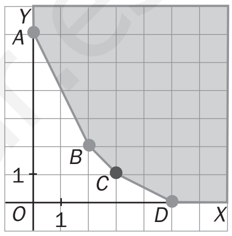
Halla los valores de λ para los cuales la solución óptima del problema se encuentra en el vértice *C*(3, 1). ¿Cuánto vale z en este caso?

La región factible tiene por vértices:

$A: \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow A(0, 6)$ $\quad B: \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2, 2)$ $\quad C: \begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3, 1)$ $\quad D: \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(5, 0)$

El valor de z en los vértices es: $z_A = 6\lambda$, $z_B = 6 + 2\lambda$, $z_C = 9 + \lambda$, $z_D = 15$.

Para que el mínimo se encuentre en C debe ocurrir:



$$\begin{cases} 9 + \lambda \leq 6\lambda \\ 9 + \lambda \leq 6 + 2\lambda \\ 9 + \lambda \leq 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \geq \dfrac{9}{5} \\ \lambda \geq 3 \\ \lambda \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq \lambda \leq 6$$

El valor de λ debe estar entre 3 y 6. En este caso, la función $z = 9 + \lambda$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la respuesta correcta en cada caso:

4.1. Se consideran los puntos *M*(6, 2) y *N*(1, –2), y el semiplano determinado por la expresión $2x - 3y > 6$:

A) El origen de coordenadas pertenece al semiplano.
B) Los dos puntos *M* y *N* pertenecen al semiplano.
C) El punto *M* pertenece, pero el *N* no.
D) El punto *N* pertenece, pero el *M* no.
E) Ninguno de los dos puntos pertenece al semiplano.

La respuesta correcta es la D) El punto *N* pertenece, pero el *M* no.

4.2. La recta $2x + 5y = k$ se desplaza de forma paralela desde el origen de coordenadas hacia la parte positiva del eje *Y*.

A) El valor de *k* es menor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.
B) El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas.
C) El valor de *k* permanece constante.
D) Todas las anteriores afirmaciones son ciertas.
E) Todas las anteriores afirmaciones son falsas.

La respuesta correcta es la B. El valor de *k* es mayor cuanto mayor es la distancia que separa a la recta del origen de coordenadas, ya que al ser los coeficientes de *x* y de *y* positivos, el valor de *k* es mayor cuanto más se aleje la recta del origen de coordenadas en el sentido positivo del eje *Y*.

4.3. El interior del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, -1)$ queda determinado por las siguientes condiciones.

A) $3y - x \geq 1$ $2x - y \geq 3$ $x + 2y \geq 1$

B) $3y - x \leq 1$ $2x - y \geq 3$ $x + 2y \leq -1$

C) $3y - x \leq 1$ $2x - y \leq 3$ $x + 2y \geq 1$

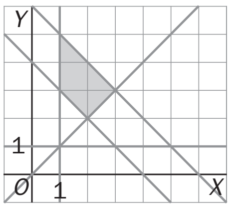
D) $3y - x \leq 1$ $2x - y \leq 3$ $x + 2y \geq -1$

E) Ninguna de las anteriores opciones es cierta.

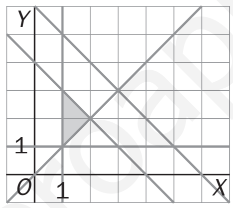
La solución correcta es la D: $3y - x \leq 1$, $2x - y \leq 3$, $x + 2y \geq -1$.
Los lados del triángulo son $3y - x = 1$, $2x - y = 3$, $x + 2y = 1$.

4.4. La región factible determinada por las restricciones $\begin{cases} 2x + 2y \leq 8 \\ x + y \leq 6 \\ y \geq x \\ x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$ es:

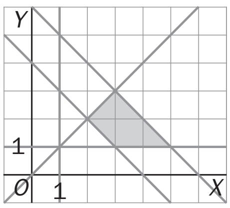
A)



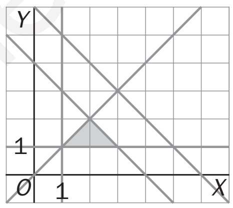
C)



B)



D)



E) ninguna de las anteriores opciones es cierta.

Se observa al estudiar la intersección de los cuatro semiplanos que la solución correcta es la C.

4.5. La solución del problema de programación lineal: Mínimo $z = 2x - 3y$. Sujeta a: $\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

se alcanza en:

A) $x = 3$, $y = 0$ B) $x = 0$, $y = 3$ C) $x = 1$, $y = 1$ D) $x = -3$, $y = 0$ E) El problema no tiene solución.

La solución correcta es la E) El problema no tiene solución. Como el coeficiente de la función objetivo de y es negativo, el mínimo se alcanza en el último punto donde toca la recta $2x - 3y = k$ a la región factible en su desplazamiento hacia la parte positiva del eje Y. Se observa que nunca deja de tocarla.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

4.6. Se considera la región factible determinada por las restricciones:

$\{x + 3y \leq 21,\ x + y \leq 12,\ 4x + y \leq 40,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

A) El punto (9, 4) pertenece a la región factible.

B) El punto (9, 4) es uno de los vértices de la región factible.

C) El punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice de la región factible.

D) El punto (5, 5) pertenece a la región factible.

E) El punto (5, 5) es uno de los vértices de la región factible.

Las soluciones correctas son la C, el punto $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice de la región factible, y la D, el punto (5, 5) pertenece a la región factible. El punto (9, 4) no pertenece a la región factible, ya que no verifica la 2.ª inecuación. Tampoco puede ser, por tanto, vértice. El punto $C\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ es un vértice, ya que verifica todas las inecuaciones y es solución de las dos primeras ecuaciones. El punto (5, 5) pertenece a la región factible, ya que verifica todas las inecuaciones, pero no es solución de un sistema de dos ecuaciones y, por tanto, no es vértice.

4.7. Se considera un problema de programación lineal con dos variables.

A) Si el punto (*a*, *b*) es una solución óptima del problema, entonces obligatoriamente es un vértice de la región factible.

B) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces (*a, b*) obligatoriamente pertenece a la región factible.

C) Si el punto (*a*, *b*) es la única solución óptima del problema, entonces es obligatoriamente un vértice de la región factible.

D) Si (*a*, *b*) no pertenece a la región factible, entonces no puede ser solución del problema.

E) Todas las anteriores opciones son ciertas.

Las soluciones correctas son la B; la C y la D

.

Una solución puede ser óptima y no ser vértice, ya que puede ser una de las infinitas soluciones de un problema de programación lineal. Sin embargo, si es única, debe ser vértice. Obviamente, para que sea solución óptima, lo primero que debe verificar es que pertenezca a la región factible.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

4.8. Se considera un problema de programación lineal con dos variables y tal que la región factible no es vacía.

a)El problema no tiene solución. **b) La región factible es no acotada.**

A) a es equivalente a b.

B) a implica b, pero b no implica a.

C) b implica a, pero a no implica b.

D) a y b no se pueden dar a la vez.

E) Nada de lo anterior es cierto.

La solución correcta es la B. Cuando la región factible es acotada, el problema de programación lineal siempre tiene por lo menos una solución. Pero puede ocurrir que la región sea no acotada y el problema tenga solución.

Señala el dato innecesario para contestar:

4.9. La región factible correspondiente a un problema de programación lineal está determinada por las siguientes restricciones.

a) $x + y \geq 5$ **b)** $2x + 3y \leq 24$ **c)** $4x - y \leq 20$ **d)** $x + 6y \leq 30$

A) La restricción a es redundante.

B) La restricción b es redundante.

C) La restricción c es redundante.

D) La restricción d es redundante.

E) Ninguna de las cuatro restricciones es redundante.

Al dibujar la región factible se obtiene que la solución correcta es la B.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

4.10. La región factible de un determinado problema de programación lineal es acotada. La función objetivo es f(x, y) = ax + by. Se afirma que el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta ax + by = k toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje *Y*.

1) $a > 0$, $b > 0$ **2)** $a < 0$, $b > 0$

A) Tanto la información 1 como la 2 son suficientes para asegurar que la afirmación es correcta.

B) La información 1 es suficiente, pero la 2 no.

C) La información 2 es suficiente, pero la 1 no.

D) Son necesarias las dos informaciones juntas.

E) Hacen falta más datos.

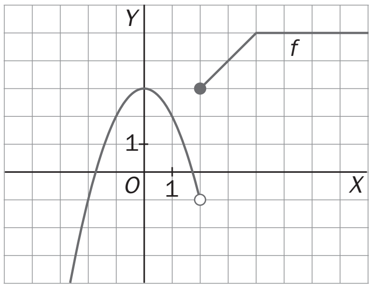
La solución correcta es la A. Al ser positivo el coeficiente de y en la función objetivo, el máximo de dicha función se alcanza en el último vértice que la recta $ax + by = k$ toca a la región factible en su desplazamiento paralelo en dirección hacia $+\infty$ del eje *Y*.

5 Funciones. Límites y continuidad

ACTIVIDADES INICIALES

5.I. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & \text{si} \quad x<2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$



5.II. Factoriza estos polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 4x - 5$ b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

a) $P(x) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x = x(x + 1)(x + 3)$

c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5.1. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa para almacenar un líquido colorante con un volumen de 500 cm^3. Las cajas tienen la base cuadrada. Llama *x* a la longitud del lado de la base y encuentra una función que nos dé los metros cuadrados de latón necesarios en función de *x*.

Si h es la altura de la caja, su superficie = $4xh + x^2$; como el volumen = $x^2 h$, la altura de la caja es $h = \frac{500}{x^2}$, y la superficie, $S(x) = \frac{2000}{x} + x^2$.

5.2. Encuentra la expresión matemática que nos da la suma de dos números en función de uno de ellos, sabiendo que el producto de ambos es 192.

Si $xy = 192$; $y = \frac{192}{x} \Rightarrow x + y = x + \frac{192}{x}$ $\quad S(x) = x + \frac{192}{x}$

5.3. La función $f(x) = -x^2 + 120x - 3200$ representa el beneficio (en cientos de euros) que obtiene una empresa en la fabricación de *x* unidades de un producto.

a) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para obtener el máximo beneficio posible? ¿Cuál es este beneficio máximo?

b) Halla la función que expresa el beneficio unitario

c) ¿Cuál es el beneficio unitario al fabricar 60 unidades?

a) Como es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo lo alcanza en el vértice: $x_V = \frac{120}{2} = 60$. Luego el máximo beneficio se obtiene fabricando 60 unidades de producto.
Como $f(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$, el beneficio es de 40 000 euros.

b) $B(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-x^2 + 120x - 3200}{x}$

c) $B(60) = \frac{-60^2 + 120 \cdot 60 - 3200}{60} = \frac{400}{60} = 6,\widehat{6}$. El beneficio es de 666,67 euros por unidad.

5.4. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$, calcula el dominio y la expresión de las funciones:

a) $f - g$ **b) $f \cdot g$** **c) $\dfrac{1}{f}$** **d) $\dfrac{f}{g}$**

Comenzamos calculando el dominio de cada una de ellas:

$D(f) = [-2, +\infty)$, y $D(g) = \mathbf{R} - \{-3, 3\}$

a) $f - g$ $D(f-g) = [-2, +\infty) - \{3\}$; $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \dfrac{x}{x^2-9}$

b) $f \cdot g$ $D(f \cdot g) = [-2, +\infty) - \{3\}$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x\sqrt{x+2}}{x^2-9}$

c) $\dfrac{1}{f}$ Como $f(-2) = 0$, $D(\dfrac{1}{f}) = (-2, +\infty)$; $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

d) $\dfrac{f}{g}$ Como $g(0) = 0$, $D(\dfrac{f}{g}) = [-2, +\infty) - \{0, 3\}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x^2-9)\sqrt{x+2}}{x}$

Observación: A pesar de que la expresión de $\dfrac{f}{g}$ sí está definida si $x = 3$, al provenir dicha función de un cociente de funciones en las que una de ellas no está definida en $x = 3$, este punto no está en el dominio del cociente.

5.5. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales.

a) $M(x) = \ln(3x-5)$ **b) $N(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(e^x)}$**

a) $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = \ln(x)$; $M(x) = (g \circ f)(x)$

b) $f(x) = e^x$; $g(x) = \operatorname{sen} x$; $h(x) = \sqrt{x}$; $N(x) = (h \circ g \circ f)(x)$

5.6. Ayudándote de la calculadora, obtén los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$** **e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$** **g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$**

b) $\lim\limits_{x\to -3} e^x + 5$ **d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$** **f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$** **h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x}{x+2}$**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to -3} e^x + 5 = e^{-3} + 5 \approx 5{,}049$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$. No existe. Si nos acercamos al cero por la izquierda, obtenemos que el límite es –1, pero si nos acercamos por la derecha, el límite nos da 1, es decir, los límites laterales no coinciden.

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$. No existe. Se hace muy grande en valor absoluto (negativo si nos acercamos por la izquierda al 2 y positivo si nos acercamos por la derecha).

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x}{x+2}$. No existe. Se hace muy grande en valor absoluto (positivo si nos acercamos por la izquierda al 2 y negativo si nos acercamos por la derecha).

5.7. Escribe una posible expresión para una función *f*, definida a trozos, que cumpla:

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$ y $f(1) = -2$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ y $f(2) = 5$

a) Respuesta abierta, una posible expresión para la función *f* sería: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) Respuesta abierta, una posible expresión para la función *f* sería: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

5.8. Calcula, si existen, $\lim_{x\to -1} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$, siendo *f* la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \leq x \leq 4 \\ 3-5x & x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} (x+3) = 2 \\ \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } \lim_{x\to -1} f(x) = 2.$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} (x^2+1) = 17 \\ \lim_{x\to 4^+} (3-5x) = -17 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Como los límites a izquierda y a derecha no coinciden, no existe el límite.

5.9. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}$; $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$; $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)^2}$; $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{(x-3)^2}$; $\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{(x-3)^2}$

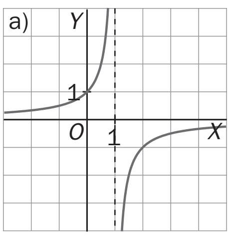
c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$

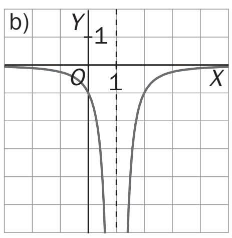
a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ $\Rightarrow$ No existe.

b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$; $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$; $\lim_{x\to 3} \frac{x+2}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$ $\Rightarrow$ No existe.

5.10. Calcula $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ en cada caso.





a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\Rightarrow$ No existe.

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$

5.11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{x+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2+x-2}{2x^2-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x^2}} = \dfrac{6+0+0}{2+0} = 3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-5}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3x^2}{x}-\dfrac{5}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \dfrac{0-0}{1-0} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\right) = \ln(0) = -\infty$

5.12. Calcula los valores de *a* para que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$ **.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(ax-x)(2+ax)}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(a^2-a)+x(2a-2)}{3x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(a^2-a)+\dfrac{(2a-2)}{x}}{3+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{(a^2-a)}{3} = 2$

$a^2 - a = 6 \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$, $a = 3$ o $a = -2$

5.13. La población de bacterias de cierto cultivo sigue esta ley: $P(t) = \dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}$ **miles de bacterias, donde *t* indica los días transcurridos desde su inicio.**

a) ¿Qué población había al principio del estudio?

b) ¿Qué población habrá al cabo de una semana?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿hacia qué valor tiende a estabilizarse la población?

a) $P(0) = \dfrac{(3\cdot 0+2)(5\cdot 0+1)}{(2\cdot 0+1)^3} = \dfrac{2}{1} = 2$ miles de bacterias

Había 2000 bacterias.

b) $P(7) = \dfrac{(3\cdot 7^2+2)(5\cdot 7+1)}{(2\cdot 7+1)^3} = \dfrac{149\cdot 36}{15^3} \approx 1{,}58933$ miles de bacterias

Habrá 1589 bacterias, aproximadamente.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15t^3+3t^2+10t+2}{8t^3+12t^2+6t+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{15t^3}{t^3}+\dfrac{3t^2}{t^3}+\dfrac{10t}{t^3}+\dfrac{2}{t^3}}{\dfrac{8t^3}{t^3}+\dfrac{12t^2}{t^3}+\dfrac{6t}{t^3}+\dfrac{1}{t^3}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{15+\dfrac{3}{t}+\dfrac{10}{t^2}+\dfrac{2}{t^3}}{8+\dfrac{12}{t}+\dfrac{6}{t^2}+\dfrac{1}{t^3}} = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$ miles de bacterias

El número de bacterias se aproxima cada vez más a 1875.

5.14. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x)=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-5)}{(x+2)}=-\dfrac{3}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

5.15. Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3}{x}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5-x)(3+x)$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-x)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{x+5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3}{x}-x\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5-x)(3+x)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

5.16. Calcula estos límites. Si dan lugar a indeterminaciones, indica de qué tipo son y resuélvelas:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{3}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7-\dfrac{3}{x}\right)=7-0=7$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=\dfrac{9+3+1}{-5}=-\dfrac{13}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x-5\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)}=3$$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{2}$$

f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{(2-\sqrt{x^2+3})(2+\sqrt{x^2+3})}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{1-x^2}=\lim_{x\to1}(2+\sqrt{x^2+3})=4$$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$. Indeterminación tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-4)}{(x-1)^2}=-\infty$$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+x-5\right)=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$. Indeterminación $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$$ Luego no existe el límite.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$ Indeterminación tipo $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=0$$

5.17. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, especificando en su caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Como las funciones que definen cada trozo son continuas, pues son trozos de rectas y parábolas, basta ver qué ocurre en x = 0 y en x = 1.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ y la función es continua en x = 0.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, pues, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden. Así pues, en x = 1 hay una discontinuidad de salto finito.

b) $f(x)=\left|\dfrac{x}{x-3}\right|$. Comencemos definiendo la función como una función a trozos:

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=\dfrac{x}{x-3}$ si $\dfrac{x}{x-3}\ge 0$. Resolviendo la inecuación tenemos que $x\in(-\infty,0]\cup(3,+\infty)$.

$\left|\dfrac{x}{x-3}\right|=-\dfrac{x}{x-3}$ si $\dfrac{x}{x-3}<0$, $x\in(0,3)$ La función no está definida en x = 3, luego allí no será continua.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x-3}=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x}{x-3}=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ y la función es continua en x = 0.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}-\dfrac{x}{x-3}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x}{x-3}=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad esencial en x = 3. La recta x = 3 es una asíntota vertical.

5.18. Determina para qué valores de *a* y *b* es continua la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x^2+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Si $x\neq 0$ y $x\neq 2$, la función es continua por ser trozos de parábolas y rectas. Calculemos los límites laterales en x = 0 y en x = 2.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-b)=-b=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b \end{cases}$ Si queremos que en x = 0 sea continua, entonces $-b = b \Rightarrow b = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+b\right)=4+b \end{cases}$ Si queremos que sea continua en x = 2 debe ser 2a + b = 4 + b, y como b = 0, debe ser a = 2.

La función es: $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

5.19. Determina el valor de $f(1)$ de forma que $f(x) = \dfrac{x^5-1}{x-1}$ si $x \neq 1$ sea continua.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right) = 5$$

Luego $f(1) = 5$.

5.20. Demuestra que la ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene alguna solución real.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función continua $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ en el intervalo [–1, 0], por ejemplo, como $f(-1) = -2$ y $f(0) = 1$, se deduce que existe c en (–1, 0) con $f(c) = 0$, luego $x = c$ es una solución de la ecuación.

5.21, Demuestra que la ecuación $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene alguna solución real y da una aproximación correcta hasta las décimas.

De nuevo se aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^3 + 5x + 1$ en intervalos cada vez más pequeños hasta obtener la aproximación deseada:

[–1, 0] $f(-1) = -5$ y $f(0) = 1$

[–0,2, –0,1] $f(-0{,}2) = -0{,}008$ y $f(-0{,}1) = 0{,}499$

La solución es $x = -0,1\ldots$

5.22. La función $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ cumple que $f(1) = -3$ y $f(3) = 1$, y no corta al eje X en ningún punto.

¿Contradice este ejemplo el teorema de Bolzano?

No lo contradice, pues la función no cumple todas las hipótesis del teorema de Bolzano. La función no es continua en el intervalo [1, 3], tiene una discontinuidad esencial en $x = 2$.

5.23. Encuentra el máximo de la función $P(x) = x(5 - x)$.

Como se vio en el texto, la función tiene un máximo. Al ser una parábola, sabemos que dicho máximo lo alcanzará en el vértice $V\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$. Comprobamos que el máximo se alcanza en el intervalo [0, 5].

5.24. Se define poder adquisitivo, *PA*, como la cantidad de bienes o servicios (de precio unitario *PU*) que podemos adquirir con una determinada cantidad de dinero *T*, es decir, $PA = \dfrac{T}{PU}$.Por ejemplo, si disponemos de 180 € para la compra de libros que cuestan 15 € cada uno, tenemos un poder adquisitivo de 12 libros.

Calcula el límite del poder adquisitivo cuando *T* y *PU* dependen del tiempo *t* y este tiende a más infinito, en los casos siguientes:

a) $T(t) = 5t + 1$ y $PU(t) = t^2 + 1$

b) $T(t) = 8t^2 + t$ y $PU(t) = 2t^2 - 3$

c) $T(t) = 3t + 12$ y $PU(t) = 250$

a) $T(t) = 5t + 1$ y $PU(t) = t^2 + 1$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty}\frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{5t+1}{t^2+1} = 0$$

b) $T(t) = 8t^2 + t$ y $PU(t) = 2t^2 - 3$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty}\frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{8t^2+t}{2t^2-3} = 4$$

c) $T(t) = 3t + 12$ y $PU(t) = 250$

$$\lim_{t\to+\infty} PA = \lim_{t\to+\infty}\frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{3t+12}{250} = +\infty$$

EJERCICIOS

Funciones reales

5.25. (PAU) Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$. Determínese a, b y c sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (–2, –3) y (1, 0).

Ambas funciones deben pasar por esos puntos, planteamos el sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} -3 = (-2)^2 + a(-2) + b \\ -3 = -(-2)^2 + c \\ 0 = 1^2 + a \cdot 1 + b \\ 0 = -1^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 4 - 2a + b \Rightarrow b = 2a - 7 \\ -3 = -4 + c \Rightarrow c = 1 \\ 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 + a + 2a - 7 \Rightarrow a = 2 \\ 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = -x^2 + 1$.

5.26. Encuentra la parábola que pasa por los puntos $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ y $C(2, 3)$.

La ecuación de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son } a = -1,\ b = 4 \text{ y } c = -1$$

La parábola es $y = -x^2 + 4x - 1$.

5.27. Expresa la función $f(x) = |2x + 4| - |x - 1|$ como una función definida a trozos y dibuja su gráfica.

$|2x + 4| = 2x + 4$ si $x \ge -2$ y $|2x + 4| = -(2x + 4) = -2x - 4$ si $x < -2$

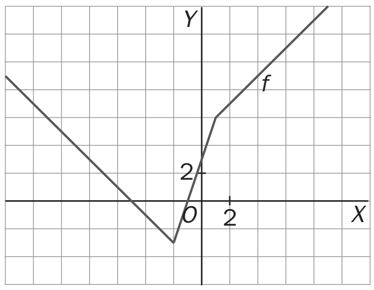
$|x - 1| = x - 1$ si $x \ge 1$ y $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ si $x < 1$

Observa cómo queda la expresión dependiendo de los valores de x:

$-2x-4-(-x+1)=-x-5$	-2	$2x+4-(-x+1)=3x+3$	1	$2x+4-(x-1)=x+5$

La expresión de f como función definida a trozos es:

$$f(x) = \begin{cases} -x-5 & \text{si } x < -2 \\ 3x+3 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x+5 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



Operaciones con funciones

5.28. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales:

a) $A(x) = (5x - 2)^{12}$

b) $B(x) = \cos\sqrt{e^{x-1}}$

c) $C(x) = \dfrac{1}{\ln x^2}$

d) $D(x) = e^{\sqrt{\operatorname{sen} x^5}}$

a) $f(x) = 5x - 2;\quad g(x) = x^{12} \Rightarrow A(x) = (g \circ f)(x)$

b) $f(x) = x - 1;\quad g(x) = e^x;\quad h(x) = \sqrt{x};\quad p(x) = \cos x \Rightarrow B(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

c) $f(x) = x^2;\quad g(x) = \ln x;\quad h(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow C(x) = (h \circ g \circ f)(x)$

d) $f(x) = x^5;\quad g(x) = \operatorname{sen} x;\quad h(x) = \sqrt{x};\quad p(x) = e^x \Rightarrow B(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

5.29. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$:

a) Calcula la función $(f \circ f)(x)$.

b) Catalina asegura que $(f \circ f)(-1) = 0$, y Gloria afirma que $(f \circ f)(-1)$ no existe.

¿Quién de las dos tiene razón?

a) $(f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

b) Gloria tiene razón, pues como $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$, $x = -1$ no está en el dominio de $(f \circ f)$.

5.30. Calcula la función inversa de:

a) $f(x) = x^3 - 8$ **b) $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$**

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+5}{2}$

5.31. Sean las funciones *f* y *g* definidas así:

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 7 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1 - 3x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 7 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentra la expresión de la función suma $s(x) = (f + g)(x)$.

$x < -1$	$-1 \le x < 2$	$x \ge 2$
$f(x) = 5x - 7$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 3x - 4$	$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 4 - 5x$	$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = x + 7$ $s(x) = 8 - 2x$

$$s(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x < -1 \\ 4 - 5x & -1 \leq x < 2 \\ 8 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

Límite de una función en un punto

5.32. La función $f(x)$ no está definida para $x = 1$. Observando la tabla de valores siguiente, contesta razonadamente:

x	0,99	0,999	1,001	1,01
$f(x)$	3,02	3,001	–2,99	–2,95

a) ¿Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$? b) ¿Crees que existe $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^2$?

a) Parece que no, pues a la vista de los datos parece que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -3$.

b) Parece que sí; por lo visto en el apartado a, sería $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^2 = 9$.

5.33. La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ no está definida para $x = 2$. Con ayuda de la calculadora, obtén el límite $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

x	1,9	2,1	1,99	2,01
$f(x)$	2,92564	3,07561	2,99251	3,00751

A la vista de los datos, parece que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

5.34. **Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 5$, calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to a} [3f(x) - g(x)]$

d) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^2$

e) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{[f(x)]^2 + g(x) + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2$

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = 3 + 5 = 8$

b) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = 3 - 5 = -2$

c) $\lim\limits_{x \to a} [3f(x) - g(x)] = 3 \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = 9 - 5 = 4$

d) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^2 = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^2 = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{[f(x)]^2 + g(x) + 2} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} \left([f(x)]^2 + g(x) + 2\right)} = \sqrt{9 + 5 + 2} = 4$

f) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = \left[\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\right]^2 = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right]^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

5.35. **Dibuja en cada caso una gráfica para una posible función que se comporte de la siguiente manera cerca de $x = 2$.**

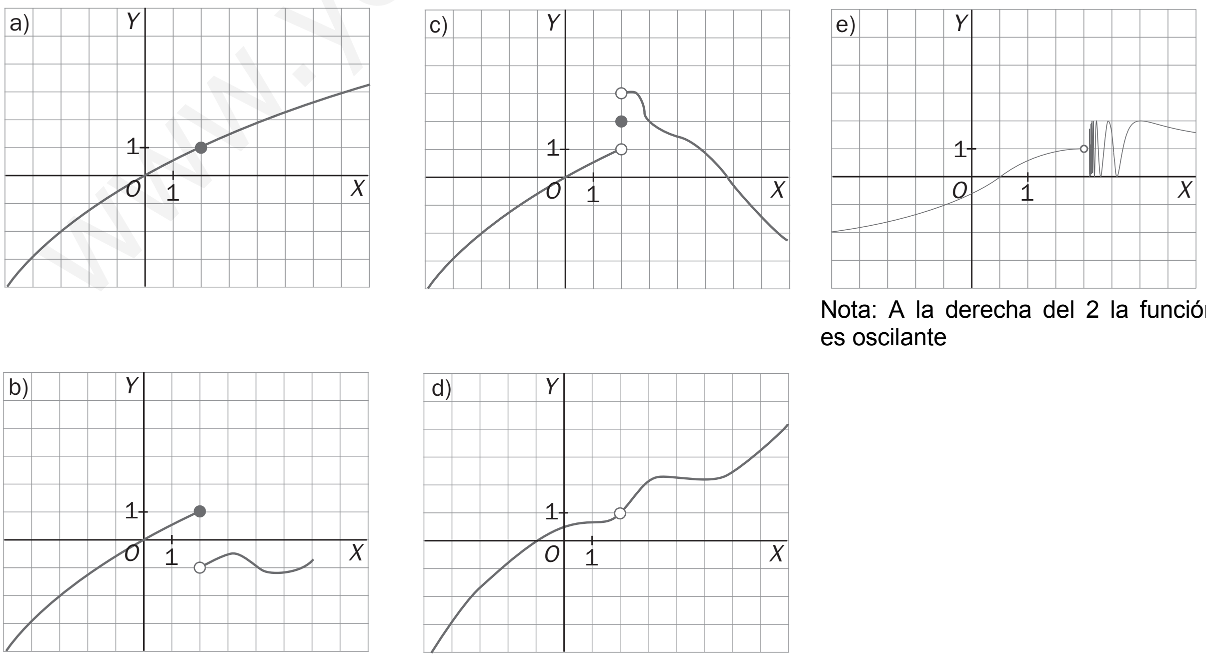
a) $f(2) = 1$ **y** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

b) $f(2) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$

c) $f(2) = 2$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

d) $f(2)$ **no está definida;** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

e) $f(2)$ **no está definida;** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **no existe.**



Nota: A la derecha del 2 la función es oscilante

5.36. La función *f* está definida a trozos:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x<-1\\ e^{1+x} & \text{si } x\geq -1\end{cases}$$

Ayudándote de la calculadora, obtén los límites laterales $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, y después, decide si existe o no el límite $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

x	–1,1	–1,01	–0,9	–0,99
f(*x*)	–2,1	–2,01	1,105171	1,01005

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$, luego no existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

5.37. ¿Existe el límite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}$?

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+3}{x-3}=-1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{|x|-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1$, luego el límite no existe.

5.38 Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

x	0,1	0,01
f(*x*)	$0{,}1^{10}$ = 0,0000000001	$0{,}01^{100}$ = 0,0000…

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=0$

Límites infinitos y en el infinito

5.39. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+x+1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3x^2+x+1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^2+4x+5\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^2+4x+5\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-x^4\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x^4\right)$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+x+1\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3x^2+x+1\right)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^2+4x+5\right)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^2+4x+5\right)=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-x^4\right)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-x^4\right)=-\infty$

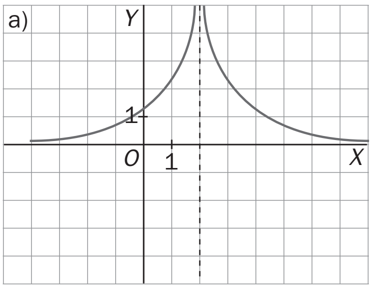
5.40. **Dibuja posibles gráficas para estas cuatro funciones que cumplan estos dos requisitos cada una:**

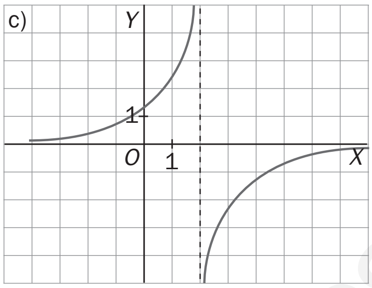
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

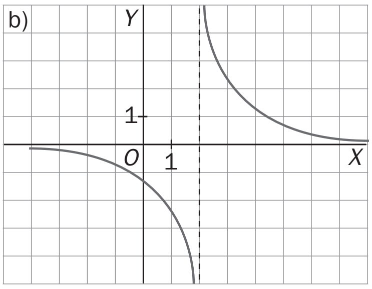
b) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$

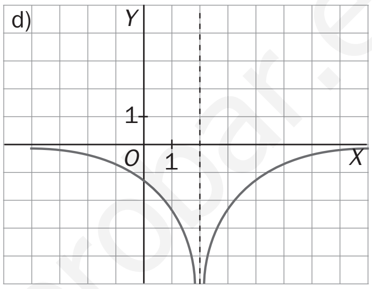
c) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} i(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x\to 2^-} i(x) = -\infty$









5.41. **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}=+\infty$

5.42. **Calcula estos límites. No olvides estudiar los límites laterales.**

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x+1)^2}{x-3}=+\infty\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+1}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}$. No existe, pues $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{(x-3)}{(x-2)}=-\infty\end{cases}$

5.43. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-1\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{\left(\sqrt{8-x}-3\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(\sqrt{8-x}+3\right)}{(-1-x)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{8-x}+3}{-\sqrt{2+x}-1}=\dfrac{6}{-2}=-3$

b) Este límite no existe, pues:

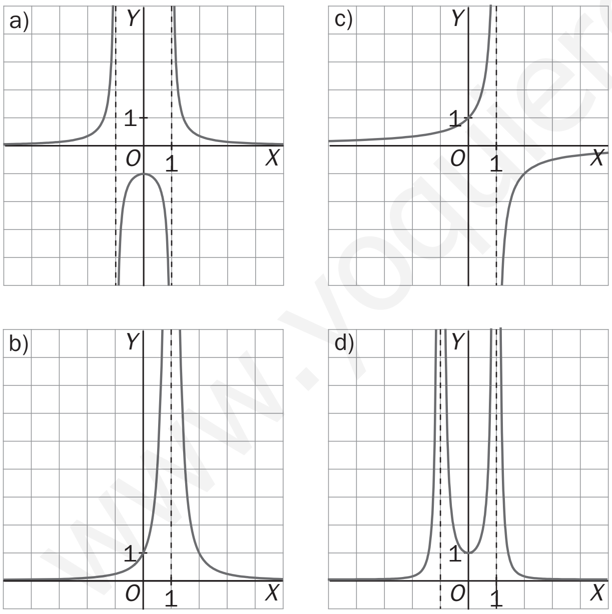
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{8+x}\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2}\right)}{-(x-1)}=-\infty\end{cases}$$

5.44. Las gráficas siguientes corresponden a cuatro funciones que no están definidas en x = 1. Asocia cada gráfica con alguna de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$



La gráfica a) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

La gráfica b) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

La gráfica c) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

La gráfica d) corresponde a la función $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Cálculo de límites

5.45. Calcula todos estos límites.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-x}{5+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5-x}{x+5}$

13) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x-5\sqrt{x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$

16) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-3x^2+2x\right)$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}$

19) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}$

21) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

22) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

23) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$

24) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

25) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}-\dfrac{2+x}{1+x}\right)$

26) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}$

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)$

28) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)$

29) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}$

30) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

31) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}$

32) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$

33) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)$

34) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$

35) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}$

36) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(1+x)^2-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+2)}=\dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{4+6}{4-2}=\dfrac{10}{2}=5$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{9-9}{9+3}=0$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\dfrac{1-3}{1+1}=-1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-2}{2x+5}=\dfrac{3}{2}$

8) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3-x}{5+x}=-1$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$

10) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)}{\sqrt{x}-3}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x}+3)}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}(x+10)(\sqrt{x}+3)=19{\cdot}6=114$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4)(x+2)=8\cdot 4=32$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5-x}{x+5}=-1$

13) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x-1}=\left(\dfrac{8}{2}\right)^2=16$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-5\sqrt{x}\right)=+\infty$

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$

16) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x^2-9}=\sqrt{5^2-9}=4$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+2x\right)=+\infty$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x+3x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1+0-1}{1}=0$

19) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

20) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

21) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=+\infty$

22) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^4-3x}{x^3-2x^2}=-\infty$

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$

24) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$

25) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}-\dfrac{2+x}{1+x}\right)=1-1=0$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}=-2$

27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\left(\sqrt{2x+5}+\sqrt{x}\right)}=+\infty$

28) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+25x\right)=-\infty$

29) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-12x^2+7x+1}{(2x+1)(1-4x)}=\dfrac{-12}{-8}=\dfrac{3}{2}$

30) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{(x^2+x+1)}=-1$

31) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+7x-5}}{2x-9}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

32) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{4x^2+3x}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2-3x}{\left(x+\sqrt{4x^2+3x}\right)}=-\infty$

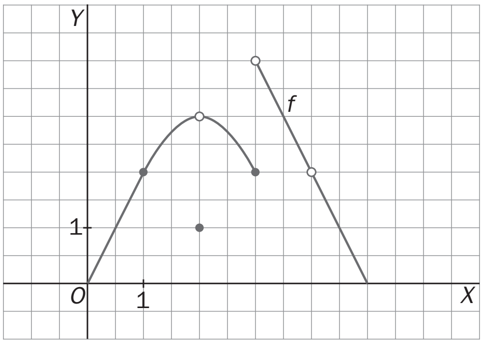
33) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x+1}\right)=-\infty$

34) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}=\dfrac{1}{2}$

35) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+6x+9}{x-3}=+\infty$

36) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=-3$

5.46. Analiza la representación gráfica de la función $f(x)$ y calcula:



a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 3} f(x)$ **e)** $f(1)$ **g)** $f(3)$

b) $\lim_{x \to 2} f(x)$ **d)** $\lim_{x \to 4} f(x)$ **f)** $f(2)$ **h)** $f(4)$

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$. No existe, porque $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$.

d) $\lim_{x \to 4} f(x) = 2$

e) $f(1) = 2$

f) $f(2) = 1$

g) $f(3) = 2$

h) $f(4)$ no existe.

5.47. Calcula el valor de a para que se verifique que: $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = 2$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x \right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x \right)} = \frac{a}{2} = 2 .$$

Luego $a = 4$

5.48. Pon un ejemplo de dos funciones f y g tales que no existan $\lim_{x \to 1} f(x)$ ni $\lim_{x \to 1} g(x)$, pero sí exista $\lim_{x \to 1} \left(f(x) + g(x) \right)$.

Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$, se cumplen las condiciones.

En general, si $H(x)$ es una función tal que existe $\lim_{x \to 1} H(x)$ y $F(x)$ otra función con $F(1) \neq 0$, las condiciones se cumplen para $f(x) = \frac{F(x)}{x-1}$ y $g(x) = H(x) - \frac{F(x)}{x-1}$.

5.49. Efectúa el límite $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$, en el que f es la función $f(x) = x^2 - 3x$.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h(h + 2x - 3)}{h} \right) = 2x - 3$$

5.50. (PAU) Calcula el límite $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \left(-\frac{x^3 - 3x + 2}{(1-x)(1-x^3)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(1-x^3)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x^3)} \right) = \frac{0}{0}$$

Por el Teorema de L´Hôpital: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x^3)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+1}{-3x^2} \right) = \frac{3}{-3} = -1$

5.51. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = x \cdot e^{x} + x^{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^{2}-3}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^{2}+25}$

e) $f(x) = x^{2} - \ln x$

f) $f(x) = x + 2$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-25}$

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ Es continua en todo **R**.

b) $f(x) = x \cdot e^{x} + x^{2}$ Es continua en todo **R** por ser producto y suma de continuas.

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^{2}-3}$ Es continua en $\mathbf{R} - \left\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right\}$.

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^{2}+25}$ Es continua en todo **R** por ser cociente de continuas y no anularse nunca el denominador.

e) $f(x) = x^{2} - \ln x$ Es continua en $(0, +\infty)$.

f) $f(x) = x + 2$ Es continua en todo **R**.

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ Es continua en $\mathbf{R} - \{0\}$.

h) $f(x) = \dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-25}$ Es continua en $\mathbf{R} - \{5, -5\}$.

5.52. (PAU) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^{2} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x^{2} & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

La función es continua en (–2, 2) ∪(2, 3) por ser continuas las funciones 16 – x^2 y x^2.
Debemos estudiar qué ocurre en x = 2:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^{-}} (16 - x^{2}) = 12 \\ \lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^{+}} x^{2} = 4 = f(2) \end{cases}$$

La función no es continua en x = 2, pues no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ al no coincidir los límites laterales. Es una discontinuidad de salto finito.

5.53. La función $f(x) = \dfrac{x^{3} - 3x^{2} - x + 3}{x^{2} - 1}$ no está definida para x = 1 ni para x = –1. ¿Qué valores hay que adjudicar a f(1) y f(–1) para que la función f sea continua en R?

$$f(x) = \frac{x^{3} - 3x^{2} - x + 3}{x^{2} - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = -2 \ \text{ y } \ \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = -4$$

Se debe definir f(1) = –2 y f(–1) = –4 para que sea continua.

5.54. (PAU) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{9x-27}{x+3} & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad en el punto *x* = 0.

b) Calcúlese el límite cuando *x* tiende a $-\infty$ y cuando *x* tiende a $+\infty$.

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-9)=-9=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9x-27}{x+3}=-9 \end{cases}$

Luego la función es contiuna en *x* = 0.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-9)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9x-27}{x+3}=9 \end{cases}$

5.55. (PAU) Calcula *k* para que la siguiente función sea continua en todos los puntos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<5 \\ 4x+k & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

La función es continua en **R** – {5}. Veamos qué ocurre en *x* = 5.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2-1)=24 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}(4x+k)=20+k=f(5) \end{cases}$ Para que sea continua debe ser 24 = 20 + *k*, *k* = 4.

5.56. (PAU) Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ **.**

En $(-\infty,\ 2)-\{1\}$, la función es continua, y en $(2,+\infty)$ también, por ser cocientes de polinomios y no anularse los denominadores. Veamos qué ocurre si *x* = 1 y si *x* = 2:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto infinito en *x* = 1.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-1}=4=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ La función tiene una discontinuidad de salto finito en *x* = 2.

Así pues, la función es continua en **R** – {1, 2}.

5.57. (PAU) Calcula los valores de *a, b* $\in$ R para que la función $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0<x<1 \\ bx & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

sea continua en todo punto.

Debemos ver qué ocurre en *x* = 0 y en *x* = 1, ya que en el resto es continua.

$$\lim_{x\to 0} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Para que sea continua en *x* = 0, debe ser $a=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx=b=f(1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Para que sea continua en *x* = 1, debe ser $b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

5.58. **(PAU) Sea** $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x<1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$**. ¿Para qué valores del parámetro *a* la función es continua?**

La función es continua si $x \neq 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x+a)^2=(1+a)^2=f(1)\end{cases}$$

Debe ser $(1 + a)^2 = 1$, $a = 0$ o $a = -2$.

5.59. **La función *f*(*x*) está definida en R por:**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\leq 2 \\ a-x & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) Calcula el valor de *a* para que *f* sea continua en R.

b) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en *x* = 2 un salto de 3 unidades hacia arriba.

c) Calcula el valor de *a* para que la función tenga en *x* = 2 un salto de 5 unidades hacia abajo.

a) Miremos qué ocurre en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-1)=3=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} (a-x)=a-2\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua debe ser } a-2=3;\ a=5.$$

b) Para que tenga un salto de tres unidades hacia arriba debe ser $a - 2 = 6$, $a = 8$.
c) Para que tenga un salto de cinco unidades hacia abajo debe ser $a - 2 = -2$, $a = 0$.

5.60. **Determina *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos:**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x<0 \\ x-a & \text{si } 0\leq x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & \text{si } 1\leq x\end{cases}$$

Como $\dfrac{a}{x}+b$ es continua en $(1, +\infty)$, solo debemos estudiar qué ocurre en $x = 0$ y en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} (ax^2+b)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (x-a)=-a=f(0)\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua, debe ser } b=-a.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x):\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} (x-a)=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a}{x}+b=a+b=f(1)\end{cases} \Rightarrow \text{Para que sea continua en } x=1, \text{ debe ser } 1-a=a+b.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} b=-a \\ 1-a=a+b\end{cases}$ obtenemos $a = 1$, $b = -1$.

Teoremas relacionados con la continuidad

5.61. **Demuestra que la ecuación $x^5 - x^2 + x - 5 = 0$ tiene alguna solución real.**

$f(x) = x^5 - x^2 + x - 5$ es continua en $[0, 2]$, $f(0) = -5 < 0$ y $f(2) = 25 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número c entre 0 y 2 con $c^5 - c^2 + c - 5 = 0$.

5.62. **Demuestra que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución real menor que 2 y mayor que 1.**

$f(x) = x^3 + x - 5$ es continua en $[1, 2]$, $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$. Usando el teorema de Bolzano sabemos que hay un número c entre 1 y 2 con $c^3 + c - 5 = 0$.

5.63. a) Comprueba que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 5x - 4 = 0$ tiene tres raíces reales. Para ello, estudia el signo de la función en algunos valores enteros.

b) Calcula tres intervalos de longitud 1 en los que estén incluidas las raíces.

a) Sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 4$

$f(-6) = -46 < 0$ y $f(-2) = 14 > 0$ entre –6 y –2 hay una raíz real.

$f(-2) = 14 > 0$ y $f(0) = -4 < 0$ entre –2 y 0 hay una raíz real.

$f(0) = -4$ y $f(2) = 10$ entre 0 y 2 hay una raíz real.

b) Los intervalos de longitud 1 donde están incluidas las raíces son:

(–5, –4), (–1, 0) y (1, 2)

Funciones y límites en las Ciencias Sociales

5.64. (PAU) El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera. Se prevé que a partir de ahora la siguiente función indicará en cada momento (*t*, medido en meses) el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & 0 \le t \le 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0,4t} & t > 10 \end{cases}$$

a) Confirma que dicha función es continua y que, por tanto, no presenta un salto en *t* = 10.

b) Por mucho tiempo que pase, ¿a qué porcentaje no se llegará nunca?

a) Si $t \neq 10$, la función es continua por estar definida por un polinomio o un cociente de polinomios con denominador no nulo en su dominio de definición.

$$\lim_{t\to 10} P(t): \begin{cases} \lim\limits_{t\to 10^-} P(t) = \lim\limits_{t\to 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 = f(10) \\ \lim\limits_{t\to 10^+} P(t) = \lim\limits_{t\to 10^+} \dfrac{38t - 100}{0,4t} = 70 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } P(x) \text{ es continua en } t = 10.$$

b) $\lim\limits_{t\to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{38t - 100}{0,4t} = \dfrac{38}{0,4} = 95$

Nunca se llegará al 95% de pacientes operados sin necesidad de entrar en lista de espera.

5.65. (PAU) Un comercio abre sus puertas a las nueve de la mañana y las cierra cuando se han marchado todos los clientes. El número de clientes viene dado por la función $C(t) = -t^2 + 8t$, siendo *t* el número de horas transcurridas desde la apertura. El gasto por cliente (en euros) también depende de *t* y decrece a medida que pasan las horas siguiendo la función $G(t) = 300 - 25t$.

a) ¿A qué hora se produce la mayor afluencia de clientes?

b) ¿A qué hora se cierra el comercio?

c) ¿Cuánto gasta el último cliente que abandonó el local?

d) Encuentra la función que nos da la recaudación dependiendo del tiempo.

e) ¿Cuándo hay mayor recaudación, en la cuarta o en la quinta hora?

a) Al ser $C(t) = -t^2 + 8t$ una parábola, su máximo lo alcanza en el vértice, que es $V(4, 16)$, luego la máxima afluencia se produce a 4 horas de abrir, esto es, a las 13.00, y es de 16 clientes.

b) El negocio cierra cuando $C(t) = -t^2 + 8t = 0$, a las 8 horas de abrir, o sea, a las 17.00.

c) El último cliente abandona el local cuando $t = 8$ y gasta $G(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100$ euros.

d) La recaudación en una hora es el producto del número de clientes en esa hora por el gasto de cada cliente en esa hora. Así pues, $R(t) = C(t) \cdot G(t) = (-t^2 + 8t)(300 - 25t)$.

e) $R(4) = (-4^2 + 8 \cdot 4)(300 - 25 \cdot 4) = 3200$ euros

$R(5) = (-5^2 + 8 \cdot 5)(300 - 25 \cdot 5) = 2625$ euros

La recaudación es mayor en la cuarta hora que en la quinta.

5.66. Se ha estimado que la población de un barrio periférico de una gran ciudad evolucionará siguiendo este modelo: $P(t) = \dfrac{240 + 20t}{16 + t}$ · miles de habitantes, donde *t* indica los años transcurridos desde su creación en el año 2005.

a) ¿Qué población tenía dicho barrio en el año 2005?

b) ¿Qué población tendrá dicho barrio en el año 2015?

c) ¿Será posible que la población del barrio duplique a la población inicial?

d) A largo plazo, ¿la población se estabilizará o no?

a) $P(0) = \dfrac{240}{16} = 15$. El barrio tenía 15 000 habitantes en 2005.

b) Habrán pasado 10 años desde su creación y, por tanto, $t = 10$.

$P(10) = \dfrac{240 + 200}{16 + 10} \approx 16{,}923$. Habrá 16 923 habitantes en 2015.

c) $P(t) = 2 \cdot P(0)$, $P(t) = \dfrac{240 + 20t}{16 + t} = 30 \Rightarrow 240 + 20t = 480 + 30t \Rightarrow t = -24$. No, el barrio nunca duplicará su población.

d) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{240 + 20t}{16 + t} = 20$. La población se estabilizará en 20 000 habitantes.

5.67. (PAU) Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36\,000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse, en este caso, mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12\,000x + 700\,000$, donde, en ambas funciones, *x* representa la cantidad de unidades vendidas. Determínese:

a) La función que define el beneficio anual en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo.

c) El beneficio máximo.

a) $B(x) = I(x) - G(x) = (28x^2 + 36\,000x) - (44x^2 + 12\,000x + 700\,000) = -16x^2 + 24\,000x - 700\,000$.

b) Al ser la función de beneficios una parábola, el máximo se alcanzará en el vértice, que es $V(750,\ 8\,300\,000)$.
Los máximos beneficios se obtienen produciendo 750 unidades y son de 8 300 000 euros.

c) El beneficio máximo es de 8 300 000 euros.

5.68. Se sabe que los costes totales de fabricar *x* unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$.

a) Encuentra la función que nos da el coste unitario medio.

b) A medida que se fabrican más y más unidades, ¿está el beneficio medio acotado o crece indefinidamente?

a) El coste unitario es el cociente entre el coste total y el número de unidades producidas:

$$U(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2 - 27x + 108}{x}$$

b) $\lim\limits_{x' +\infty} U(x) = \lim\limits_{x' +\infty} \dfrac{3x^2 - 27x + 108}{x} = +\infty$. Luego el beneficio crece indefinidamente.

5.69. (PAU) La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, donde *x* es el tiempo transcurrido desde el 1 de enero de 1990, contado en años.

a) ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?

b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que alcanza esa ciudad?

a) Como la función de la concentración es una parábola, crecerá hasta el vértice $V(12{,}5;\ 183{,}75)$.
Luego ocurrirá a mediados del año 2002 y será de 183,75 microgramos por metro cúbico.

b) Es de 183,75 microgramos por metro cúbico.

5.70. Una constructora ha comprado una excavadora por 80 000 euros. El departamento financiero ha calculado que puede revenderla al cabo de *t* años al precio de $f(t)=\dfrac{80}{1+0,4t}$ miles de euros.

a) ¿Al cabo de cuántos años la excavadora perderá la mitad de su valor de compra?

b) Calcula el límite $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ y da una interpretación económica a este resultado.

a) $f(t)=\dfrac{f(0)}{2}$

$\dfrac{80}{1+0,4t}=40 \Rightarrow 80=40+16t \Rightarrow t=2,5$. A los dos años y medio.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{80}{1+0,4t}=0$. Al cabo del tiempo, la excavadora irá perdiendo su valor de compra.

5.71. Los beneficios mensuales de un artesano expresados en euros, que vende *x* objetos, se ajustan a la función *B*(*x*) = –0,5x^2 + 50*x* – 800, donde $20\le x\le 60$. Demuestra que las funciones beneficio y beneficio medio tienen un máximo.

La función beneficio es una parábola hacia abajo y, por tanto, alcanza su máximo en el vértice *V*(50, 450). Como20 ≤ 50 ≤ 60, el máximo beneficio se obtiene vendiendo 50 objetos y es de 450 euros.

El beneficio medio es $\dfrac{-0,5x^2+50x-800}{x}$. Como la función es continua en el intervalo [20, 60], usando el teorema del máximo y del mínimo, concluimos que en dicho intervalo alcanza el máximo aunque aún no sabemos hallarlo.

5.72. Un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que el precio unitario que los consumidores aceptan pagar por cierto artículo depende de la cantidad *x* de dichos artículos que salen a la venta, siguiendo este modelo de demanda: $g(x)=\dfrac{170}{x+5}$ (*g*(*x*) en euros y *x* en miles de unidades).

Los productores han calculado que el precio unitario satisfactorio para ellos, dependiente de *x*, se rige según este modelo de oferta: *f*(*x*) = 3*x* + 2 (*f*(*x*) en euros y *x* en miles de unidades).

a) Calcula cuántas unidades deben ponerse a la venta para conseguir el punto de equilibrio, en el que la demanda y la oferta se igualan, y, por tanto, consumidores y fabricantes quedan satisfechos.

b) ¿Cuál es el precio unitario de este artículo en el punto de equilibrio?

a) *g*(*x*) = *f*(*x*): $\dfrac{170}{x+5}=3x+2 \Rightarrow 170=(x+5)(3x+2) \Rightarrow 3x^2+17x-160=0$, *x* = 5 o $x=-\dfrac{32}{3}$

(que no tiene sentido en este contexto). El punto de equilibrio se consigue fabricando 5000 unidades.

b) El precio unitario es *f*(5) = 17 euros.

PROBLEMAS

5.73. El balance económico mensual, en miles de euros, de una compañía vinícola viene dado por $f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}$, $x\ge 0$, donde *x* es el precio, en euros, de una botella de vino. ¿A qué valor tienden sus ganancias o pérdidas a largo plazo?

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3-\dfrac{5}{x+2}=3$

Las ganancias tienden a 3000 euros mensuales.

5.74. Un grupo de suricatos huye de una fuerte sequía que asola su hábitat y comienza su peregrinaje en busca de agua en el instante $t = 0$. El número de individuos de la población sigue esta ley:

$P(t) = 140 - 4t - t^2$, donde t se mide en meses.

a) ¿Cuántos suricatos había al principio de la huida?

b) Demuestra que la población va siempre disminuyendo.

c) Finalmente no encontraron zonas con agua. ¿Cuándo despareció la población completamente?

a) $P(0) = 140$. Al comienzo había 140 individuos.

b) Al ser la función una parábola hacia abajo, a la derecha del vértice que está en $V(-2, 144)$ es siempre decreciente, luego la población va disminuyendo siempre.

c) $P(t) = 0$, $140 - 4t - t^2 = 0$, $t = -14$ y $t = 10$. La población desapareció a los 10 meses de comenzar el peregrinaje.

5.75. El coste mensual de las llamadas telefónicas de cierta compañía se obtiene sumando una cantidad fija (en concepto de alquiler de línea) con otra proporcional a la duración de las llamadas. En dos meses distintos se han pagado 21,14 euros por 13 horas y 27 minutos de llamadas y 23,60 euros por 15 horas y media de llamadas.

a) Encuentra la función que nos da el coste en función de los minutos hablados.

b) ¿Cuántos céntimos cobran por cada minuto hablado?

a) $C(t) = a + bt$, donde a es la cantidad fija, y b, el precio por minuto. Para hallar a y b resolvemos el sistema

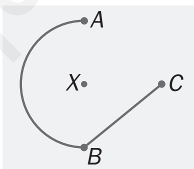
$$\begin{cases} 21{,}14 = a + 807b \\ 23{,}60 = a + 930b \end{cases}$$

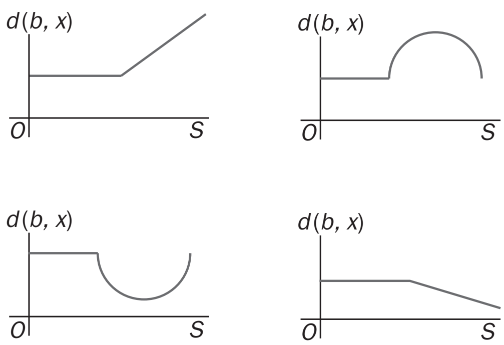
La solución del sistema es $a = 5$ y $b = 0{,}02$.

$C(t) = 5 + 0{,}02t$, con t medido en minutos.

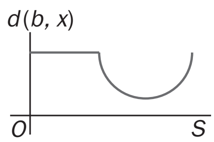
b) Cobran 0,02 céntimos por minuto.

5.76. Un barco navega del punto A hasta el punto B, describiendo una semicircunferencia centrada en una isla X. Luego navega en línea recta desde B a C. ¿Cuál de las siguientes cinco gráficas muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida?





La gráfica que muestra la distancia del barco a la isla, según la distancia recorrida es:



5.77. La temperatura *y* en grados Fahrenheit (ºF) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura *x* en grados Celsius (ºC). En la escala Fahrenheit el agua se congela a 32 ºF y hierve a 212 ºF.

a) Encuentra la función lineal que relaciona la temperatura en grados Fahrenheit con sus correspondientes grados Celsius.

b) Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 37 ºC, ¿cuál es la temperatura normal en grados Fahrenheit?

a) $F = a + b\,C$, $32 = a + 0 \cdot b$ y $212 = a + 100\,b$. Resolvemos el sistema y obtenemos que $a = 32$ y $b = 1{,}8$.

La función es $F = 32 + 1{,}8\,C$, y su inversa, $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$.

b) $F = 32 + 1{,}8 \cdot 37 = 98{,}6$ ºF

5.78. Una empresa produce ratones inalámbricos en grandes cantidades. Atendiendo a los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir *p* ratones tiene un coste total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar *p* unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

c) Calcula $\lim\limits_{p\to+\infty} C_m(p)$ y da una interpretación económica al resultado.

a) $C_m(p) = \dfrac{10p + 100000}{p} = 10 + \dfrac{100000}{p}$

b) $C_m(10) = 10 + \dfrac{100000}{10} = 10010$; $\quad C_m(1000) = 10 + \dfrac{100000}{1000} = 110$

La diferencia se debe a que los gastos de producción disminuyen a medida que aumentan las unidades fabricadas.

c) $\lim\limits_{p\to+\infty} C_m(p) = \lim\limits_{p\to+\infty} \left(10 + \dfrac{100000}{p}\right) = 10$.

El coste de producción tiende a estabilizarse en torno a los 10 euros cuando la producción es muy elevada.

PROFUNDIZACIÓN

5.79. Calcula el siguiente límite ayudándote de la calculadora puesta en modo radianes:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$$

x	1	10	100	1000
$f(x)$	1,09242	1,00001	1	1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x} = 1$$

5.80. Calcula este límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{a}{x}} + 1\right)} = \frac{a}{2}$$

5.81. Comprueba que los límites del tipo $1^{+\infty}$ dan lugar a indeterminaciones. Para ello, obtén con la calculadora una aproximación de estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+6}\right)^{x+1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x^2-1}{x^2+6}\right)^{3x-2}$

a)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	2041,41918	2765,39059	2957,3549	2978,57568	2980,95565

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-3}\right)^{x}\approx 2981$. En realidad, el límite es e^8.

b)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	5,15978	7,10259	7,35959	7,3861	7,38906

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x-1}\approx 7{,}39$. En realidad, el límite es e^2.

c)

x	10	100	1000	10 000	99 999 999 999
$f(x)$	1,94813	2,58148	2,70346	2,71678	2,71828

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+6}\right)^{x+1}\approx 2{,}7$. En realidad, el límite es e.

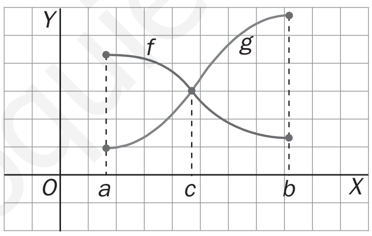
d)

x	10	100
$f(x)$	104 844 072	$4{,}58\cdot10^{89}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x^2-1}{x^2+6}\right)^{3x-2}=+\infty$

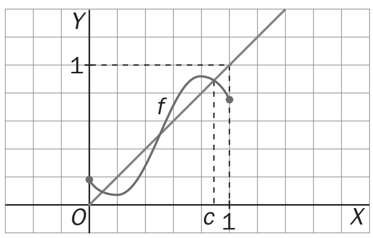
5.82. Demuestra que si *f* y *g* son funciones continuas en el intervalo cerrado [*a*, *b*] con *f*(*a*) > *g*(*a*) y *f*(*b*) < *g*(*b*), entonces existe un número *c* en [*a, b*] tal que *f*(*c*) = *g*(*c*).

(Ayúdate de la función *F*(*x*) = *f*(*x*) – *g*(*x*).)



La función $F(x) = f(x) - g(x)$ es continua en [a, b] por ser diferencia de funciones que lo son. Además, como $f(a) > g(a)$, $F(a) = f(a) - g(a) > 0$ y $f(b) < g(b)$, $F(b) = f(b) - g(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano sabemos que existe al menos un número c en [a, b] con $F(c) = f(c) - g(c) = 0$ y, por tanto, $f(c) = g(c)$.

5.83. Sea *f* una función continua en el intervalo cerrado [0, 1] y con 0 ≤ *f*(x) ≤ 1 para cada *x* en [0, 1]. Demuestra que existe un número real *c* en [0, 1] para el que se cumple que *f*(*c*) = *c*.



Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, ya está probado tomando $c = 0$ o $c = 1$. Si no es así, tenemos que $0 < f(0) \le 1$ y $0 \le f(1) < 1$. Consideremos la función $g(x) = x$, que es continua en [0, 1]. Como $f(0) > g(0) = 0$ *y* $f(1) < g(1) = 1$, usando el problema precedente sabemos que existe c con $f(c) = g(c)$, luego $f(c) = c$.

5.84. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Las funciones son continuas en el intervalo cerrado [1, 2], 0 = $f(1) < g(1) = e^{-1}$ y $\ln 2 = f(2) > g(2) = e^{-2}$. Usando el problema 79 sabemos que existe un número c en [0, 2] tal que $\ln c = e^{-c}$.

5.85. Dada la función racional $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$, se pide:

a) Demostrar que esta función está definida para todos los reales menos para $x = 1$.

b) ¿Qué valor deberíamos asignar a $f(1)$ para que f sea continua en todo R?

a) Veamos dónde se anula el denominador: $x^3+7x-8=(x-1)(x^2+x+8)=0$ si $x = 1$, pues $x^2 + x + 8$ no tiene raíces reales.

b) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+8)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x^2+x+8)}=\dfrac{1}{5}$

5.86. Dada la función $f(x)=\dfrac{|x-3|}{|x+1|}$

a) Escríbela como una función definida a trozos.

b) A continuación calcula los límites laterales en $x = -1$ y en $x = 3$.

a) $|x-3| = x-3$ si $x \ge 3$ y $|x-3| = -(x-3)$ si $x<3$

$|x+1| = x+1$ si $x \ge -1$ y $|x+1| = -(x+1)$ si $x<-1$

$f(x)=\dfrac{-(x-3)}{-(x+1)}$	-1	$f(x)=\dfrac{-(x-3)}{x+1}$	3	$f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+1} & x<-1\\ \dfrac{3-x}{x+1} & -1<x<3\\ \dfrac{x-3}{x+1} & 3\le x\end{cases}$$

Si $x = -1$, la función no está definida, pues se anula el denominador.

b) $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-3}{x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3-x}{x+1}=+\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x+1}=0\end{cases}$$

5.87. Estudia si la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ es continua en $x = 1$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{1-x} & x<1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1\end{cases}$$

Observa que si $x = 1$, la función no está definida, pues se anula el denominador.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ La función no es continua en $x = 1$.

5.88. Determina de las siguientes afirmaciones cuáles son siempre ciertas y cuáles pueden ser falsas.

a) Si *f*(1) < 0 y *f*(2) > 0, debe haber un número *c* en (1, 2) tal que *f*(*c*) = 0.

b) Si *f* es continua en [1, 2] y hay un número *c* en (1, 2) tal que *f*(*c*) = 0, entonces *f*(1) y *f*(2) deben ser de diferente signo.

c) Si *f* es continua en [1, 2] y nunca se anula en (1, 2), entonces *f*(1) y *f*(2) tienen el mismo signo.

a) No es siempre cierta. Depende de si *f* es continua o no en el intervalo [1, 2].

Por ejemplo, si $f(x) = 2x - 3$, la afirmación es cierta, pero si $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \le \dfrac{3}{2} \\ 5 & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$, es falsa.

b) No es siempre cierta; por ejemplo, si $f(x) = 0$ o si $f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$, se cumplen las hipótesis y, sin embargo, *f*(1) y *f*(2) no tienen distinto signo.

c) Sí es cierta, pues si *f*(1) y *f*(2) tuvieran distinto signo, por el teorema de Bolzano, existiría un número *c* en (1, 2) con *f*(c) = 0.

5.89. La cantidad, *q*(*t*), que queda de una masa de *M* mg de una sustancia radiactiva al cabo de *t* días viene expresada por la fórmula $q(t) = M \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo la masa *M* se ha reducido a la mitad?

b) Si la masa inicial *M* es de 27 mg, ¿cuánta sustancia quedará aproximadamente al cabo de 10 días?

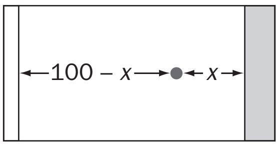
c) Calcula el límite $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ e interpreta el resultado obtenido.

a) $M \cdot e^{-0,1 \cdot t} = \dfrac{M}{2} \Rightarrow t = 10 \ln 2$, aproximadamente 7 días

b) $q(10) = 27 \times e^{-0,1 \cdot 10} = \dfrac{27}{e}$ » 9,933 mg

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} M \cdot e^{-0,1t} = 0$ mg. La radiactividad desaparecerá al cabo del tiempo.

5.90. En un estadio de fútbol tuvo lugar un concierto de rock. Se colocaron dos inmensas torres de sonido que ocupan los fondos, enfrentadas entre sí: una en la parte trasera del estadio, y otra en el escenario, tres veces más potente que la primera. La intensidad del sonido en un punto es proporcional a la potencia de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Sabiendo que la distancia entre las torres de sonido es de 100 m, encuentra la función que nos da la intensidad del sonido según a la distancia a la que nos situemos del escenario.



$$I(x) = \frac{3k}{x^2} + \frac{k}{(100 - x)^2}$$

5.91. Joaquín sale de excursión a las siete de la mañana desde el aparcamiento y llega al refugio a las cinco de la tarde. Al día siguiente, de regreso, sale del refugio por la mañana y llega al coche por la tarde.

Demuestra que hay un punto del recorrido por el que pasó justo a la misma hora a la ida y a la vuelta.

De forma intuitiva, supongamos que mientras que Joaquín camina desde el refugio al aparcamiento, un amigo suyo hace el camino que Joaquín hizo el día anterior ,es decir, desde el aparcamiento hasta el refugio. A cierta hora, en un punto del recorrido Joaquín y su amigo se encontraran, esto quiere decir que Joaquín pasará a la misma hora por un punto del recorrido a la ida y a la vuelta de su excursión.

Aplicando el Teorema de Bolzano: Sea *f* la función de ida y *g* la función de vuelta, son funciones continuas en un intervalo cerrado[*a*, *b*] con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$,tomando la función $F(x)=g(x) - f(x)$ y la demostración del ejercicio 82,sabemos que existe un punto *c* del recorrido en el que $F(c)=g(c) - f(c)=0$ y por tanto, $f(c) = g(c)$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

5.1. Se consideran las funciones *f*, *g* y *h*, definidas en R, tales que para todo número real *x* se tiene que *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) ≤ *h*(*x*).

Si además $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, se puede deducir:

A) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

B) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

C) $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

D) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

E) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$

La respuesta correcta es la C) porque como *f*(*x*) ≤ *g*(*x*) ≤ *h*(*x*) para todo *x* entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x)\le \lim_{x\to+\infty} g(x)\le \lim_{x\to+\infty} h(x)$.

Para descartar las opciones A), B) y C) basta considerar las funciones *f*(*x*) = 1 para todo *x*, $g(x) = x^2 + 2$ y $h(x) = x^2 + 4$.

Para descartar E) consideremos $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 +1$ y $h(x) = x^2 + 2$, en este caso $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=1$.

5.2. Considera la función $f(x)=e^{-x^2+3}$. Entonces, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ es igual a:

A) $+\infty$

B) 0

C) e^3

D) No existe.

E) Es finito, pero distinto de 0 y de e^3.

Sin más que observar que $\lim_{x\to-\infty} (-x^2+3)=-\infty$ obtenemos que la respuesta es B).

5.3. Consideremos la función *f*: (0, + ∞) → R definida por $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2}$. Entonces:

A) El eje *X* es asíntota de la gráfica de *f*.

B) La gráfica de *f* no tiene asíntotas ni verticales ni horizontales.

C) La gráfica de *f* no corta nunca al eje *X*.

D) El eje *Y* es asíntota vertical de la gráfica de *f*.

E) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$

Analicemos cada opción y vayamos descartando:

A) Calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Así pues, la función no tiene asíntotas horizontales.

B) Observamos que x = 0 es una asíntota vertical de f(x) ya que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

C) $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2}=0$ si $x^3 + 3x - 1 = 0$ y esta ecuación tiene al menos una solución real ya que un polinomio de 3er grado corta al menos una vez al eje *X*.

D) Es cierta como hemos comprobado en B).

E) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=1$.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

5.4. **Sea *f* la función definida en (–2, +∞) por la fórmula $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$. Entonces:**

A) La gráfica de *f* corta al eje de ordenadas en el punto de ordenada $\frac{7}{2}$.

B) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$

C) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 3) = 0$

D) *f*(*x*) > 3 para todo *x* del dominio de *f*.

E) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

A) Es verdadera pues $f(0) = 3 + \frac{1}{0+2} = \frac{7}{2}$.

B) Es falsa, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.

C) Es cierta, $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 3) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

D) Es verdadera pues $\frac{1}{x+2} > 0$ si $x > -2$.

E) Es falsa pues la función no está definida si $x \le -2$ y por tanto no podemos calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

5.5. **Sea *g* la función definida en (0, +∞) mediante la fórmula $g(x) = \ln\frac{2}{x}$. Entonces:**

A) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

B) Si *a* > 1, entonces *g*(*a*) < *g* (2).

C) La gráfica de *g*(*x*) no corta nunca al eje *X*.

D) La gráfica de *g*(*x*) corta dos veces al eje *Y*.

E) El conjunto de números reales soluciones de la inecuación *g*(*x*) ≤ 0 es [2, +∞).

A) Es verdadera pues $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln 2 - \ln x) = \ln 2 - \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = -\infty$.

B) Es falsa. *G*(2) = ln 1 = 0 pero g(a) = ln 2 – ln *a* > 0 si 1 < *a* < 2, por ejemplo, *g*(1,5) ≈ 0,29.

C) Es falsa, *g*(2) = 0.

D) Es falsa pues *g*(*x*) = 0 si ln 2 = ln(*x*) cuya única solución es *x* = 2.

E) Es verdadera *g(x)* ≤ 0 si ln 2 ≤ ln(*x*) y esto ocurre si 2 ≤ *x*.

5.6. **Sea *f* la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.**

A) *D*(*f*) = R

B) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

C) *f* es continua en todos los puntos de su dominio.

D) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

E) $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

A) Es falsa. $x^2 - x \ge 0$ si $x \le 0$ ó $1 \le x$ luego *D*(*f*) = (– ∞, 0] ∪ [1, + ∞].

B) Es verdadera.

C) Es verdadera pues es suma de dos funciones continuas.

D) Es verdadera: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} + x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right) = 2$.

E) Es falsa. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$

5.7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A) Si $f(2) \cdot f(3) < 0$, existe algún número $c \in (2,3)$ con $f(c) = 0$.

B) Si f es continua en [2, 3] y no se anula en [2, 3], entonces $f(2) \cdot f(3) > 0$.

C) Si f es continua en [2, 3] y se anula alguna vez en ese intervalo, entonces $f(2)$ y $f(3)$ tienen diferente signo.

D) Si f es continua en [2, 3], existe algún número c tal que $2f(c) = f(2) + f(3)$.

E) Si f es continua en [2, 3] y f : [2, 3] → [2, 3], existe algún número c en [2, 3] tal que $\frac{f(c)}{c} = 1$.

A) Es cierto si la función es continua. Un contraejemplo es $f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$.

B) Es verdadera.

Si $f(2) \cdot f(3)$ fuera negativo, $f(2)$ y $f(3)$ tendrían distinto signo y por el teorema de Bolzano existiría un número c en [2, 3] con f(c) = 0 pero f no se anula en [2, 3].

C) Es falsa.

Un contraejemplo es $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

D) Es verdadera.

Si $f(2) = f(3)$ entonces basta tomar $c = 2$. Si $f(2) \ne f(3)$ entonces $f(2) - f(3)$ y $f(3) - f(2)$ tienen distinto signo.

Consideremos la función $g(x) = 2f(x) - f(2) - f(3)$ que es continua en [2, 3] pues f lo es.

$g(2) = f(2) - f(3)$ y $g(3) = f(3) - f(2)$ tienen distinto signo luego, por el teorema de Bolzano existe algún número c en [2, 3] con $g(c) = 2f(c) - f(2) - f(3) = 0$, así pues $2f(c) = f(2) + f(3)$.

E) Es verdadera.

Consideremos en este caso la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en [2, 3].

Si $g(2) = 0$ o $g(3) = 0$ ya estaría demostrado pues tendríamos $f(2) = 2 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} = 1$ o $f(3) = 3 \Rightarrow \frac{f(3)}{3} = 1$.

En caso contrario $g(2) = f(2) - 2 > 0$, $g(3) = f(3) - 3 < 0$. Usando el teorema de Bolzano deducimos que existe algún número c en [2, 3] tal que $g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c \Rightarrow \frac{f(c)}{c} = 1$.

Otra forma de verlo es gráficamente: como f es continua y va de [2, 3] al [2, 3], a la fuerza, su gráfica corta en algún punto $(c, f(c))$ al segmento que une los puntos (2, 2) y (3, 3), es decir, a la recta $y = x$, por lo que $f(c)=c$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

5.8. Considera la función $f(x) = x \cdot g(x)$:

a) La gráfica de f pasa por el origen de coordenadas.

b) g es continua en 0.

A) $b \Rightarrow a$, pero $a \not\Rightarrow b$

B) $a \Rightarrow b$, pero $b \not\Rightarrow a$

C) $a \Leftrightarrow b$

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La relación correcta es A) Como $g(x)$ es continua en $x = 0$, existe $g(0)$ y $f(0) = 0 \cdot g(0) = 0$. Luego la función pasa por (0, 0). Para ver que b no implica a basta considerar la función $g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

Señala el dato innecesario para contestar:

5.9. **Para demostrar si $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$, donde $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-4)^{2d}}$, con *a*, *b*, *c* y *d* enteros positivos y nos dan estos datos:**

a) Valor de *a*

b) Valor de *b*

c) Valor de *c*

d) Valor de *d*

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ninguno.

D) Puede eliminarse el valor de d pues solo nos interesa el signo de la expresión. Para hallarlo necesitamos saber el signo de $(x – a)$, $(x – b)$, $(x – c)$ $(x – 4)^{2d}$ cuando x se aproxima a 4. Para saber los tres primeros necesitamos conocer a, b y c pero $(x – 4)^{2d}$ es siempre positivo por ser $2d$ par.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

5.10. **Para decidir si la la gráfica de $y = x^2 + bx + c$ corta al eje horizontal nos dicen que:**

a) $c < 0$

b) $b \geq 0$

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

B) Debemos saber si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene solución. Como si $c < 0$ entonces $b^2 – 4c > 0$, la ecuación tendrá dos soluciones y por tanto, la función cortará dos veces al eje horizontal. $b \geq 0$ no es suficiente pues por ejemplo, $x^2 + 3x – 4$ corta al eje y $x^2 + 3x + 6$ no.

6 Derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

6.I. Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Horizontal y que pase por el punto *A*(1, 4).

b) Decreciente y que pase por el punto *A*(2, –3).

c) Creciente y que pase por el origen.

d) Que pase por los puntos *A*(2, 4) y *B*(–3, –8).

e) Paralela a $y = -2x + 1$ y que corte al eje *X* en el punto *A*(1, 0).

f) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que pase por el punto *A*(1, 6).

a) $y = 4$

b) $y = -x - 1$

c) $y = 3x$

d) $\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-4}{-8-4} \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{4}{5}$

e) $y = -2x + 2$

f) $y = x + 5$

6.II. Dada la expresión $A = \frac{\sqrt{x^2y^3}}{z}$, calcula ln*A* y expresa el resultado mediante sumas y restas de logaritmos.

$$\ln A = \ln\frac{\sqrt{x^2y^3}}{z} = \ln\sqrt{x^2y^3} - \ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2y^3) - \ln z = \frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{2}\ln y^3 - \ln z = \ln x + \frac{3}{2}\ln y - \ln z$$

6.III. Transforma las siguientes expresiones en un solo logaritmo:

a) 2log 5 – 5log *a* + 2log *b* – log *c*

b) $\frac{3\ln a}{2} + \frac{\ln b}{2} - \ln c$

a) $2\log 5 - 5\log a + 2\log b - \log c = \log 5^2 - \log a^5 + \log b^2 - \log c = \log 5^2 + \log b^2 - (\log a^5 + \log c) =$

$$= \log(5^2 \cdot b^2) - \log(a^5 \cdot c) = \log\frac{5^2 \cdot b^2}{a^5 \cdot c}$$

b) $\frac{3\ln a}{2} + \frac{\ln b}{2} - \ln c = \ln a^{\frac{3}{2}} + \ln b^{\frac{1}{2}} - \ln c = \ln\frac{\sqrt{a^3b}}{c}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1. La distancia recorrida por un autobús en los cinco primeros segundos desde que sale de una parada viene dada por la función $f(t) = t^2$.

¿Qué velocidad llevará en el instante *t* = 3 segundos?

La velocidad en el instante *t* = 3 es la tasa de variación instantánea en *t* = 3:

$$v(3) = TVI\, f(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = 6 \text{ m/s}$$

6.2. La emisión diaria de gases, en toneladas, en una fábrica viene dada por la expresión $n(t) = \frac{t}{8}(20 - 2t)$ con $0 \le t \le 10$, estando *t* medido en horas. Calcula la tasa de variación instantánea de $n(t)$ para *t* = 5 horas.

$$TVI\, n(5) = \lim_{h\to 0}\frac{n(5+h) - n(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{5+h}{8}(20 - 2(5+h)) - \frac{50}{8}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2h^2}{8}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{4} = 0$$

6.3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 5$.

La pendiente de la recta tangente es $f'(5)$.

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5+h)^2-3(5+h)-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{25+10h+h^2-15-3h-10}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+7)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+7)=7$$

La recta pasa por el punto de tangencia $A(5, f(5)) = A(5, 10)$. La ecuación de la recta tangente es:

$y - 10 = 7(x - 5)$, es decir, $y = 7x - 25$.

6.4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (3x-2)^2$, que es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

La pendiente de la recta tangente es 6 porque es paralela a $y = 6x - 5$. Calculemos el punto de tangencia $A(a, f(a))$. El punto de tangencia debe cumplir que $f'(a) = 6$; por tanto:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(a+h)-2)^2-(3a-2)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9a^2+9h^2-18ah+4-12a-12h-9a^2-4+12a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(9h+18a-12)}{h}=18a-12$$

Como $18a - 12 = 6$, $a = 1$. El punto de tangencia es $A(1, f(1)) = A(1, 1)$.

La recta tangente es $y - 1 = 6(x - 1)$, es decir, $y = 6x - 5$.

6.5. Halla la función derivada de:

a) La función constante: $f(x) = c$

b) La función identidad: $f(x) = x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=0$

b) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{(x+h)xh}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x+h)x}=\dfrac{-1}{x^2}$

6.6. Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

b) $f(x)=(x^3-x)^7$

c) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^5$

d) $f(x)=(x+2)\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4$

a) $f'(x)=\dfrac{0\cdot(x+1)-1\cdot 2x}{(x+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

b) $f'(x)=7(x^3-x)^6(3x^2-1)$

c) $f'(x)=5\left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^4\left(\dfrac{x^4+1-(x+1)4x^3}{(x^4+1)^2}\right) = 5\left(\dfrac{x+1}{x^4+1}\right)^4\dfrac{1-4x^3-3x^4}{(x^4+1)^2}$

d) $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4+(x+2)4\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3\left(\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4+\dfrac{4(x+2)x^3}{(x+1)^5}$

6.7. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b) $f(t)=(t^3+2)^{90}$

c) $f(t)=\left(\sqrt{t}+1\right)^{100}$

d) $f(x)=e^{2x-1}$

e) $f(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{e^z}$

f) $f(t)=t\cos t+\operatorname{tg} t$

g) $f(x)=2^{\sqrt{x}-7}$

h) $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$

i) $f(\theta)=\dfrac{1}{1+e^{-\theta}}$

j) $f(y)=e^{\left(e^{y^2}\right)}$

k) $f(w)=(2w^2-1)\,e^{w^2}$

l) $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$

m) $f(x)=e^{\cos x}$

n) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$

o) $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$

p) $f(z)=\operatorname{tg} e^z$

q) $f(x)=\operatorname{sen}^4 x$

r) $f(x)=\cos^3(e^x-1)$

s) $f(x)=\operatorname{sen}^7\left(\left(x^7+1\right)^7\right)$

t) $f(\theta)=e^\theta\operatorname{sen}2\theta$

u) $f(x)=\dfrac{x\left(\cos x+e^x\right)}{e^x}$

v) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f'(t)=90(t^3+2)^{89}\cdot 3t^2=270t^2(t^3+2)^{89}$

c) $f'(t)=100\left(\sqrt{t}+1\right)^{99}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}=\dfrac{50\left(\sqrt{t}+1\right)^{99}}{\sqrt{t}}$

d) $f'(x)=2e^{2x-1}$

e) $f'(z)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\cdot e^z-\sqrt{z}\cdot e^z}{e^{2z}}=\dfrac{1-2z}{2\sqrt{z}e^z}$

f) $f'(t)=\cos t+t(-\operatorname{sen} t)+\dfrac{1}{\cos^2 t}=\cos t-t\operatorname{sen} t+\dfrac{1}{\cos^2 t}$

g) $f'(x)=\ln 2\cdot 2^{\sqrt{x}-7}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}+\sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot(-1)=\dfrac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$

i) $f'(\vartheta)=\dfrac{-(e^{-\vartheta})\cdot(-1)}{(1+e^{-\vartheta})^2}=\dfrac{e^{-\vartheta}}{(1+e^{-\vartheta})^2}$

j) $f'(y)=e^{e^{y^2}}\cdot e^{y^2}\cdot 2y$

k) $f'(w)=4w\cdot e^{w^2}+(2w^2-1)\cdot e^{w^2}\cdot 2w=2e^{w^2}\cdot(2w^3+w)$

l) $f'(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}}$

m) $f'(x)=e^{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)=-e^{\cos x}\operatorname{sen} x$

n) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

o) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$

p) $f'(z)=\dfrac{e^z}{\cos^2 e^z}$

q) $f'(x)=4\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$

r) $f'(x)=-3\cos^2(e^x-1)\cdot\operatorname{sen}(e^x-1)\cdot e^x$

s) $f'(x)=7\operatorname{sen}^6(x^7+1)^7\cdot 7(x^7+1)^6\cdot 7x^6\cdot\cos(x^7+1)^7=$
$=343x^6(x^7+1)^6\operatorname{sen}^6(x^7+1)^7\cdot\cos(x^7+1)^7$

t) $f'(\vartheta)=e^\vartheta\operatorname{sen}2\vartheta+e^\vartheta\cos(2\vartheta)\cdot 2=$
$=e^\vartheta(\operatorname{sen}2\vartheta+2\cos 2\vartheta)$

u) $f'(x)=\dfrac{\cos x+e^x-x(\operatorname{sen} x+\cos x)}{e^x}$

v) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

6.8. ¿Hay algún número *a* para el que la función *f* sea derivable en *x* = 2? $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ ax & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que sea derivable en *x* = 2, debe ser obligatoriamente continua en *x* = 2, aunque esto no sea suficiente.

Es continua en *x* = 2 cuando los límites laterales en dicho punto son iguales y coinciden con el valor de la función en el punto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax = 2a$$

$f(2) = 5$

Así pues, para que *f* sea continua en *x* = 2, debe ser $2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

La función es, por tanto, $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 2 \\ \frac{5}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Se estudia ahora si esta función es derivable en *x* = 2.

La derivada de la función para *x* distinto de 2 es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para *x* = 2 se observa que: $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x = 4$ y $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Como los límites laterales de la función derivada no coinciden en *x* = 2, *f* no es derivable en ese punto.

Por tanto, no existe ningún *a* para el que la función sea derivable en *x* = 2.

6.9. Utiliza diferenciales para aproximar $e^{0,01}$.

Se considera la función $f(x) = e^x$. Hay que aproximar $f(x+h)$ para $h = \Delta x = dx = 0{,}01$ y $x = 0$.

Así pues, $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$

$f'(x) = e^x$, con lo que $f'(0) = 1$. Por otra parte, $f(0) = 1$.

Entonces, $f(0+h) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0{,}01$, es decir, $f(0+h) \approx 1 + 1 \cdot 0{,}01 = 1{,}01$

Se puede comprobar la aproximación obtenida con el valor de $e^{0,01}$ en la calculadora.

En ella, $e^{0,01} = 1{,}0100502$.

Así pues, utilizando diferenciales, la aproximación es realmente buena.

6.10. Calcula aproximadamente 5 sen(0,01) – 2 cos³(0,01).

Se considera la función $f(x) = 5\operatorname{sen}x - 2\cos^3 x$ y se aproxima $f(x+h)$ para $h = \Delta x = dx = 0{,}01$ y $x = 0$.

La derivada de la función es $f'(x) = 5\cos x + 6\cos^2 x \operatorname{sen}x$, de modo que $f'(0) = 5$.

El valor de la función en *x* = 0, $f(0) = -2$.

Como la aproximación lineal es $f(0{,}01) = f(0) + f'(0) \cdot (0{,}01 - 0)$, se obtiene:

$f(0{,}01) = -2 + 5 \cdot 0{,}01 = -1{,}95$

Se puede comparar la aproximación que se obtiene con el valor de la calculadora:

$5 \operatorname{sen}(0{,}01) - 2\cos^3(0{,}01) = -1{,}9497008$

Por tanto, la aproximación es muy buena.

EJERCICIOS

Tasa de variación instantánea

6.11. Sea la recta de ecuación *f*(*x*) = 2*x* – 5, se pide:

a) Calcula TVM *f*[2, 7].

b) Calcula TVI *f*(2).

c) Calcula TVM *f*[*a*, *a* + *h*].

d) Calcula TVI *f*(*a*).

e) Razona por qué se obtiene siempre el mismo resultado.

a) $TVM\,f[2,7]=\dfrac{f(7)-f(2)}{7-2}=\dfrac{9-(-1)}{5}=2$

b) $TVIf(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(2+h)-5-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}=2$

c) $TVM\,f[a,a+h]=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{2(a+h)-5-(2a-5)}{h}=\dfrac{2h}{h}=2$

d) $TVIf(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(a+h)-5-(2a-5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h}=2$

e) Las tasas de variación miden la pendiente de las rectas, en unos casos, de rectas secantes, y en otros, de rectas tangentes. Como la función *f*(*x*) = 2*x* – 5 es una recta de pendiente 2, las tasas de variación valen 2.

6.12. Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Calcula la tasa de variación media de *f*(*x*) en el intervalo [1, 1 + *h*] y, posteriormente, calcula la tasa de variación instantánea de *f* en 1.

$$TVM\,f[1,1+h]=\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{-h}{2h(2+h)}=\frac{-1}{2(2+h)}$$

$$TVI\,f(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Función derivada

6.13. Calcula la derivada, por definición, de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=3x^2-4x$ en *x* = 1 b) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ en *x* = –1 c) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ en *x* = 4

a) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2-4(1+h)-(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3h+2)}{h}=2$

b) $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{h+2}-\frac{1}{2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{2h(h+2)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2(h+2)}=-\dfrac{1}{4}$

c) $f'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{9+2h}-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{9+2h}-3)(\sqrt{9+2h}+3)}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h(\sqrt{9+2h}+3)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3}=\dfrac{1}{3}$

6.14. Si la recta tangente a *y* = *f*(*x*) en el punto (5, 3) pasa por el punto (0, 1), calcula *f'*(5).

La derivada *f* '(5) es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (5, 3) y (0, 1), es decir: $f'(5)=\dfrac{3-1}{5-0}=\dfrac{2}{5}$

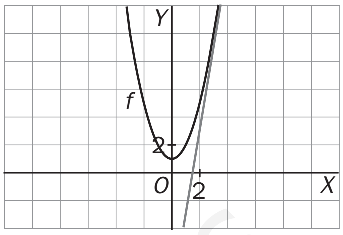
6.15.(TIC) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto indicado. Comprueba a continuación tu respuesta, esbozando tanto la gráfica de la función como la de la recta tangente:

a) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 3$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = 0$

a) La pendiente de la recta tangente es:



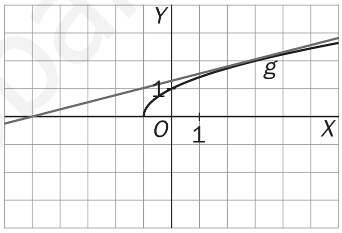
$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+1-10}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+6)}{h} = 6$$

El punto de tangencia es $A(3, f(3)) = A(3, 10)$.

La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea: $y - 10 = 6(x - 3)$,

es decir, $y = 6x - 8$.

b) La pendiente de la recta tangente es:



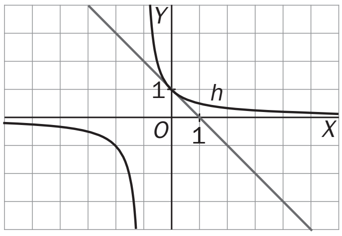
$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}$$

El punto de tangencia es $B(3, f(3)) = B(3, 2)$.

La recta tangente es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-3)$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

c) La pendiente de la recta tangente es:



$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(h+1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{h+1} = -1$$

El punto de tangencia es $C(0, f(0)) = C(0, 1)$.

La recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, o sea: $y - 1 = -x$, es decir,

$y = -x + 1$.

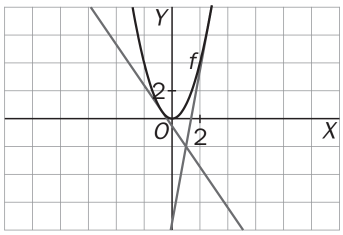
6.16.Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(1, -2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

La pendiente de la recta tangente en el punto $A(a, a^2)$ es $f'(a) = 2a$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola en ese punto es $y - a^2 = 2a(x - a)$, es decir, $y = 2ax - a^2$.

Si queremos que pase por el punto $P(1, -2)$, debe ser $-2 = 2a - a^2$, cuyas soluciones son $a = 1 + \sqrt{3}$

y $a = 1 - \sqrt{3}$, y las tangentes buscadas son:



$y = 2(1+\sqrt{3})x - 2(2+\sqrt{3})$

$y = 2(1-\sqrt{3})x - 2(2-\sqrt{3})$

Derivada de las operaciones con funciones

6.17. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 3x - 1$, calcula:

a) $f'(x)$ **y** $g'(x)$ **c)** $(f+g)'(x)$ **e)** $\left(f^2\right)'(x)$ **g)** $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)$

b) $(5f)'(x)$ **d)** $(2f-3g)'(x)$ **f)** $(f \cdot g)'(x)$ **h)** $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x)$

a) $f'(x) = 2x + 2$ y $g'(x) = 3$

b) $(5f)'(x) = 5f'(x) = 10x + 10$

c) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 5$

d) $(2f-3g)'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) = 2(2x+2) - 9 = 4x - 5$

e) $\left(f^2\right)'(x) = 2f(x)f'(x) = 2(x^2+2x+1)(2x+2)$

f) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (2x+2)(3x-1) + 3(x^2+2x+1) = 9x^2 + 10x + 1$

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \dfrac{3(x^2+2x+1) - (3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} = \dfrac{-3x^2+2x+5}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$

h) $\left(\dfrac{5}{g^2}\right)'(x) = \dfrac{-10g'(x)}{(g(x))^3} = \dfrac{-30}{(3x-1)^3}$

6.18. Sabiendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, $g(2) = 2$, $g'(2) = 5$ y $g'(1) = 0$, calcula:

a) $(f \circ g)'(2)$ **c)** $\left(\sqrt{g}\right)'(2)$ **e)** $\left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)'(2)$

b) $\left(f^2 \circ g\right)'(2)$ **d)** $(g \circ f)'(2)$ **f)** $\left(f^n\right)'(2)$

a) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(2) \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$

b) $\left(f^2 \circ g\right)'(2) = 2f(g(2))f'(g(2))g'(2) = 2f(2) \cdot f'(2) \cdot 5 = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

c) $\left(\sqrt{g}\right)'(2) = \dfrac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}} = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$

d) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(1) \cdot 3 = 0 \cdot 3 = 0$

e) $\left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)'(2) = \left(\dfrac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2) = -\dfrac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2} \cdot g'(2) = -\dfrac{f'(2)}{(f(2))^2} \cdot 5 = -\dfrac{3}{1^2} \cdot 5 = -15$

f) $\left(f^n\right)'(2) = nf^{n-1}(2)f'(2) = n \cdot 1^{n-1} \cdot 3 = 3n$

6.19. Encuentra una fórmula para hallar la derivada de $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ utilizando la regla de la cadena.

$F(x)$ es una función compuesta. Si $g(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces:

$F(x) = (g \circ f)(x)$ y, por tanto, aplicando la regla de la cadena y recordando que la derivada de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es

$g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, $F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{-1}{(f(x))^2} \cdot f'(x) = \dfrac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

6.20. Calcula aplicando la regla de la cadena las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}+x\right)^5$ **b)** $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^3$

a) $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x)=3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{x-5-(x+3)}{(x-5)^2}=3\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2\dfrac{-8}{(x-5)^2}=-\dfrac{24(x+3)^2}{(x-5)^4}$

Derivada de las funciones elementales

6.21. ¿Para qué valores de x se anula la derivada de $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-5x$?

La derivada es $f'(x) = x^2 - 4x - 5$.

Para hallar los valores de x que la anulan, se iguala a 0 y se resuelve la ecuación: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\dfrac{4\pm 6}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=5\end{cases}$

Por tanto, se anula si $x = -1$ o $x = 5$.

6.22. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

a) $f'(x)=\dfrac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$ c) $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}=\dfrac{1}{2(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}$ d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x-(x+1)}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$

6.23. Calcula la derivada de estas funciones (te será útil manejar las propiedades de los logaritmos):

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **c)** $f(x)=\sqrt{\ln x}$

b) $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ **d)** $f(x)=\ln\left[(x+5)(2x-1)^2\right]$

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln x=-\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x}$

b) $f(x)=\ln\left(x^2\right)=2\ln x\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}$

c) $f(x)=\sqrt{\ln x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

d) $f(x)=\ln\left[(x+5)(2x-1)^2\right]=\ln(x+5)+2\ln(2x-1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{4}{2x-1}$

6.24. (PAU) Se considera la función $f(x)=ax^3+b\cdot\ln x$, siendo a y b parámetros reales.
Determina los valores de a y b sabiendo que $f(1) = 2$ y que la derivada de $f(x)$ es nula en $x = 1$.

Como $f(1) = 2$: $2=a\cdot 1^3+b\ln 1=a$. Por tanto, $a = 2$, y la función es $f(x)=2x^3+b\ln x$.

La derivada es $f'(x)=6x^2+\dfrac{b}{x}$, y como se anula en $x = 1$: $0=f'(1)=6\cdot 1^2+b$. Por tanto, $b = -6$.

Los valores de a y b para que se cumplan las condiciones son $a = 2$ y $b = -6$.

6.25. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=e^{7x-1}$

b) $f(x)=\sqrt{e^x}$

c) $f(x)=e^{x^2}\cdot e^{-3x}\cdot e^2$

d) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{e^x+1}$

a) $f'(x)=7e^{7x-1}$

b) $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}=\dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$

c) $f(x)=e^{x^2}\cdot e^{-3x}\cdot e^2=e^{x^2-3x+2}\Rightarrow f'(x)=(2x-3)e^{x^2-3x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{3x}}{e^x+1}=\dfrac{e^{2x}(1+e^x)}{e^x+1}=e^{2x}\Rightarrow f'(x)=2e^{2x}$

6.26. (PAU) Calcula $f'(2)$ siendo f la función dada por $f(x)=\dfrac{4}{x^2}+8x-x^2-12$, $(x\neq 0)$.

La función derivada es $f'(x)=\dfrac{-8}{x^3}+8-2x$, y entonces, $f'(2)=\dfrac{-8}{2^3}+8-2\cdot 2=3$.

6.27. (PAU) Calcula $f'(-0,5)$ siendo f la función dada por $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-53x+150$, $(x\neq 0)$.

La función derivada es $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}-53$, y entonces, $f'(-0,5)=2\cdot(-0,5)-\dfrac{2}{(-0,5)^3}-53=-1+16-53=-38$.

6.28. (PAU) Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3}{(2x-5)^2}+\ln(1-x)$

b) $g(x)=\dfrac{e^x}{x^3+1}$

a) $f'(x)=\dfrac{-3\cdot 2\cdot(2x-5)\cdot 2}{(2x-5)^4}+\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-12}{(2x-5)^3}-\dfrac{1}{1-x}$

b) $g'(x)=\dfrac{e^x(x^3+1)-3x^2e^x}{(x^3+1)^2}=\dfrac{e^x(x^3-3x^2+1)}{(x^3+1)^2}$

6.29. (PAU) Deriva las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{6}-8x^2+\dfrac{1}{x}$

b) $f(x)=xe^{3x}$

c) $f(x)=x(5-x^2)^4$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-8$

e) $f(x)=e^{x^3}$

f) $f(x)=x^2-e^x$

g) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

h) $f(x)=5\sqrt{\ln x}$

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^2+1}$

j) $f(x)=\dfrac{6-x^5}{x^6}$

k) $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$

l) $f(x)=\sqrt{x^3}$

a) $f'(x)=\dfrac{1}{6}-16x-\dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=e^{3x}(1+3x)$

c) $f'(x)=(5-x^2)^4-x\cdot 4(-2x)(5-x^2)^3=(5-x^2)^3(5+7x^2)$

d) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{4}$

e) $f'(x)=3x^2e^{x^3}$

f) $f'(x)=2x-e^x$

g) $f'(x)=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

h) $f'(x)=\dfrac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

i) $f'(x)=\dfrac{2x}{(3x^2+1)^2}$

j) $f(x)=\dfrac{6-x^5}{x^6}=\dfrac{6}{x^6}-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{36}{x^7}+\dfrac{1}{x^2}$

k) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$

l) $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

6.30.(PAU) Calcula $g'(3)$ siendo $g(x) = 2x \cdot e^{3x-1}$.

La función derivada es $g'(x) = 2e^{3x-1} + 6xe^{3x-1} = e^{3x-1}(2+6x)$, y entonces, $g'(3) = e^{8}(2+6\cdot 3) = 20e^{8}$.

6.31.(PAU) Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2$ en $x = -1$.

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 6x$, y la pendiente de la recta tangente es $f'(-1) = 9$.

El punto de tangencia es $A(-1, f(-1)) = A(-1, -4)$.

Así pues, la recta tangente es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow y - (-4) = 9(x + 1) \Rightarrow y = 9x + 5$.

6.32.(PAU) Halla los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1, 5) sea la recta $y = 3x + 2$.

Se sabe que $f'(1) = 3$ porque es la pendiente de su recta tangente. Como $f'(x) = 2ax$, entonces:

$3 = f'(1) = 2a$, de donde $a = \frac{3}{2}$. La función es $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - b$.

También se sabe que el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de dicha función; por tanto, $f(1) = 5$: $5 = f(1) = \frac{3}{2} - b$,

y entonces, $b = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2}$. Por tanto, $a = \frac{3}{2}$ y $b = -\frac{7}{2}$.

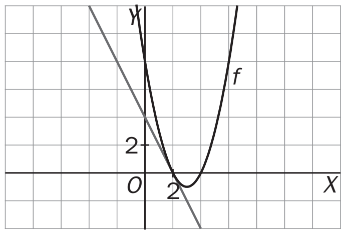
6.33.(PAU) Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2, 0)$.

a) Para que la tangente sea paralela al eje de abscisas, su pendiente tiene que ser 0. Como la pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, hay que encontrar el valor de x que anula la primera derivada: $f'(x) = 2x - 6$, y se anula si $x = 3$.

Entonces, el punto $(3, f(3)) = A(3, -1)$ es el punto de la parábola cuya tangente es paralela al eje de abscisas.



b) La recta pedida es $y - 0 = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y = -2(x - 2)$, o sea, $y = -2x + 4$.

6.34.¿Para qué valores de x se anula la derivada de las siguientes funciones?

a) $f(x) = 5x - 3$ **c)** $f(x) = e^{2x}$ **e)** $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ **g)** $f(x) = e^{x^2-6x}$

b) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ **d)** $f(x) = \ln(3x+7)$ **f)** $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ **h)** $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

a) $f'(x) = 5$ no se anula nunca.

b) $f'(x) = \frac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2}$ no se anula nunca.

c) $f'(x) = 2e^{2x}$ no se anula nunca.

d) $f'(x) = \frac{3}{3x+7}$ no sea anula nunca.

e) $f'(x) = 6x - 5$ se anula si $x = \frac{5}{6}$.

f) $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ se anula si $x = 0$ o si $x = -2$.

g) $f'(x) = (2x - 6)e^{x^2-6x}$ se anula si $x = 3$.

h) $f'(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x}$ se anula si $x = 1$, pero este valor no pertenece al dominio de la función, ya que da lugar al logaritmo de un número negativo. Así pues, la derivada no se anula nunca.

6.35.(PAU) Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{3}{x}$, calcula *a* y *b* de manera que la gráfica de *f* pase por el punto (3, 4) y tenga tangente horizontal en dicho punto.

Como $f(3) = 4 \Rightarrow 3a + b + 1 = 4$

Además, $f'(3) = 0$ y la derivada es $f'(x) = a - \frac{3}{x^2}$; entonces, $a - \frac{1}{3} = 0$. Despejando, $a = \frac{1}{3}$.

Al sustituir el valor de *a* en la ecuación anterior se obtiene: $3 \cdot \frac{1}{3} + b + 1 = 4 \Rightarrow b = 2$

Por tanto, $a = \frac{1}{3}$ y $b = 2$.

6.36. Sean las funciones $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 5x + 4$, halla la recta tangente a cada una de sus gráficas en el punto de abscisas $x = 3$.

Las derivadas son $f'(x) = \frac{-(x-2)-(1-x)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$ y $g'(x) = 2x - 5$. Las tangentes son:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea, $y - (-2) = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 5$

$y - g(3) = g'(3)(x - 3)$, o sea, $y - (-2) = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 5$

Por tanto, las gráficas de estas funciones tienen tangente común en el punto (3, –2). Se dice entonces que esas gráficas son tangentes en el punto (3, –2).

6.37. Encuentra las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - x - 2$ trazadas desde el punto exterior *A*(–1, –16). Para eso debes hallar previamente los puntos de tangencia.

Sea el punto $B(b, f(b)) = B(b, b^2 - b - 2)$ el punto de tangencia.

La pendiente de la recta *AB* se puede calcular de dos formas distintas:

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos: $m = \frac{f(b) - f(a_2)}{b - a_1} = \frac{b^2 - b - 2 - (-16)}{b - (-1)}$

Pendiente de la recta tangente en el punto $B(b, b^2 - b - 2)$: $m = f'(b) = 2b - 1$

Igualando estas expresiones se calcula el valor de *b*:

$$\frac{b^2 - b + 14}{b + 1} = 2b - 1 \Rightarrow b^2 - b + 14 = 2b^2 + 2b - b - 1 \Rightarrow b^2 + 2b - 15 = 0$$

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Así pues, hay dos puntos de tangencia: $B_1(-5, 28)$ y $B_2(3, 4)$.

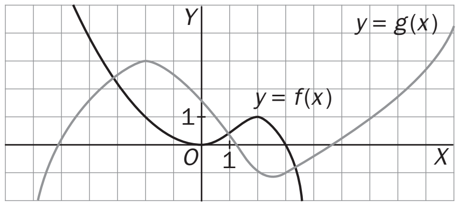
Las pendientes de las rectas tangentes en estos puntos son: $f'(-5) = 2 \cdot (-5) - 1 = -11$

$f'(3) = 2 \cdot (3) - 1 = 5$

La tangente en B_1 es: $y - f(-5) = f'(-5)(x - (-5))$, o sea, $y - 28 = -11(x + 5) \Rightarrow y = -11x - 27$

La tangente en B_2 es: $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, o sea, $y - 4 = 5(x - 3) \Rightarrow y = 5x - 11$

6.38. Considera la función $h(x) = f(x)g(x)$, donde las gráficas de f y g son las que te damos a continuación:



I. a) Calcula $h(-2)$ y $h(3)$.

b) Calcula aproximadamente $f'(-2)$, $f'(3)$, $g'(-2)$ y $g'(3)$.

c) Calcula aproximadamente $h'(-2)$ y $h'(3)$.

II. Con las mismas gráficas del apartado anterior, sea $c(x) = f(g(x))$.

a) Calcula $c(-2)$ y $c(3)$.

b) ¿Es $c'(-3)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo puedes saberlo.

c) ¿Es $c'(-1)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo lo averiguas.

I. a) $h(-2) = f(-2)g(-2) = 1 \cdot 3 = 3$

$h(3) = f(3)g(3) = 0$

b) $f'(-2) = -1$, $f'(3) = -1$, $g'(-2) = 0$ y $g'(3) = \frac{1}{2}$

c) $h'(-2) = f'(-2)g(-2) + f(-2)\, g'(-2) = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = -3$

$h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)\, g'(3) = -1 \cdot (-1) + 0 = 1$

II. a) $c(-2) = f(g(-2)) = f(3) = 0$ $\quad c(3) = f(g(3)) = f(-1) = \frac{1}{4}$

b) $c'(-3) = f'(g(-3))g'(-3) = f'\left(\frac{5}{2}\right)g'(-3)$

$f'\left(\frac{5}{2}\right)$ es negativo (la tangente tiene pendiente negativa en ese punto), y $g'(-3)$ positiva; luego $c'(-3)$ es negativo.

c) $c'(-1) = f'(g(-1))\, g'(-1) = f'\left(\frac{5}{2}\right)g'(-1)$

$f'\left(\frac{5}{2}\right)$ es negativo (la tangente tiene pendiente negativa en ese punto), y $g'(-1)$ también; luego $c'(-1)$ es positivo.

6.39. (PAU) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{a - bx}$, siendo a y b parámetros reales.

Determina los valores de los parámetros a y b para los que $f(2) = -4$, y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ sea horizontal.

$f(2) = -4 \Rightarrow \dfrac{4}{a - 2b} = -4 \Rightarrow a - 2b = -1$

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2x(a - bx) + bx^2}{(a - bx)^2}$.

Como se sabe que $f'(6) = 0$, entonces: $0 = f'(6) = \dfrac{12(a - 6b) + 36b}{(a - 6b)^2} \Rightarrow 12a - 36b = 0 \Rightarrow a - 3b = 0$

Se resuelve el sistema obtenido: $\left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ a - 3b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - 2b = -1 \\ -a + 3b = 0 \end{array}\right\}$

$b = -1 \Rightarrow a = 3b = 3 \cdot (-1) = -3$

Por tanto, $a = -1$ y $b = -3$.

Derivadas laterales

6.40.Calcula las derivadas laterales en x = 1 (si existen) y decide si las funciones son derivables en x = 1.

a) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & \text{si } x\le 1\\ (x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

a) $f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)^3-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3}{h}=0$

$f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)^2-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=0$

Como las derivadas laterales en x = 1 coinciden, la función es derivable en ese punto y $f'(1)$ = 0.

b) $f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2h+h^2}{h}=2$ y $f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(h+1)-1}{h}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h+2-1}{h}=+\infty$

La función no es derivable en x = 1. Se observa que ni siquiera es continua en x = 1.

6.41.A Rocío le han pedido que calcule, si existe, $f'(3)$, siendo f la función: $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{si } x\le 3\\ x^2-5x & \text{si } x>3\end{cases}$

Ella trabaja así: calcula la derivada de la función para valores distintos de 3: $f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<3\\ 2x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$

y concluye que como $\lim\limits_{x\to 3^-}f'(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}f'(x)=2\cdot 3-5=1$, entonces, $f'(3)=1$.

¿Dónde está el error que comete Rocío?

El error de Rocío consiste en que no ha estudiado primero si la función es continua en x = 3. Su método sólo sería válido si la función fuera continua en x = 3.

Como se observa, $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-6$, lo cual indica que la función no es continua en x = 3 y, por tanto, no es derivable en x = 3.

6.42. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función en el punto indicado:

$$f(x)=\begin{cases}7-3x & \text{si } x<2\\ x^2-7x+11 & \text{si } x\ge 2\end{cases}\quad \text{en } x=2$$

Se estudia primero la continuidad en x = 2.

Hay que estudiar los límites laterales en dicho punto y el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(7-3x)=1$ $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-7x+11)=1$ $f(2)$ = 1

La función es continua en x = 2, ya que $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

Y ahora se estudia la derivabilidad en x = 2.

La derivada de la función para x distinto de 2 es: $f'(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<2\\ 2x-7 & \text{si } x>2\end{cases}$

Para x = 2 vemos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-3)=-3$ $\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-7)=-3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f'(x)$, la función f es derivable en x = 2.

6.43. (PAU) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Halla los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo su dominio.

Como los polinomios son funciones continuas, solo falta estudiar qué ocurre en el valor $x = 0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$, los límites laterales en ese punto deben ser iguales y coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x^2-3x+a)=a \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+bx+1)=1 \qquad f(0)=a$

Igualando los límites laterales se obtiene que para que *f* sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 1$.

La función es, por tanto: $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

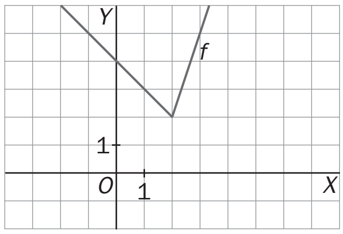
Como también ha de ser derivable en $x = 0$, las derivadas laterales en dicho punto deben ser iguales: La derivada de la función para *x* distinto de 0 es: $f'(x)=\begin{cases} 4x-3 & \text{si } x<0 \\ 2x+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(4x-3)=-3 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$

Por tanto, para que *f* sea derivable en $x = 0$ debe ser $b = -3$.

Entonces, $f(x)$ es continua y derivable en **R**, si $a = 1$ y $b = -3$.

6.44. Calcula las derivadas laterales de función $f(x)=|2x-4|+x$ en el punto $x = 2$. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.



Se trata de una función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<2 \\ 3x-4 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

$$f'(2^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4-2-h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$

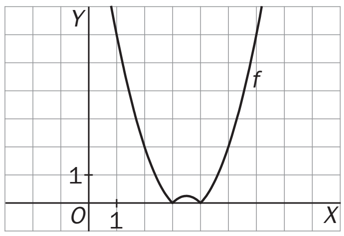
$$f'(2^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{6+3h-4-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3$$

Al no coincidir las derivadas laterales, la función no es derivable en $x = 2$.

6.45. Explica por qué no existe la derivada de $f(x)=|x^2-7x+12|$ en $x = 4$.

Primero se define la función a trozos, estudiando qué valores de *x* anulan el valor absoluto y para qué valores es positiva y para cuáles negativa: $g(x)=x^2-7x+12$, se hace cero si $x = 3$ o si $x = 4$, es positiva si

$x < 3$ o si $x > 4$, y es negativa si $3 < x < 4$.



Así pues, la función es: $f(x)=\begin{cases} x^2-7x+12 & \text{si } x<3 \\ -x^2+7x-12 & \text{si } 3\le x\le 4 \\ x^2-7x+12 & \text{si } x>4 \end{cases}$, que es continua en todo **R**. La derivada para valores de *x* distintos de 3 y de 4 es: $f'(x)=\begin{cases} 2x-7 & \text{si } x<3 \\ -2x+7 & \text{si } 3<x<4 \\ 2x-7 & \text{si } x>4 \end{cases}$

Para $x = 4$: $\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(-2x+7)=-1 \qquad \lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(2x-7)=1$

Como los límites laterales no coinciden, la función *f* no es derivable en $x = 4$.

También se puede deducir a partir de la gráfica de la función $f(x)=|x^2-7x+12|$, en la que se observa que los puntos de abscisas $x = 3$ y $x = 4$ no admiten tangente, son puntos angulosos.

6.46.(PAU) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Como la función es polinómica en el interior de los tramos de definición, basta estudiar qué sucede en x = 1. Continuidad en x = 1:

Se estudian los límites laterales en dicho punto y el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ $\qquad$ $f(1) = 0$

La función es continua en x = 1, ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Derivabilidad en x = 1:

La derivada de la función para x distinto de 1 es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Las derivadas laterales en x = 1: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$, la función f no es derivable en x = 1.

Por tanto, la función es continua, pero no derivable en x = 1.

6.47.(PAU) Se sabe que la función f: [0, 5] →R dada por $f(x)$ = $\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5) y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

En primer lugar, como $f(0) = f(5)$, 0 = c + 2, es decir, c = –2.

La función es $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ -2+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$

Como debe ser continua en x = 2, los límites laterales en dicho punto deben ser iguales y además coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+bx^2)=2a+4b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-2+\sqrt{x-1})=-1$ $\qquad$ $f(2) = -1$

Así pues, para que f sea continua en x = 2, debe ser $2a + 4b = -1$.

Para que sea derivable en x = 2, las derivadas laterales en ese punto deben ser iguales.

La derivada de la función para x distinto de 2, 0 y 5 es: $f'(x)=\begin{cases} a+2bx & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2<x<5 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(a+2bx)=a+4b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$

Así pues, para que f sea derivable en x = 2 debe ser $a+4b=\dfrac{1}{2}$.

Con las ecuaciones obtenidas se plantea un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} 2a+4b=-1 \\ a+4b=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} 2a+4b=-1 \\ -2a-8b=-1 \end{cases} \\ \hline -4b=-2 \Rightarrow b=\dfrac{1}{2} \end{array} \Rightarrow a=\frac{1}{2}-4b=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

Para que la función f cumpla las condiciones del enunciado, a = $-\dfrac{3}{2}$, b = $\dfrac{1}{2}$ y c = –2.

6.48.(PAU) Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ cx & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

calcula *a*, *b* y *c* para que la función sea derivable en *x* = 1, sabiendo que *f*(0) = *f*(4).

La función debe ser continua, y para ello, los límites laterales en $x = 1$ han de ser iguales y coincidir con el valor de la función en el punto:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+ax+b) = 1+a+b$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} cx = c$ $\qquad f(1) = c$

Entonces, $1 + a + b = c$

Para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales tienen que ser iguales.

Las derivadas de la función para x distinto de 1 son: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<1 \\ c & \text{si } x>1 \end{cases}$

Las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+a) = 2+a$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} c = c$

Como han de ser iguales, $a + 2 = c$ y, como $f(0) = f(4)$, debe ser $b = 4c$.

Con las tres ecuaciones se plantea un sistema: $\begin{cases} 1+a+b=c \\ a+2=c \\ b=4c \end{cases} \Rightarrow 1 + c - 2 + 4c = c \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = -\frac{7}{4} \Rightarrow b = 1$$

Se cumplen las condiciones del enunciado para la función f si $a = -\dfrac{7}{4}$, $b = 1$, $c = \dfrac{1}{4}$.

Aproximación lineal de una función en un punto. Diferencial de una función

6.49. Sabiendo que $\ln 2 \approx 0{,}69315$, obtén la aproximación lineal de la función $f(x)=\log_2 x$ en *x* = 2 y utilízala para obtener los valores aproximados de *f*(*x*) en *x* = 2,01, *x* = 1,9 y *x* = 2,9.Compara estos resultados con los obtenidos con la calculadora. ¿Qué ocurre a medida que nos alejamos del 2?

$f(x) = \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

La aproximación lineal de una función $f(x)$ es: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot dx$. En este caso, para cada valor pedido, $x = 2$ y dx es 0,01, –0,1 y 0,9, respectivamente.

$f(2) = 1$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 2} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2\ln 2}$

Entonces:

$f(2{,}01) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot 0{,}01 = 1 + \dfrac{0{,}01}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}00721$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}01 = 1{,}007195501$.

$f(1{,}9) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot(-0{,}1) = 1 - \dfrac{0{,}1}{2\cdot 0{,}69315} = 0{,}92786$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 1{,}9 = 0{,}925999418$.

$f(2{,}9) = 1 + \dfrac{1}{2\ln 2}\cdot 0{,}9 = 1 + \dfrac{0{,}9}{2\cdot 0{,}69315} = 1{,}64921$. Con la calculadora se obtiene $\log_2 2{,}9 = 1{,}5360529$.

A medida que nos alejamos del 2, la aproximación lineal va siendo peor.

6.50. Realiza una estimación lineal de la variación de la función $f(x) = 1+\dfrac{x^2}{x+1}$ al incrementar la x de 2 a 2,1.

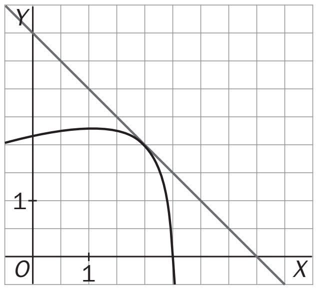
La aproximación lineal de una función $f(x)$ es: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,dx$. En este caso, $x = 2$ y dx es 0,1.

$f(2) = 1+\dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{8}{9}$

Entonces:

$f(2{,}1) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{8}{9}\cdot 0{,}1 = \dfrac{7}{3} + \dfrac{0{,}8}{9} = \dfrac{21{,}8}{9} = 2{,}422222$

6.51. En el dibujo se muestra un trozo de gráfica de cierta función *f* y la recta tangente a dicha gráfica en el punto *A*(2, 2).



Queremos calcular el valor de *f*(2,05) y de *f*(1,87), pero desconocemos la expresión analítica de la función *f*. Ayudándote de la aproximación lineal y encontrando previamente la ecuación de la recta tangente, estima los valores de *f*(2,05) y *f*(1,89).

La recta tangente en el punto $A(2, 2)$ es $x + y = 4$, es decir, $y = -x + 4$, cuya pendiente es -1, y, por tanto, sabemos que $f'(2) = -1$.

$L(2{,}05) = f(2) + f'(2)\cdot(2{,}05-2)$, es decir: $L(2{,}05) = 2 + (-1)\cdot(2{,}05-2) = 1{,}95$

$L(1{,}89) = f(2) + f'(2)\cdot(1{,}89-2)$, es decir: $L(1{,}89) = 2 + (-1)\cdot(1{,}89-2) = 2{,}11$

6.52. Obtén con la calculadora el valor de $\sqrt[5]{32{,}3}$ y obtenlo también utilizando diferenciales.

Con la calculadora: $\sqrt[5]{32{,}3} = 2{,}00373$

Se considera la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$. Su aproximación lineal es: $\sqrt[5]{32{,}3} \approx f(32) + f'(32)\cdot 0{,}3$.

$f(32) = 2$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(32) = \dfrac{1}{80}$

Entonces:

$\sqrt[5]{32{,}3} = 2 + \dfrac{1}{80}\cdot 0{,}3 = 2{,}00375$

6.53. Obtén con la calculadora el valor de sen(0,2) y obtenlo también mediante la aproximación lineal de y = sen x en $a = 0$.

Con la calculadora: sen(0,2) = 0,1987

La aproximación lineal es: $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\cdot dx$, siendo $x = 0$ y dx es 0,2.

$f(0) = 0$ $\qquad f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

Entonces:

$f(0{,}2) = 0 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}2$

PROBLEMAS

6.54. El coste de producción de x unidades viene dado por la función $C(x) = 0{,}06x^2 - 4{,}2x + 75$. En Economía, se llama coste marginal al coste ocasionado por la producción de una unidad suplementaria y se calcula hallando la derivada en dicho punto. Halla el coste marginal al producir la unidad número 81 de las dos formas indicadas y después compara el resultado. Es decir, calcula:

a) $C(80+1) - C(80)$.

b) $C'(80)$.

Compara los resultados obtenidos.

a) $C(80+1) - C(80) = C(81) - C(80) = 128{,}46 - 123 = 5{,}46$ unidades monetarias

b) La función derivada es $C'(x) = 0{,}12x - 4{,}2$; por tanto, $C'(80) = 0{,}12 \cdot 80 - 4{,}2 = 5{,}4$ unidades monetarias.

Los resultados son bastante similares, difieren en cuatro centésimas.

6.55. Una partícula está recorriendo la curva $y = x^2$. En cierto momento la abandona y comienza a desplazarse por la tangente trazada por el punto en el que abandonó la curva.

¿En qué momento debe dejar la curva para que su trayectoria pase por el punto $A\left(4, \frac{39}{4}\right)$?

Sea el punto $B(a, f(a)) = B(a, a^2)$ donde la partícula abandona la curva y se dirige rectilíneamente hacia el punto $A\left(4, \frac{39}{4}\right)$. La pendiente de la recta AB se puede hallar de dos formas distintas:

Pendiente de la recta que pasa por dos puntos: $m = \dfrac{\frac{39}{4} - a^2}{4 - a}$.

Pendiente de la recta tangente en el punto $B(a, a^2)$: $m = f'(a) = 2a$.

Igualando estas expresiones se obtiene el valor de a:

$$\frac{\frac{39}{4} - a^2}{4 - a} = 2a \Rightarrow \frac{39}{4} - a^2 = 8a - 2a^2 \Rightarrow 39 - 4a^2 = 32a - 8a^2 \Rightarrow 4a^2 - 32a + 39 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 624}}{8} = \frac{32 \pm 20}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{2} \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La partícula deberá abandonar la curva en el momento en que pase por los puntos $B_1\left(\frac{13}{2}, \frac{169}{4}\right)$ o $B_2\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, dependiendo del rumbo que lleve la partícula.

6.56. La anchura de un rectángulo está creciendo a razón de 2 cm/seg y su longitud está creciendo a 3 cm/seg. ¿Cuánto crece por segundo el área en el instante en el que la anchura es 7 cm y la longitud 5 cm?

Si $B(t)$ es la función que define la longitud de la base del rectángulo; $H(t)$, la que define la altura, y $A(t)$, la que define el área, $A(t) = B(t) \cdot H(t)$, y haciendo la derivada del producto: $A'(t) = B'(t) \cdot H(t) + H'(t) \cdot B(t)$.

Como $B'(t) = 2$ y $H'(t) = 3$ para todo t, cuando $B(t) = 7$ y $H(t) = 5$ se obtiene $A'(t) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$ cm²/seg.

6.57. El coste total de producción de *q* unidades de cierto producto viene dado, en euros, por la expresión $C(q) = 2q^2 + 5q + 10$. Una empresa produce en la actualidad un total de 50 unidades y estudia la posibilidad de aumentar la producción a 50,5 unidades. Estima, utilizando la aproximación lineal, cuál será la diferencia de costes si se producen 50,5 unidades en lugar de 50.

La aproximación lineal de la función es $C(q + 0{,}5) = C(q) + 0{,}5 \cdot C'(q)$.

$C'(q) = 4q + 5$

Para $q = 50$: $C(50) = 5260$ $\qquad$ $C'(q) = 205$

$C(50, 5) = 5260 + 0{,}5 \cdot 205 = 5260 + 102{,}5$

Luego la diferencia de costes es de 102,50 euros.

6.58. El propietario de una gasolinera observa que la demanda diaria de gasolina de 95 octanos, en miles de litros, viene dada por la expresión $f(x) = \dfrac{10(x+1)}{x(x+2)}$, donde *x* representa el precio, en euros, del litro de gasolina ese día.

a) Calcula la tasa de variación media de la demanda cuando el precio pasa de 1,12 a 1,14 euros.

b) Halla la tasa de variación instantánea de la demanda cuando el precio de la gasolina es de 1,14 euros.

a) $TVM\ f[1{,}12;1{,}14] = \dfrac{f(1{,}14) - f(1{,}12)}{1{,}14 - 1{,}12} \approx \dfrac{5{,}978 - 6{,}067}{0{,}02} = -4{,}45 = -4450$ litros

b) La tasa de variación instantánea coincide con la derivada: $TVI\, f(1{,}14) = f'(1{,}14)$.

La derivada de la función: $f'(x) = \dfrac{10\left(x^2 + 2x\right) - 10\left(x+1\right)\left(2x+2\right)}{x^2\left(x+2\right)^2} = \dfrac{-10(x^2 + 2x + 2)}{x^2(x+2)^2}$

Entonces: $TVI f(1{,}14) = f'(1{,}14) \approx -4{,}354 = -4354$ litros

PROFUNDIZACIÓN

6.59. El vértice de la parábola $y = x^2 + ax + b$ es el punto (2, 2). ¿Cuánto vale la función en $x = -1$?

Como $f(2) = 2$, $2^2 + 2a + b = 2 \Rightarrow 2a + b = -2$.

En el vértice, la derivada es 0. Por tanto, $f'(2) = 0$. Como $f'(x) = 2x + a$, entonces $f'(2) = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $2 \cdot (-4) + b = -2 \Rightarrow b = 6$

Por tanto, la función es $f(x) = x^2 - 4x + 6$, y $f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 11$.

6.60. ¿Hay alguna pareja de números *a* y *b* para los que la función sea derivable en R ?

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{b}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}}$$

La función es continua en el interior de los dos primeros tramos de definición. En el tercer tramo también es continua porque el valor de *x* que anula el denominador no pertenece a su domino de definición del mismo. Así pues, solo hay que estudiar qué ocurre en los valores de solapamiento *x* = 0 y *x* = 2.

Para que sea continua en *x* = 0, los límites laterales deben ser iguales y coincidir con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x-1)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a$ $\quad f(0) = a$

Igualando los resultados obtenidos, *a* = 0.

La función es, por tanto, $f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{b}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}$

Imponiendo la condición de continuidad en *x* = 2:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2=4$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{b}{x-1}\right)=b$ $\quad f(2) = 4$

Igualando los resultados se obtiene que *b* = 4.

Por tanto, para los valores de *a* y *b* obtenidos, la función $f(x)=\begin{cases}\cos x-1 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ \dfrac{4}{x-1} & \text{si } x>2\end{cases}$ es continua en todo **R**.

Ahora se estudia si es derivable o no.

La derivada de la función para *x* distinto de 0 y de 2 es: $f'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen} x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } 0<x<2\\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} & \text{si } x>2\end{cases}$

Para *x* = 0: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\operatorname{sen} x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0$. Así pues, la función es derivable en *x* = 0 y $f'(0) = 0$.

Para *x* = 2: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-4}{(x-1)^2}=-4$. Así pues, la función no es derivable en *x* = 2.

Por tanto, no existe ninguna pareja de números *a* y *b* para los que la función *f*(*x*) sea derivable en todo **R**.

6.61. Considera la función $f(x)=x^3+px$ donde *p* es un cierto número real. Escribe (en función de *p*) la ecuación de la tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto de abscisa *x* = 1 y determina posteriormente el valor de *p* para que dicha tangente pase por el punto *A*(2, 0).

La ecuación de la tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto de abscisa *x* = 1 es: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.

$f(1) = 1 + p$. La derivada es $f'(x) = 3x^2 + p$, por lo que $f'(1) = 3 + p$.

Entonces, la recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en *x* = 1 es $y - (1 + p) = (3 + p)(x - 1)$, es decir, $y = (3 + p)x - 2$.

Para que dicha tangente pase por *A*(2, 0) debe cumplirse que: $0 = (3 + p)\cdot 2 - 2 \Rightarrow 6 + 2p - 2 = 0 \Rightarrow p = -2$.

6.62. Halla los valores de la constante *k* para que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x - k)x$ en el punto de abscisa 1 sean paralelas.

Son paralelas si $f'(1) = g'(1)$.

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$.

La de $g(x)$ es $g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$.

Como han de ser iguales, $3 = 2 - k \Rightarrow k = -1$.

Solo hay un valor de *k* que cumple la condición.

6.63. ¿Existen números reales *a* y *b* para los que la tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2 + 1}$ en el punto de abscisa 0 sea la recta $y = 4x + 3$?

El punto de tangencia es $A(0, 4 \cdot 0 + 3) = A(0, 3)$. Así pues, $f(0) = 3$ y, por tanto, $3 = f(0) = \dfrac{b}{1} = b \Rightarrow b = 3$

La función sería: $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + 3}{x^2 + 1}$

Por otro lado, $f'(0) = 4$, ya que es la pendiente de la recta tangente $y = 4x + 3$.

La derivada de la función es: $f'(x) = \dfrac{(9x^2 + a)(x^2 + 1) - (3x^3 + ax + 3)2x}{(x^2 + 1)^2}$, entonces: $4 = f'(0) = \dfrac{a}{1} = a \Rightarrow a = 4$

Los valores de *a* y *b* que cumplen la condición son 4 y 3, respectivamente.

6.64. Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ y, posteriormente, y sin utilizar la derivada del cociente, obtén las derivadas de $g(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x} - 1}$ y $t(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$.

La derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ es: $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

Llamando $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = (f \circ h)(x)$, cuya derivada se calcula aplicando la regla de la cadena:

$$g'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De manera análoga, llamando $u(x) = x^2$, $t(x) = (f \circ u)(x)$:

$$t'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{(x^2)^2 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot 2x = \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot 2x$$

6.65. Calcula $f'(0)$ sabiendo que $f(x) = [g(x)]^{\cos x}$ y que $g(0) = g'(0) = e$.

Ayuda: para calcular $f'(x)$ escribe $f(x) = e^{\ln[g(x)]^{\cos x}} = e^{\cos x \ln[g(x)]}$.

Teniendo en cuenta la última expresión de $f(x)$, $f(x) = e^{\cos x \ln[g(x)]}$, su derivada es:

$$f'(x) = \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln g(x) + \cos x \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right) e^{\cos x \ln[g(x)]}$$

Sustituyendo *x* por 0, se obtiene:

$$f'(0) = \left(-\operatorname{sen} 0 \cdot \ln g(0) + \cos 0 \cdot \frac{g'(0)}{g(0)}\right) e^{\cos 0 \cdot \ln g(0)} = 1 \cdot \frac{e}{e} \cdot e^1 = e$$

6.66. Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) ¿Es continua en $x = 0$?

b) ¿Es derivable en $x = 0$?

c) ¿Cuál es el mínimo valor que toma esta función? ¿Para qué valor de x lo toma?

a) Es continua en x = 0 si los límites laterales en ese punto son iguales y coinciden con el valor de la función:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{-x}-1)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)=0 \qquad f(0)=0$

La función es continua en x = 0, ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

b) Es derivable en x = 0 si las derivadas laterales en ese punto existen y coinciden.

La derivada de la función para x distinto de 0 es: $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x<0 \\ 2x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Las derivadas laterales son en x = 0:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-e^{-x})=-1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$, la función f no es derivable en x = 0.

c) La función es siempre mayor o igual que 0 y solo vale 0 si x = 0, luego el mínimo de la función es el punto $O(0, 0)$.

6.67. Encuentra las tangentes comunes a las parábolas $y = x^2$, $y = (x - 1)(5 - x)$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$y - a^2 = 2a(x - a) \Rightarrow y = 2ax - a^2$

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 6x - 5$ en el punto de abscisa $x = b$ es:

$y - (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)(x - b) \Rightarrow y = (-2b + 6)x + b^2 - 5$

Para que sean la misma recta deben tener la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.

Por tanto: $\begin{cases} 2a=-2b+6 \\ -a^2=b^2-5 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $a = -b + 3 \Rightarrow -(-b + 3)^2 = b^2 - 5 \Rightarrow -b^2 + 6b - 9 = b^2 - 5 \Rightarrow 2b^2 - 6b + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 - 3b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$ y $b = 2 \Rightarrow a = 1$

Las tangentes comunes son $y = 2x - 1$ e $y = 4x - 4$

6.68. Determina todas las funciones f de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \ne 0$, y que verifica $f'(-1) = f'(1) = 0$.
¿Alguna de las funciones determinadas anteriormente verifican $f(0) = f(1)$?

Se deriva $f(x)$ y se obtiene $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 3a - 2b + c = 0$

$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 3a + 2b + c = 0$

Como $f'(-1)$ debe coincidir con $f(1) \Rightarrow 3a - 2b + c = 3a + 2b + c \Rightarrow b = 0$.

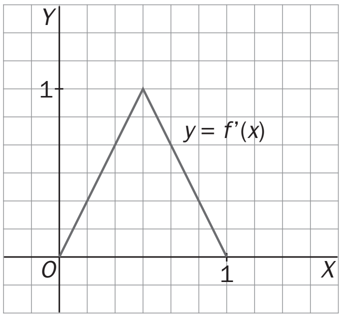
Sustituyendo en las dos ecuaciones anteriores se obtiene $c = -3a$.

Las funciones que verifican estas condiciones son de la forma $f(x) = ax^3 - 3ax + d$.

Si además $f(0) = f(1)$, debe ser $d = a - 3a + d \Rightarrow a = 0$

Por tanto, no existe ninguna función con esa expresión que cumpla las condiciones deseadas.

6.69.En la siguiente ilustración se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f : [0, 1] \to R$.



a) Halla una expresión algebraica de *f* sabiendo que $f(0) = 0$.

b) ¿Existe $f''\left(\frac{1}{2}\right)$?

a) La derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2-2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$, luego la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x - x^2 + b & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$.

Como $f(0) = 0$, $a = 0$, y como *f* es derivable, debe ser continua.

Para que sea continua en $x = \frac{1}{2}$, los límites laterales en ese punto deben ser iguales y coincidir con $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f'(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} (x^2) = \frac{1}{4} \qquad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x - x^2 + b) = 1 - \frac{1}{4} + b \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Igualando los resultados: $\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Entonces: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x - x^2 - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$

b) No, pues la función derivada no es derivable en $x = \frac{1}{2}$.

6.70.La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3, 0)$. Si $f'(2) = \frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.

La pendiente *m* de la recta tangente que pasa por $P(2, f(2))$ y $Q(-3, 0)$ debe ser igual a $f'(2) = \frac{1}{2}$:

$$m = \frac{f(2) - 0}{2 - (-3)} = \frac{f(2)}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$$

6.71.Obtén con la calculadora sen(0,02) y compáralo con el resultado obtenido por la aproximación lineal de $y = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$.

Con la calculadora en radianes: sen(0,02) = 0,0199986

Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, y se realiza una aproximación lineal de la misma para $a = 0$ y $x = 0{,}02$:

$L(0{,}02) = f(0) + f'(0) \cdot (0{,}02 - 0) \Rightarrow L(0{,}02) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 \cdot (0{,}02 - 0) = 0{,}02$

La aproximación es muy buena.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

6.1. Sean f y g funciones derivables definidas en R.

A) Si $f(2) > f(3)$, entonces $f''(2) \geq f''(3)$.

B) Si $f'(x) \geq g'(x)$ para todo x real, entonces $f(x) - g(x) \geq 0$.

C) Si $g(x) = f(x^3 + 1)$, entonces $g'(x) = f'(x^3 + 1)$.

D) Si $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$, entonces $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(x) + 2$.

E) Si $f'(x) \geq 2$ para todo x, no hay ningún punto en la gráfica de $(f \circ f)(x)$ con tangente paralela a la recta $y = 3x + 1$.

La respuesta correcta es la E, puesto que $(f \circ f)'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \geq 4$: para que la recta tangente a la curva sea paralela a la recta $y = 3x + 1$, su derivada debe ser igual a 3, pero la derivada es mayor o igual que 4 y, por tanto, es imposible que eso ocurra.

6.2. Considera la función $f(x) = x + \text{sen}\, x + 1$.

A) Existen números x tales que $f'(x) > 2$.

B) Hay algún punto de la gráfica en el que la tangente es paralela a la recta $y = \dfrac{1}{2}x$.

C) $f'(x) \geq f(x)$ para todo x real.

D) La tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 0 es la recta $y = 2x$.

E) Nada de lo anterior es correcto.

La respuesta correcta es la B.

6.3. Sea $f(x)$ la función dada por $f(x) = (x - 1)(3 - x)$ y sea $g(x) = \ln f(x)$.

A) g es positiva en su dominio de definición.

B) La recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa 2 es paralela a $y = x$.

C) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$.

D) $D(g) = (1, 3)$.

E) La gráfica de g nunca corta al eje horizontal.

La respuesta correcta es la D, ya que $f(x)$ es positiva en el intervalo (1, 3).

Señala en cada caso las respuestas correctas:

6.4. Sea f la función definida en $(-\infty, 1]$ mediante la fórmula $f(x) = 2x\sqrt{1 - x}$, y T, la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 0.

A) Para todo $x < 1$ es $f'(x) = \dfrac{2 - 3x}{\sqrt{1 - x}}$.

B) Para todo x de $(-\infty, 1)$ se verifica $f'(x) > 0$.

C) La ecuación de T es $y = 2x$.

D) La gráfica de f presenta un único punto con tangente horizontal.

E) Si $\dfrac{2}{3} < a < b < 1$, entonces $f(b) < f(a)$.

Son correctas las afirmaciones A, C, D y E

6.5. Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$ definida en R.

A) Como $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$, $f(x)$ tampoco lo es.

B) Para todo x real, $f'(x) = |x| + x$.

C) $f'(x) = 0$.

D) $f'(x) = 2x$ si $x \neq 0$.

E) Si $x < 0$, $f'(x) + g'(x) = 0$ siendo $g(x) = x^2$.

Es correcta la afirmación E.

6.6. Sea f una función derivable en $(0, +\infty)$ verificando $g(1) = 0$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

A) La pendiente de la tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa 1 es 1.

B) La función definida por $f(x) = x \cdot g(x)$ admite por derivada $f'(x) = 1$.

C) La función $h(x) = g(2x + 1)$ verifica $h'(x) = \frac{1}{2x+1}$.

D) Si $t(x) = x^2$, la derivada de $g \circ t$ en cada punto x verifica $(g \circ t)'(x) = \frac{2}{x}$.

E) Cuanto mayor es x, más próximas a la horizontal son las tangentes a $g(x)$.

Son correctas las afirmaciones A, D y E.

6.7. Sea $f(x) = x \cdot 3^{-x}$.

A) $f'(x) = (1 - x\ln 3)e^{-x\ln 3}$

B) $f'(x) = (1 - x)3^{-x}$

C) $f'(x) = (1 - x\ln 3)3^{-x}$

D) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{3^h}$

E) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$

Son correctas las afirmaciones C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

6.8. Sea f una función derivable y $g(x) = x + f^2(x)$.

a) La tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa 0 es paralela a la recta $y = x$.

b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el origen.

A) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) a $\Leftrightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La respuesta correcta es la B, puesto que si $f(0) = 0$, $g'(0) = 1 + 2f(0) \cdot f'(0) = 1$, pero no es cierto lo contrario, ya que podría ser $f'(0) = 0$.

Señala el dato innecesario para contestar:

6.9. Nos planteamos si la tangente a la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el punto de abscisa 3 corta a la recta $y = 2x + 1$, y nos dan estos datos.

a) Valor de a

b) Valor de b

c) Valor de c

d) Valor de d

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es la E.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

6.10. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = ax^2\, g(x)$, en $x = 0$ con a real y g una función definida en R.

a) $a = 3$

b) g es derivable en 0.

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos.

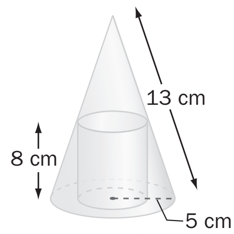
E) Faltan más datos.

La respuesta correcta es la C.

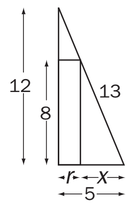
7 Aplicaciones de las derivadas

ACTIVIDADES INICIALES

7.I. Calcula el volumen del cilindro que está inscrito en el cono de la figura:



Aplicando el Teorema de Pitágoras, se calcula la altura del cono: $13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$ cm



Por semejanza de triángulos: $\frac{12}{5} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ cm

Para hallar el radio r del cilindro: $r = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$ cm

Luego el volumen del cilindro es: $V = \pi r^2 h = 8\left(\frac{5}{3}\right)^2 \pi$ cm^3

7.II. Calcula el volumen de una esfera cuya área lateral es de 100π m^2.

El radio r de la esfera cumple que: $100\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$ m

El volumen de la esfera será: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ m^3

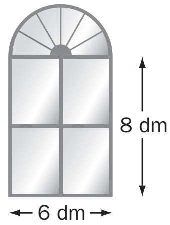
7.III. Calcula el área del triángulo rectángulo de hipotenusa 6 cm, semejante al triángulo rectángulo de catetos 72 cm y 96 cm.

La hipotenusa del triángulo grande es $\sqrt{72^2 + 96^2} = 120$ cm. Así pues, la razón de semejanza es $\frac{120}{6} = 20$.

Los catetos del triángulo pequeño son $\frac{72}{20} = 3,6$ cm y $\frac{96}{20} = 4,8$ cm.

Por tanto, su área es: $A = \frac{3,6 \cdot 4,8}{2} = 8,64$ m^2

7.IV. Calcula el área de una ventana de Norman, formada por un rectángulo de lados 6 dm y 8 dm, coronada por un semicírculo de diámetro 6 dm.



$$A = 6 \cdot 8 + \frac{\pi \cdot 3^2}{2} \approx 62,14 \text{ dm}^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

7.1. ¿Tiene algún extremo relativo la función $f(x) = x^5 + 2x + 1$? ¿Y la función $f(x) = 2\cos x - 4x + 1$?

La derivada de $f(x) = x^5 + 2x + 1$ es $f'(x) = 5x^4 + 2$, que no se anula nunca.
Por tanto, $f(x)$ no puede tener extremos relativos.
La derivada de $f(x) = 2\cos x - 4x + 1$ es $f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 4$, que se anulará si $-2\operatorname{sen} x - 4 = 0$, es decir, si $\operatorname{sen} x = -2$, lo cual es imposible.
Así pues, $f(x)$ no tiene extremos relativos.

7.2. Identifica los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$

b) $f(x) = x - \ln(1 + x)$

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 2$ o si $x = 3$.
Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por 2 y 3, ya que $D(f) = \mathbf{R}$:

x	$(-\infty, 2)$	2	(2, 3)	3	$(3, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, f crece en $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ y decrece en (2, 3). Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2))$, es decir, en $A(2, 28)$, y un mínimo relativo en el punto $B(3, f(3))$, es decir, en $B(3, 27)$.

b) El dominio de la función es $D(f) = (-1, +\infty)$. Su derivada es $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, que se anula si $x = 0$.
Se estudia el signo de la derivada en los intervalos en que se divide el dominio al considerar el 0 y el –1, que anula el denominador de la derivada:

x	(–1, 0)	0	$(0, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, f decrece en (–1, 0) y crece en $(0, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $A(0, f(0)) = A(0, 0)$.

7.3. El producto de dos números positivos es 36. Calcúlalos para que su suma sea lo más pequeña posible.

1. Se definen las variables, x, y, que son los dos números.
2. Se escribe la relación entre ellas: $x \cdot y = 36$, y se despeja una en función de la otra: $y = \dfrac{36}{x}$.
3. La función que hay que minimizar es la suma de los números, $S = x + y$. Luego $S(x) = x + \dfrac{36}{x}$.
4. Se halla el dominio de la función. Como x debe ser positivo, es un número del intervalo $(0, +\infty)$.
5. Se calcula el máximo y el mínimo de $S(x) = x + \dfrac{36}{x}$ en $(0, +\infty)$.

$S'(x) = 1 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$. La solución negativa se descarta porque no pertenece al dominio.

6. Se halla el valor de $S(x)$ en el valor que anula la derivada y se compara con el límite en los extremos del intervalo de definición: $S(6) = 12$, $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

Por tanto, el mínimo se alcanza para $x = 6$, con lo que los números serán 6 y 6. Su suma es 12.

7.4. (PAU) Halla las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo, de 10 metros de hipotenusa, para que su área sea máxima. ¿Cuál será dicha área?

1. Sean x e y las longitudes en metros de los catetos.
2. La relación entre las variables es $x^2 + y^2 = 100$, es decir, $y = \sqrt{100 - x^2}$.
3. La función a maximizar es el área del triángulo $A = \dfrac{x \cdot y}{2} \Rightarrow A(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$.
4. Se calcula el dominio de $A(x)$. Como x e y deben ser positivas: $x > 0$ e $y > 0$, es decir, $y = \sqrt{100 - x^2} > 0 \Rightarrow 100 - x^2 > 0 \Rightarrow 100 > x^2 \Rightarrow 10 > x$. Por tanto, x debe pertenecer al intervalo (0, 10).
5. Se halla el máximo de $A(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ en (0, 10).

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}.$$

Se compara el valor de la función en $x = \sqrt{50}$ con el límite de la misma en los extremos del intervalo de definición para comprobar si es el máximo de la función:

$A\left(\sqrt{50}\right) = 25$

$\lim\limits_{x \to 0} A(x) = \lim\limits_{x \to 10} A(x) = 0$.

El máximo se alcanza para $x = \sqrt{50}$ m, el otro cateto mide $y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$ m y el área máxima es de 25 m^2.

7.5. Una empresa inmobiliaria ha decidido convertir un hotel en 65 estudios. Alquilando a 600 € cada estudio, conseguiría alquilarlos todos, y por cada 20 € que aumente el alquiler, alquilaría 1 menos. Si cada estudio alquilado requiere 60 € mensuales de gastos, ¿a cuánto debe alquilarlos para obtener máximo beneficio?

Llamando x a cada veintena de euros que aumenta el alquiler, la función que da los beneficios es:

$B(x) = (65 - x)(600 + 20x) - 60(65 - x)$, donde $65 - x$ son los estudios que alquila, y $600 + 20x$, el precio de alquiler de cada estudio.

La función beneficio, después de operar, es:

$B(x) = (65 - x)(540 + 20x) = -20x^2 + 760x + 35100$, siendo x un valor comprendido entre 0 y 65 [0, 65].

$B'(x) = -40x + 760$,y los valores de x que la anulan: $-40x + 760 = 0 \Rightarrow x = 19$.

Se compara el valor de la función en ese punto y en los extremos del intervalo de definición: $B(0) = 35\,100$, $B(65) = 0$, $B(19) = 42\,320$.

Así pues, la función alcanza el máximo en $x = 19$. Por tanto, deberá alquilar $65 - x = 65 - 19 = 46$ estudios a un precio de $600 + 20x = 600 + 20 \cdot 19 = 980$ euros.
El beneficio máximo es de $B(19) = 42\,320$ euros.

7.6. ¿Tiene algún punto de inflexión la función $f(x) = x^4 + 6x^2 - x + 3$?

Se calcula la derivada segunda: $f'(x) = 4x^3 + 12x - 1$, y $f''(x) = 12x^2 + 12$.

La derivada segunda no se anula nunca; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

7.7. Encuentra los máximos y mínimos relativos de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

La derivada es $f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1)$, y se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$, y el signo de la misma:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene mínimos relativos (que también son absolutos) en los puntos $A(-1, f(-1)) = A(-1, -1)$ y $B(1, f(1)) = B(1, -1)$, y un máximo relativo en el punto $C(0, f(0)) = C(0, 1)$.

7.8. Si $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$, demuestra que hay algún punto entre –1 y 1 en el que $f'(x) = 2$.

La función cumple el teorema del valor medio en el intervalo [–1, 1], ya que es continua y derivable; así pues, existe un c de (–1, 1) que cumple $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{(1 - 1 - 1 + 2 + 1) - (-1 + 1 - 1 - 2 + 1)}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$.

7.9. ¿Es posible que haya tres puntos de igual ordenada en la función $f(x) = e^x - x + 5$?

Si hubiera tres puntos a_1, a_2, a_3, con igual ordenada: $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$.
Como la función es continua y derivable, por el teorema de Rolle deben existir dos números distintos c_1 en (a_1, a_2) y c_2 en (a_2, a_3) con derivada nula. Pero esto es imposible, ya que la derivada de la función, $f'(x) = e^x - 1$, solo se anula una vez: $e^x = 1$, es decir, si $x = 0$.

EJERCICIOS

Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos relativos

7.10. (PAU) Estudia la monotonía y halla los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ c) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ e) $f(x)=x^3\cdot(x+2)$ g) $f(x)=2x+\frac{1}{2x}$ i) $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{x^2-1}$

b) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ d) $f(x)=e^{1-x^2}$ f) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ h) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ j) $f(x)=\frac{|x|}{2-x}$

En todos los casos hay que estudiar para qué valores se anula la derivada y el signo de la misma en los intervalos definidos por dichos puntos y los que no pertenezcan al dominio.

a) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = **R** – {–1}. La derivada es $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$. Es siempre positiva, por lo que la función es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos.

b) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{(x+1)e^x(2-(x+1))}{e^{2x}}=\frac{(x+1)(1-x)e^x}{e^{2x}}$, que se anula si $(x+1)(1-x)e^x=0 \Rightarrow x=-1, x=1$.

x	$(-\infty,-1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en (–1, 1). Tiene un mínimo relativo, que es también absoluto, en $A(-1, 0)$, y tiene un máximo relativo en $B\left(1,\frac{4}{e}\right)$.

c) El dominio de la función es $D(f)$ = **R** – {2}. Su derivada es $f'(x)=\frac{-2}{(x-2)^3}$, que no se anula nunca. Por tanto, la función no tiene extremos relativos.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	+	$\notin D(f')$	–
Comportamiento de f	Creciente	$\notin D(f)$	Decreciente

La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2,+\infty)$. La recta x = 2 es una asíntota vertical.

d) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$, que se anula si x = 0. Para valores negativos, la derivada es positiva, la función crece, y para valores positivos, la derivada es negativa, la función decrece. Por tanto, la función es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$. Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto $A(0, e)$.

e) El dominio de $f(x)$ es **R**. Su derivada es $f'(x)=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$ y se anula si x = 0 o si $x=-\frac{3}{2}$.

x	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Creciente

La función es decreciente en $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$. Tiene un mínimo en $A\left(-\frac{3}{2},-\frac{27}{16}\right)$.

f) El dominio de $f(x)$ es (0, +∞). Su derivada, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, se anula si 1 – ln$x$ = 0, es decir, si x = e.

A la izquierda de e, la derivada es positiva, y a la derecha es negativa. Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$. Tiene un máximo relativo, que también es absoluto, en el punto $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

g) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = **R** – {0}. Su derivada es $f'(x)=2-\frac{1}{2x^2}$ y se anula si $x = -\frac{1}{2}$ o si $x = \frac{1}{2}$.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
Signo de f'	+	= 0	–	$\notin D(f')$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$\notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Tiene un máximo relativo en el punto $A\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(\frac{1}{2},2\right)$. La recta x = 0 es una asíntota vertical.

h) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = (0, +∞). La derivada, $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$, se anula si x = 1. A la izquierda de 1 es negativa, y a la derecha, positiva. Así pues, la función es decreciente en (0, 1) y creciente en $(1,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto A(1, 1).

i) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = **R** – {–1, 1}. $f'(x)=\frac{-x(x-1)^2(x+2)}{(x^2-1)^2}$ y se anula si x = 0, x = –2.

x	$(-\infty,-2)$	–2	(–2, –1)	–1	(–1, 0)	0	(0, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	$\notin D(f')$	+	= 0	–	$\notin D(f')$	–
Comportamiento de f	Decrec.	Mínimo relativo	Crec.	$\notin D(f)$	Crec.	Máximo relativo	Decrec.	$\notin D(f)$	Decrec.

La función es decreciente en $(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $(-2,-1)\cup(-1,0)$. Tiene un mínimo relativo en el punto A(–2, 4) y un máximo relativo en el punto B(0, 0). En el punto x = 1 hay una discontinuidad evitable porque $\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{2}$. La recta x = –1 es una asíntota vertical.

j) El dominio de $f(x)$ es $D(f)$ = **R** – {2}. La función definida a trozos es $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{2-x} & \text{si } x<0\\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

Su derivada, $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{(2-x)^2} & \text{si } x<0\\ \frac{2}{(2-x)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$, no está definida para x = 0, ya que $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-\frac{1}{2}$ y $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\frac{1}{2}$.

Además, si $x \neq 0$, $f'(x)$ no se anula; por tanto, no tiene extremos con tangente horizontal. Su signo:

x	$(-\infty,0)$	0	(0, 2)	2	$(2,+\infty)$
Signo de f'	–	$\notin D(f')$	+		+
Comportamiento de f	Decreciente		Creciente	$\notin D(f)$	Creciente

La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$. En x = 0 hay un punto anguloso que es un mínimo relativo. La recta x = 2 es una asíntota vertical.

7.11. Determina los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 3x^4 - 6x^2$.

La derivada es $f'(x) = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1)$, y se anula si $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función tiene mínimos relativos, que también son absolutos en los puntos $A(-1, -3)$ y $B(1, -3)$, y tiene un máximo relativo en el punto $C(0, 0)$.

7.12. (PAU) Determina dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

La derivada de la función es $f'(x) = 6x - 6$, que se anula si $x = 1$. Como $f''(1) = 6 > 0$, el punto $A(1, f(1))$ es un mínimo relativo, que también es absoluto porque se trata de una parábola cóncava hacia arriba. Tiene que cumplir que $f(1) = 5$; entonces, $3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a = 5$ y, por tanto, $a = 8$.

7.13. (PAU) Para cada h se considera la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$.
a) Halla los puntos en los que f alcanza sus valores máximos y mínimos.
b) Encuentra h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ y se anula si $x = 0$ o $x = 1$. La segunda derivada es $f''(x) = 12x - 6$. Como $f''(0) = -6 < 0$, el punto $A(0, h)$ es un máximo relativo. Como $f''(1) = 6 > 0$, el punto $B(1, -1 + h)$ es un mínimo relativo.

b) Para que $-1 + h = 0$, debe cumplirse que $h = 1$.

7.14. Localiza los extremos absolutos, si existen, de la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en cada uno de los intervalos indicados:
a) en $(-\infty, +\infty)$ b) $[-3, 0)$ c) en $(-3, 0]$ d) en $[0, 3]$ e) en $(0, 3)$ f) en $(-1, 3]$

La derivada de la función es $f'(x) = 2x + 2$ y se anula si $x = -1$. Si este valor está en el intervalo, se compara $f(-1)$ con el valor de la función en los extremos del mismo; si es cerrado, eligiendo el menor y el mayor. Si los intervalos son abiertos, se calculan los límites de la función en los extremos.

a) Intervalo $(-\infty, +\infty)$: $f(-1) = -2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. No tiene máximo absoluto.

b) Intervalo $[-3, 0)$: $f(-1) = -2$ $f(-3) = 2$ $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$

El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. El máximo absoluto es el punto $B(-3, 2)$.

c) Intervalo $(-3, 0]$: $f(-1) = -2$, $\lim_{x \to -3} f(x) = 2$, $f(0) = -1$

El mínimo absoluto es el punto $A(-1, -2)$. No tiene máximo absoluto.

d) Intervalo $[0, 3]$: $f(0) = -1$ $f(3) = 14$

El mínimo absoluto es el punto $A(0, -1)$. El máximo absoluto es el punto $A(3, 14)$.

e) Intervalo $(0, 3)$: $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 3} f(x) = 14$

No tiene ni mínimo absoluto ni máximo absoluto.

f) Intervalo $(-1, 3]$: $\lim_{x \to -1} f(x) = -2$, $f(3) = 14$

No tiene mínimo absoluto. El máximo absoluto es el punto $A(3, 14)$.

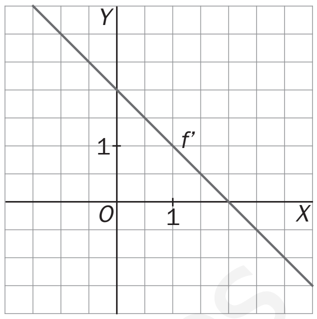
7.15. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo.

La derivada, que será una ecuación de segundo grado, debe tener dos soluciones.
Por ejemplo, $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ tiene dos soluciones, $x = 1$ y $x = 5$.

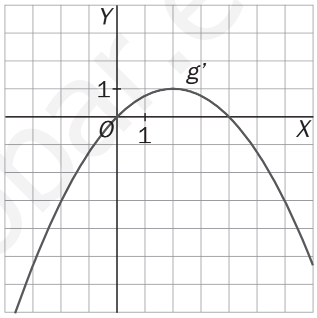
Así pues, la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 10$ tendrá un máximo y un mínimo relativos.

7.16. (PAU) De dos funciones, *f* y *g*, se sabe que la representación gráfica de sus funciones derivadas es una recta que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 0) (para la derivada de *f*) y una parábola que corta al eje *X* en (0, 0) y (4, 0), y tiene por vértice (2, 1) (para la derivada de *g*). Utilizando las gráficas de tales derivadas:
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f* y *g*.
b) Determina, si existen, máximos y mínimos de *f* y *g*.

a) La derivada de *f* es la recta de la gráfica.
Se observa que $f'(x) > 0$ si $x < 2$ y $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Así pues, la función *f* es creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$.



La derivada de *g* es la parábola cóncava hacia abajo de la gráfica.
Se observa que $g'(x) < 0$ si $x < 0$ o si $x > 4$ y $g'(x) > 0$ si $0 < x < 4$.
Así pues, la función *g* es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y creciente en (0, 4).



b) La función *f* tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2))$ y no tiene mínimos.
La función *g* tiene un mínimo relativo en el punto $B(0, g(0))$ y un máximo relativo en el punto $C(4, g(4))$.

7.17. (PAU) Halla los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.

La función es continua en todo **R**. Su derivada es $f'(x) = \dfrac{(x+1)(1-x)}{e^x}$, y se anula si $x = 1$ o si $x = -1$. Su signo:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1, +\infty)$
Signo de *f'*	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de *f*	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función tiene un mínimo relativo, que también es absoluto, en el punto $A(-1, f(-1)) = A(-1, 0)$, y un máximo relativo en el punto $B(1, f(1)) = B\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$.

7.18. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$, que no tenga ni máximos ni mínimos relativos.

Se busca una función cuya derivada no se anule nunca. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, y para que no se anule nunca, el discriminante de la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$ debe ser negativo. Es decir:

$(2b)^2 - 4 \cdot 3ac < 0 \Rightarrow 4b^2 - 12ac < 0$. Si *b* toma un valor muy pequeño y *a* y *c* grandes, se cumplirá la condición.

Por ejemplo: $b = 1$, $a = c = 10$ cumplen lo dicho.

La función $f(x) = 10x^3 + x^2 + 10x + 1$ no tiene extremos relativos.

Aplicaciones de las derivadas a problemas de optimización

7.19. (PAU) Averigua razonadamente dónde alcanza el máximo absoluto la función:

a) $f(x) = 2x + 4$ **si** $0 \le x \le 4$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$ **si** $4 < x \le 8$

a) La derivada de f es $f'(x) = 2$, que no se anula nunca. Como $f(0) = 4$ y $f(4) = 12$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $A(4, 12)$.

b) La derivada de f es $f'(x) = 2x$, que se anula si $x = 0$. Como f no está definida en 4, $\lim_{x\to 4} f(x) = 12$ y $f(8) = 60$, el máximo absoluto se alcanza en el punto $B(8, 60)$.

7.20. (PAU) Halla las dimensiones de una ventana rectangular de 6 metros de perímetro para que tenga la máxima superficie posible y, así, produzca la máxima luminosidad.

1. Las variables son las longitudes de los lados de la ventana: x e y.
2. La relación entre ellas: $2x + 2y = 6$. Despejando, $y = 3 - x$.
3. La función a maximizar es la superficie de la ventana: $A = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x(3 - x) = 3x - x^2$.
4. Se busca el intervalo de definición de la variable. Como x e y deben ser positivos, $x > 0$ e $y > 0$, y, por tanto, $3 - x > 0$, es decir, $x < 3$. Entonces, $0 < x < 3$, lo que significa que la variable x debe estar en el intervalo $(0, 3)$.
5. Se halla el máximo de $A(x) = x(3 - x) = 3x - x^2$ en $(0, 3)$. Su derivada, $A'(x) = 3 - 2x$, se anula si $x = \frac{3}{2}$, que es un máximo, ya que la función es una parábola cóncava hacia abajo.

El otro lado mide $y = 3 - x = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ m.

Entonces, la máxima luminosidad se consigue si la ventana es un cuadrado de lado 1,5 metros.

7.21. (PAU) Halla dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

Los números serán x y $20 - x$; por tanto, la función a maximizar es $f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.
Se trata de una parábola cóncava hacia abajo cuyo máximo es su vértice. La derivada es $f'(x) = 20 - 2x$, que se anula si $x = 10$.
Por tanto, los números son 10 y 10, y el producto máximo es 100.

7.22. (PAU) Encuentra un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

Si x es el número buscado, el problema se reduce a encontrar el máximo de la función $f(x) = x - x^2$. Su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo y el máximo es su vértice.

La derivada es $f'(x) = 1 - 2x$ y se anula si $x = \frac{1}{2}$. Así pues, $\frac{1}{2}$ es el número buscado.

7.23. (PAU) Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m^2. El metro lineal de tramos horizontal cuesta 2,50 euros, mientras que el metro lineal de tramos vertical cuesta 5 euros. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo y el precio de dicho marco.

1. Sea x la longitud en metros del tramo horizontal e y la longitud en metros del tramo vertical.
2. La función coste que hay que minimizar es $S = 2 \cdot 2{,}5x + 2 \cdot 5y = 5x + 10y$.
3. Como la superficie de la ventana es de 8 m^2, x e y deben cumplir que $x \cdot y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$.

   Así se obtiene la función coste en función de una sola variable. $S(x) = 5x + 10 \cdot \frac{8}{x} = 5x + \frac{80}{x}$.
4. La única restricción para x es que sea positiva.
5. Se calcula el mínimo de $S(x) = 5x + \frac{80}{x}$ en el intervalo $(0, +\infty)$. La derivada de S $S'(x) = 5 - \frac{80}{x^2}$, que se anula si $x = 4$. La solución negativa se descarta. Como a la derecha de 4 la derivada es positiva, y a la izquierda, negativa, el punto $(4, S(4)) = (4, 40)$ es, en efecto, un mínimo.

Las dimensiones de la ventana de coste mínimo son 4 metros el tramo horizontal y 2 metros el tramo vertical.
El coste mínimo es de 40 euros.

7.24. (PAU) Nos dicen que la función *f*(*t*) = *t* – 2 es derivada de la inflación en función del tiempo en cierto país, cuando $0 \le t \le 5$.

a) Determina el valor de *t* para el que la inflación alcanza el valor mínimo. ¿Cuál es el valor del mínimo?

b) Determina cuándo la inflación es máxima y cuál es su valor.

a) La derivada, $f(t) = t - 2$, se anula si $t = 2$. A la izquierda de 2 es negativa (la inflación decrece), y a la derecha de 2 es positiva (la inflación crece). En $t = 2$ se tiene la inflación mínima.

Dado que la función inflación tiene una expresión del tipo $F(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + C$, que es una parábola cóncava hacia abajo, se sabe que alcanza su mínimo absoluto en su vértice, que se encuentra en $t = 2$.

El valor que tiene en ese punto es $F(2) = \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + C = -2 + C$.

b) Para hallar la inflación máxima hay que comparar el valor de *F* en los extremos:

$F(0) = C$ y $F(5) = \frac{5^2}{2} - 2 \cdot 5 + C = \frac{5}{2} + C$

Está claro que $F(0) < F(5)$; así pues, la inflación máxima se alcanza para $t = 5$ y vale $C + \frac{5}{2}$

7.25. Encuentra 3 números no negativos que sumen 14, tales que uno sea doble que otro y que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima **b) Mínima**

1. Las variables son los tres números: x, $2x$, y.
2. La relación entre ellas: $x + 2x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 3x$.
3. La función que hay que maximizar y minimizar es $S = x^2 + (2x)^2 + y^2 = 14x^2 - 84x + 196$.
4. Como $x > 0$ e $y = 14 - 3x > 0$, x debe estar en el intervalo $\left[0, \frac{14}{3}\right]$.
5. Se calcula el máximo y el mínimo de $S(x)$ en $\left[0, \frac{14}{3}\right]$. La derivada $S'(x) = 28x - 84 = 0 \Rightarrow x = 3$. Se compara el valor de *S* en ese punto y en los extremos del intervalo: $S(3) = 70$, $S(0) = 196$ y $S\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{980}{9}$. El máximo se alcanza en $x = 0$ y los números serían 0, 0 y 14, y el mínimo en $x = 3$ y los números serían 3, 6 y 5.

7.26. Partimos un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos, haciendo con uno un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea:

a) Máxima **b) Mínima**

1. Las variables son las longitudes de los dos trozos: x (para hacer el círculo), y (para hacer el cuadrado).
2. La relación entre ellas: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.
3. La función optimizar es la suma de las áreas. El lado del cuadrado es $\frac{1-x}{4}$, y su área, $\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$.

De la longitud de la circunferencia se obtiene el radio $x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$. Su área es $\pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

La función suma es $A(x) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 2\pi x + \pi}{4^2\pi}$.

4. El valor que debe tomar x es cualquiera del intervalo (0, 1).
5. Se halla el máximo y el mínimo de $A(x)$ en (0, 1). Su derivada, $A'(x) = \frac{(\pi+4)x - \pi}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{\pi+4}$.

Este valor corresponde al mínimo, ya que la función es una parábola cóncava hacia arriba.

Se hallan los límites en los extremos del intervalo: $\lim_{x\to 0} A(x) = \frac{1}{4^2}$ y $\lim_{x\to 1} A(x) = \frac{1}{4\pi}$. Si solo se formara un círculo con todo el hilo, se obtendría el área máxima. Pero esta posibilidad no la contempla el problema.

Así pues, cuanto más largo sea el trozo para formar el círculo, mayor será la suma de las áreas.

7.27. Queremos escribir un texto de 96 cm² y tal que haya 2 cm de margen en cada lateral de la hoja en la que está escrito, así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.

1. Sean x e y las dimensiones de la página, la función que hay que minimizar es el producto xy.
2. Relación entre las variables: $(x-4)(y-6) = 96 \Rightarrow xy - 6x - 4y = 72 \Rightarrow y = \dfrac{72+6x}{x-4}$
3. Función a minimizar es $f(x) = x \cdot y = \dfrac{72x+6x^2}{x-4}$.
4. Dado que los márgenes laterales son de 2 cm, $x > 4$.
5. Se halla el mínimo de $f(x)$: $f'(x) = \dfrac{(x-4)(72+12x)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2} = \dfrac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 48x - 288 = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow\ (x-12)(x+4) = 0\ \Leftrightarrow\ x = 12,\ x = -4$. Solo es razonable el valor positivo.
A la izquierda de 12, $f'(x) < 0$, y a la derecha, $f'(x) > 0$, por lo que en $x = 12$ se presenta un mínimo que corresponde a unas dimensiones de la página $x = 12$ cm, $y = \dfrac{72+72}{8} = 18$ cm.

7.28. (PAU) Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función:
$B(x) = 2x - x^2 - 0{,}84$, siendo $B(x)$ el beneficio por kilogramo, expresado en euros, cuando x es el precio de cada kilogramo también en euros.
a) ¿Entre qué precios por kilogramo se producen beneficios para el almacenista?
b) ¿Qué precio por kilogramo maximiza los beneficios para éste?
c) Si tiene en el almacén 10 000 kilogramos de fresas ¿cuál será el beneficio total máximo que podría obtener?

a) Para que eso ocurra, $2x - x^2 - 0{,}84 > 0$. Como $2x - x^2 - 0{,}84 = -\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{25}\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{7}{25}\right) > 0$, obtendrá

0 beneficios si $x \in \left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right) = (0{,}6;\ 1{,}4)$, es decir, a un precio mayor de 0,60 €/kg y menor de 1,40 €/kg.

b) $B'(x) = 2 - 2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1) = 0{,}16$
Obtiene el máximo beneficio vendiendo las fresas a 1 €/kg y es de 0,16 € por kilo.
c) Lo obtendría vendiendo todas las fresas: $0{,}16 \cdot 10000 = 1600$ €.

7.29. De entre todos los números reales positivos x, y tales que x + y = 10, encuentra aquellos para los que el producto $p = x^2y$ es máximo.

Se halla y en función de x, $y = 10 - x$, y se sustituye en p: $p(x) = x^2(10 - x)$ con $0 < x < 10$, $p'(x) = 20x - 3x^2$, se anula si $x = 0$ o si $x = \dfrac{20}{3}$. Como $p(0) = 0 = p(10)$ y $p\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{4000}{27}$, el máximo se obtiene si $x = \dfrac{20}{3}$ e $y = \dfrac{10}{3}$.

7.30. (PAU) Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos derivados de fabricar x televisores son $D(x) = 200x + x^2$, donde $0 \le x \le 80$.
a) Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halla la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.
b) Determina el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

a) Beneficio = ingresos – gastos. Luego $B(x) = 300x - (200x + x^2)$ con $0 \le x \le 80$.
b) $B'(x) = 100 - 2x = 0$ si $x = 50$. Como $B(0) = 0$, $B(50) = 2500$ y $B(80) = 1600$, los beneficios máximos se obtienen fabricando 50 televisores y son de 2500 €.

7.31. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Llamando x a los lados iguales e y al desigual tenemos la relación $2x + y = 8$, $2 < x < 4$.

Hay que maximizar la función $A = \dfrac{y\sqrt{4x^2-y^2}}{4} = \dfrac{(8-2x)\sqrt{4x^2-(8-2x)^2}}{4} = 2(4-x)\sqrt{2x-4}$,

$A'(x) = \dfrac{2(8-3x)}{\sqrt{2x-4}} = 0 \Leftrightarrow 8-3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8}{3} \Rightarrow A(2) = 0$, $A(4) = 0$ y $A\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ El área máxima se alcanza cuando el triángulo es equilátero de lados $\dfrac{8}{3}$.

7.32. (PAU) Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

1. Variables: x, la longitud de la piscina, e y, su profundidad.

2. La relación entre ellas viene dada por el área a cubrir con baldosas: $x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \dfrac{192 - x^2}{4x}$.

3. Función a maximizar: $V = x^2 \cdot y = \dfrac{x(192 - x^2)}{4}$.

4. Se calcula su máximo: $V'(x) = \dfrac{192 - 3x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow$ si $x = 8$, que es un máximo de la función, ya que si $x < 8$, $V'(x) > 0$, y si $x > 8$, $V'(x) < 0$.

Así pues, el máximo se alcanza cuando la piscina tiene 8 m de largo y 4 m de profundidad.

Curvatura y puntos de inflexión

7.33. (PAU) Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2(1-x)}{x^2-1}$ g) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$ i) $f(x) = x^3 \cdot (x+2)$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ d) $f(x) = e^{1-x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ j) $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$

a) $f''(x) = -\dfrac{4}{(x+1)^3}$ es positiva si $x < -1$, y negativa si $x > -1$. Por tanto, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, +\infty)$. En $x = -1$ tiene una asíntota vertical.

b) $f''(x) = \dfrac{(x+1)^2 - 4(x+1) + 2}{e^x} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ o $x = 1 + \sqrt{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Son puntos de inflexión $A(1-\sqrt{2}, f(1-\sqrt{2})) = \left(1-\sqrt{2}, \dfrac{6-4\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}}\right)$ y $B(1+\sqrt{2}, f(1+\sqrt{2})) = \left(1+\sqrt{2}, \dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}\right)$.

c) $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^4}$ es siempre positiva. Es cóncava hacia arriba en **R** – {2}. En $x = 2$ hay una asíntota vertical.

d) $f''(x) = e^{1-x^2}(4x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Son puntos de inflexión $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$ y $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right)$.

e) $f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$. Como $D(f)$ = **R** – {–1, 1}, se estudia el signo de la derivada segunda en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, +\infty) - \{1\}$.
En $x = -1$ tiene una asíntota vertical, y en $x = 1$, una discontinuidad evitable.

f) $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$. La función es cóncava hacia abajo en $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \left(e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

g) $f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.
En $x = 0$ hay una asíntota vertical.

h) $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^3}=0 \Leftrightarrow x = 2$. La función es cóncava hacia arriba en (0, 2) y cóncava hacia abajo en (2, +∞).

Tiene un punto de inflexión en $A(2, f(2))=\left(2, \dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$.

i) $f''(x)=12x\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = -1$. La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en (–1, 0).
Tiene puntos de inflexión en $A(-1, -1)$ y en $B(0, 0)$.

j) $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & x<0\\ \dfrac{x}{2-x} & x\geq 0;\ x\neq 2\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(x-2)^3} & x<0\\ \dfrac{-4}{(x-2)^3} & x>0;\ x\neq 2\end{cases}$

La función es cóncava hacia arriba en (0, 2) y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
En $x = 0$, la función no es derivable y, aunque allí cambia la curvatura, no es un punto de inflexión.
En $x = 2$ hay una asíntota vertical.

7.34. (PAU) Calcula los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 + 6x - 3$.

$f'(x) = 3x^2 + 6 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Como $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, la función tiene un punto de inflexión en $A(0, -3)$.

7.35. Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de f(x) sabiendo que

$$f''(x) = (x + 1)(x - 3)^2(x - 7).$$

La derivada segunda se anula en $x = -1$, $x = 3$ y $x = 7$.
Como $f''(x) < 0$ en $(-1, 3)\cup(3, 7)$ y $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1)\cup(7, +\infty)$, la función tiene dos puntos de inflexión: uno en el punto de abscisa –1 y otro en el punto de abscisa 7.
En $x = 3$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura.

7.36. a) Halla los puntos de inflexión de $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

b) Halla la recta tangente a la curva en su punto de inflexión de abscisa positiva.

a) $y'=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=0 \Leftrightarrow x = 0,\ x=-\sqrt{3}$ o $x=\sqrt{3}$

Como la derivada segunda es positiva en $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$, la función tiene tres puntos de inflexión: $A\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0, 0)$ y $C\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Para hallar la recta tangente en $C\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ hay que calcular $f'\left(\sqrt{3}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

La ecuación de la recta tangente es $y-f\left(\sqrt{3}\right)=f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{1}{8}\left(x-\sqrt{3}\right)$

Por tanto, $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

7.37. Calcula las abscisas de los puntos de inflexión de f(x) si $f''(x)=(x-2)(x-4)^2(x+5)$.

La derivada segunda se anula en $x = -5$, $x = 2$ y $x = 4$.

Como $f''(x) < 0$ en $(-5, 2)$ y $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -5)\cup(2, 4)\cup(4, +\infty)$, la función tiene dos puntos de inflexión: uno de abscisa –5 y el otro de abscisa 2. En $x = 4$ no hay un punto de inflexión, pues no hay cambio de curvatura.

7.38. (PAU) Demuestra que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

$y'=4x^3-3x^2+2x-1;\quad y''=12x^2-6x+2$
La derivada segunda no se anula, luego la curva no tiene ningún punto de inflexión.

7.39. Utiliza el criterio de la segunda derivada para hallar los máximos y mínimos relativos de estas funciones:

a) $f(x) = x^3(x - 2)$ **b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$**

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{3}{2}$

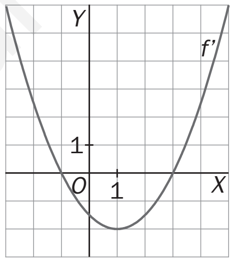
Se halla $f''(x) = 12x^2 - 12x$ y se estudia su signo en $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.

$f''(0) = 0$. Por tanto, no se puede afirmar si es o no un extremo relativo.
Hay que estudiar el signo de la primera derivada a izquierda y derecha de $x = 0$: $f'(0^-)$ y $f'(0^+)$ son negativos. Entonces, en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.

$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0 \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$ si $x = 2$ o $x = 3$. Se halla $f''(x) = 12x - 30$ y se estudia su signo en $x = 2$ y $x = 3$.
$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo en $A(2, f(2)) = A(2, 28)$.
$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $B(3, f(3)) = B(3, 27)$.

7.40. La gráfica que se muestra en la figura representa la derivada de una cierta función $f(x)$.
A partir de ella, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.



La función derivada es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Por tanto, es creciente en esos intervalos.

Y es negativa en $(-1, 3)$, donde la función es decreciente.
Como la derivada se anula en $x = -1$ y en $x = 3$, y en esos puntos cambia de signo, la función tiene un máximo para $x = -1$ y un mínimo para $x = 3$.
Además, la función derivada tiene un mínimo en $x = 1$, luego en ese valor se anula la derivada segunda. Como la función derivada decrece en $(-\infty, -1)$, la derivada segunda es negativa en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia abajo en él. En $(1, +\infty)$, la función derivada es creciente, luego la derivada segunda es positiva en ese intervalo y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba en él.

Dado que en $x = 1$ se anula la segunda derivada de la función y cambia su curvatura, tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$.

7.41. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

Para que eso sea posible, la derivada segunda de la función debe ser constante, ya que de lo contrario se anularía en algún punto que sería el de inflexión.

Como al derivar dos veces una función polinómica de grado tres se obtiene un polinomio de grado uno, que se anula para algún valor de x, se puede afirmar que cualquier función de este tipo tiene siempre un punto de inflexión.

7.42. Halla los valores de m para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava hacia arriba.

Para que eso suceda, $f''(x)$ debe ser siempre no negativa.
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m$
Como f'' es una parábola cóncava hacia arriba, será no negativa si no tiene raíces reales o si tiene una única raíz doble. Esto sucede si el discriminante de la ecuación es menor o igual que 0: $144 - 24m \leq 0 \Rightarrow m \geq 6$.

Algunos teoremas sobre funciones derivables

7.43. ¿Cuántas veces corta al eje horizontal la gráfica de $f(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 2$?

La función corta al eje horizontal al menos dos veces, pues $f(-10) > 0$, $f(0) < 0$, $f(10) > 0$ y f es continua.

Por otra parte, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 10x$ solo se anula una vez, en $x = 0$, por lo que f se anula dos veces, ya que, según el teorema de Rolle, entre cada dos ceros de la función existe un punto donde se anula la derivada.

7.44. Sea $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2 + 3$.
Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo [–1, 2].

La función es continua en [–1, 2] y derivable en (–1, 2). Además, $f(-1) = f(2) = 3$.

Por el teorema de Rolle, existe c en (–1, 2) con $f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = 0$.

7.45. Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

Si la función cortara dos veces al eje horizontal, en a y b, tendría que ocurrir que $f(a) = f(b) = 0$ y, por el teorema de Rolle, la derivada de f se anularía entre a y b.

Se halla la derivada $f'(x) = 15x^4 + 7$ y se comprueba que no se anula nunca. Luego la función no puede cortar al eje horizontal dos veces.

7.46. Sin calcular la derivada, ¿puedes asegurar que existe algún punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$ cuya tangente sea paralela a la recta que une los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 3)$?
¿Cuál es ese punto?

Se trata de la interpretación geométrica del teorema del valor medio.

Como $f(0) = 0$ y $f(3) = 3$, se puede afirmar que existe un número c entre 0 y 3 con $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 - 0}{3} = 1$.

El punto es aquel en el que la derivada vale 1: $f'(x) = 2x - 2 = 1$ si $x = \frac{3}{2}$. Por tanto, el punto es $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

PROBLEMAS

7.47. (PAU) Un equipo de trabajadores debe hacer la cosecha de un campo de manzanos a partir del 1 de octubre y únicamente puede trabajar durante un día. Si se hace la cosecha el 1 de octubre, se recogerán 60 toneladas y el precio será de 2000 €/tonelada. Sabemos que a partir de ese día, la cantidad que se podría recoger aumentará en una tonelada cada día, pero el precio de la tonelada disminuirá en 20 €/día.

a) Determina la fórmula que expresa los ingresos que se obtienen en función del número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre para hacer la cosecha.

b) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos por la cosecha sean máximos.

c) Indica cuál es el valor máximo de los ingresos por la cosecha.

d) Halla cuántos días deben pasar para que los ingresos por la cosecha sean los mismos que si se hiciese el día 1 de octubre.

a) Llamando x al número de días que se dejan pasar a partir del 1 de octubre, los ingresos, $f(x)$ en euros, vienen dados por la función $f(x) = (60 + x)(2000 - 20x) = -20x^2 + 800x + 120\,000$.

b) Como $f(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo, el máximo es su vértice. La derivada es $f'(x) = -40x + 800$, que se anula si $x = 20$. Así pues, si se dejan pasar 20 días, se obtendrán los máximos beneficios.

c) El valor máximo de los ingresos es $f(20) = 128\,000$ euros.

d) Los ingresos obtenidos el 1 de octubre son $f(0) = 60 \cdot 2000 = 120\,000$ euros. Si x es el número de días transcurridos para que los ingresos sean de 120 000 euros, entonces: $-20x^2 + 800x + 120\,000 = 120\,000 \Rightarrow$ $\Rightarrow -20x^2 + 800x = 0 \Rightarrow -20x(x + 40) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ (corresponde al 1 de octubre) y $x = 40$. Así pues, deben pasar 40 días.

7.48. (PAU) La cotización de las acciones de una determinada sociedad, suponiendo que la Bolsa funciona todos los días de un mes de 30 días, responde a la siguiente ley: $C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30\,000$,siendo x el número de días.

a) ¿Cuál ha sido la cotización en Bolsa el día 2?

b) Determina los días en que alcanza las cotizaciones máxima y mínima.

c) Calcula esas cotizaciones máxima y mínima.

a) En el día 2, la cotización ha sido $C(2) = 2^3 - 45 \cdot 2^2 + 243 \cdot 2 + 30\,000 = 30\,314$.

b) Se halla el máximo y el mínimo de $C(x)$ en el intervalo cerrado [0, 30]. La derivada es $C'(x) = 3x^2 - 90x + 243$, que se anula si $x = 3$ o si $x = 27$.
Se compara el valor de la función en esos puntos con los que toma en los extremos del intervalo [0, 30]:
$C(3) = 30\,351$, $C(27) = 23\,439$, $C(0) = 30\,000$ y $C(30) = 23\,790$.
El mínimo se alcanza el día 27, y el máximo, el día 3.

c) La cotización mínima es $C(27) = 23\,439$, y la máxima, $C(3) = 30\,351$.

7.49. (PAU) Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión: $f(x) = (x - 2)^2 (1 - 2x) + 252x + 116,\ 0 \le x \le 10$. Donde x indica años.

a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en que decreció.

b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

a) La función es $f(x) = -2x^3 + 9x^2 + 240x + 120$, y su derivada, $f'(x) = -6x^2 + 18x + 240$, que se anula si $x = 8$ o si $x = -5$. Como x representa años, debe ser positivo y, por tanto, la solución negativa no tiene sentido.
La derivada es positiva en el intervalo (0, 8), luego la cartera crece desde el inicio hasta los 8 años, y negativa en (8, 10), por lo que decrece desde los 8 hasta los 10 años.

b) Hay que comparar el valor de la cartera a los 8 años, al inicio y al final: $f(8) = 1592$, $f(0) = 120$ y $f(10) = 1420$.
El mejor momento para retirar sus ingresos habría sido a los 8 años.
Ha perdido 1 592 000 – 1 420 000 = 172 000 euros.

7.50. (PAU) El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t mide los años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población. ¿Cuál será el tamaño de ésta?

c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

a) La población inicial es el valor de la función para $t = 0$: $P(0) = 15$, es decir, 15 millones de individuos.

b) Para calcular el mínimo se halla la derivada:

$$P'(t) = \frac{2t \cdot (t+1)^2 - \left(15 + t^2\right) \cdot 2 \cdot (t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2 \cdot (t+1) \cdot (t-15)}{(t+1)^4} = \frac{2(t-15)}{(t+1)^3}$$

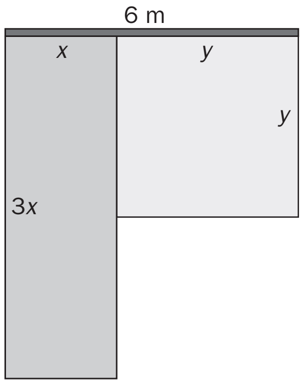
$P'(t) = 0$ cuando $t = 15$.

A la izquierda de 15, $f'(x) < 0$, y a la derecha, $f'(x) > 0$. Por tanto, la mínima población se alcanza a los 15 años y su tamaño es $P(15) = 0{,}9375$, es decir, 937 500 individuos.

c) Hay que calcular el límite cuando el tiempo tiende a infinito:

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1$, es decir, tiende a estabilizarse en un millón de habitantes.

7.51. Un artista ha adquirido un listón de 6 metros de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



La función a minimizar es $S = 3x^2 + y^2$, cuyas variables deben ser ambas positivas y estar sujetas a la relación $x + y = 6$.

Al sustituir y en S se obtiene: $S = 3x^2 + (6 - x)^2$ con $x \in [0, 6]$

$S'(x) = 6x + 2(6 - x) \cdot (-1) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [0, 6]$.

Comparando los valores de $S(0) = 36$, $S(6) = 108$ y $S\left(\frac{3}{2}\right) = 27$, se obtiene que para que la superficie sea mínima, la tela naranja debe medir 1,5 · 4,5 m y la verde debe ser un cuadrado de 4,5 m de lado.

7.52. (PAU) Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función $n(p) = 3000 - 6p$, donde $n(p)$ es el número de viajeros cuando p es el precio del billete.

Obtén:

a) La función que expresa los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (p).

b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos.

c) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos?

a) $I(p) = p(3000 - 6p) = 3000p - 6p^2$

b) El máximo de la función $I(p)$, dado que es una parábola cóncava hacia abajo, está en su vértice.

La derivada es $I'(p) = 3000 - 12p$, que se anula si $p = 250$. Así pues, el precio del billete que maximiza los ingresos es 250.

c) Los ingresos máximos son $I(250) = 375\,000$.

7.53. (PAU) Una fábrica de automóviles ha realizado un estudio sobre sus beneficios/pérdidas en miles de euros a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \quad 0 \le t \le 10.$$

Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿En qué años se producen los valores máximos y mínimos de dicha función?

b) Determinar sus periodos de crecimiento y decrecimiento.

c) ¿Cuáles son sus beneficios máximos?

d) ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año del estudio?

a) Hay que calcular el máximo y el mínimo de la función en [0, 10].

La derivada de la función es $F'(t) = 3t^2 - 36t + 81$, que se anula si $t = 3$ o si $t = 9$.

Se comparan: $F(3) = 105$, $F(9) = -3$, $F(0) = -3$ y $F(10) = 7$.

El máximo se alcanza en el año 3, y el mínimo, en los años 0 y 9.

b) Estudiando el signo de la derivada se observa que F es creciente en $(0, 3) \cup (9, 10)$ y decreciente en (3, 9).

c) Sus beneficios máximos son de $F(3) = 105$, es decir, 105 000 euros.

d) En el último año, $t = 10$, obtuvo unos beneficios de $F(10) = 7$, esto es, 7000 euros.

7.54. (PAU) Se sabe que los costes totales de fabricar x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $C(x) = 3x^2 - 27x + 108$.

a) ¿Cuántas unidades hay que producir para minimizar el coste medio $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

b) Justifica que la función que define el coste medio, $M(x)$, no tiene puntos de inflexión.

a) El coste medio viene dado por la función $M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 3x - 27 + \dfrac{108}{x}$. Su derivada es $M'(x) = 3 - \dfrac{108}{x^2}$, que se anula si $3 - \dfrac{108}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 = 108 \Rightarrow x = 6$. Dado que x representa el número de unidades de un producto, solo se considera la solución positiva.
Como a la izquierda de 6 la derivada es negativa, M decrece, y como a su derecha es positiva, M crece. Por tanto, para $x = 6$ se obtiene el mínimo. Así pues, se obtiene el mínimo coste medio produciendo 6 unidades.

b) La derivada segunda de $M(x)$ es $M''(x) = \dfrac{216}{x^3}$, que no se anula nunca, y, por tanto, la función $M(x)$ no puede tener puntos de inflexión.

7.55. A) Se considera la función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ por $f(x) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

a) Estudia el signo de $f'(x)$ en I.

b) Demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución en I y, con la ayuda de la calculadora, obtenla con una aproximación de 0,01.

B) En una empresa, se le encarga a un economista que modelice el coste de producción, en miles de euros, de x cientos de objetos fabricados y obtiene una función C definida por $C(x) = 9x + 15 + e^{2-0,2x}$. Cada objeto es vendido a 200 €, pero solamente se vende el 90% de los objetos fabricados.

a) Sabiendo que la empresa no puede fabricar más de 500 objetos, ¿en qué intervalo J se mueve x?

b) Comprueba que la recaudación R, en millares de euros, para una producción de x cientos de objetos, viene dada por $R(x) = 18x$.

c) Prueba que el beneficio, en miles de euros, obtenido por la producción de x cientos de objetos, viene dado por la función $B(x)$ definida en J por $B(x) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

d) Deduce del apartado A el mínimo número de objetos que hay que fabricar para obtener algún beneficio.

A)

a) La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 9 + 0,2e^{2-0,2x}$. En el intervalo [0, 5], la derivada es siempre positiva y, por tanto, la función es siempre creciente en dicho intervalo.

b) Como f es continua, $f(0) = -22,389 < 0$ y $f(5) = 30 - e > 0$, por el teorema de Bolzano, la función corta al eje X en el intervalo [0, 5].
Por otro lado, al ser una función es creciente, solo lo corta una vez. Así pues, $f(x) = 0$ solo tiene una solución en [0, 5].
Con la calculadora, se obtiene que esa solución está comprendida entre 2,19 y 2,20: $f(2,19) = -0,058$ y $f(2,20) = 0,041$.

B)

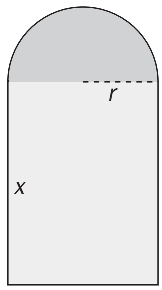
a) El intervalo en el que se mueve x es $J = [0, 5]$.

b) La recaudación en cientos de euros, al producir x cientos de objetos, viene dada por la función $R(x) = 200 \cdot \dfrac{90}{100} x = 180x$. En miles de euros es $R(x) = 18x$.

c) El beneficio se obtiene al restar a la recaudación los costes:
$B(x) = R(x) - C(x) = 18x - (9x + 15 + e^{2-0,2x}) = 9x - 15 - e^{2-0,2x}$.

d) En el apartado A se vio que $B(2,20) = 0,041 \Rightarrow 2,20 \cdot 100 = 220$ objetos. A partir de esta cantidad se obtiene algún beneficio.

7.56. (PAU) Una ventana tiene la forma de semicírculo montado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, mientras que el semicírculo es de un cristal de color que transmite la mitad de luz por unidad de área transparente. El perímetro total (exterior) de la ventana es fijo.
Halla las proporciones de la ventana que aporten la mayor cantidad de luz.



Llamando r al radio del círculo y x a la altura del rectángulo, se obtiene la mayor cantidad de luz cuando la superficie de la ventana es máxima. Luego hay que maximizar la función $S = 2rx + \frac{1}{2}\pi r^2$ con r y x positivas.

El perímetro P da la relación entre las variables: $P = 2r + 2x + \pi r \Rightarrow x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r$

Se sustituye x en S: $S = 2r\left(\frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = Pr - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$

Como x y r son positivos: $x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2}r > 0 \Rightarrow r < \frac{P}{2+\pi}$. Luego $r \in \left(0, \frac{P}{2+\pi}\right)$.

Dado que S es una parábola, su máximo coincide con su vértice: $S'(r) = P - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow$

$r = \frac{P}{4+\pi} \in \left(0, \frac{P}{2+\pi}\right)$.Como $x = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2} \cdot r = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{2} \cdot \frac{P}{4+\pi} = \frac{P}{4+\pi} = r$.

Por tanto, se obtiene la máxima cantidad de luz si la ventana es un rectángulo de base $2r$ y altura r.

PROFUNDIZACIÓN

7.57. a) Calcula los números reales *a* y *b* para que la función $g: \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to R$ dada por $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x + b)$, pase por el origen de coordenadas y admita tangente paralela al eje de abscisas en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$.

b) Considera la función $f: \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \to R$ dada por $f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Determina los intervalos donde *f* es negativa y aquellos en los que es positiva.

a) Para que pase por el origen: $g(0) = 0 \Rightarrow -0^2 + a \cdot 0 - \ln(2 \cdot 0 + b) = -\ln(b) = 0 \Rightarrow b = 1$

Para que la tangente en el punto de abscisa $\frac{1}{2}$ sea paralela al eje X: $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = -2x + a - \frac{2}{2x+1} \Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + a - \frac{2}{1+1} = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$.

La función $g(x)$ es: $g(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

b) Si la función se anulara más de una vez en ese intervalo, por el teorema de Rolle, la derivada también se anularía al menos una vez en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. $f'(x) = -2x + 2 - \frac{2}{2x+1} = \frac{2x - 4x^2}{2x+1} = 0$ si $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$.

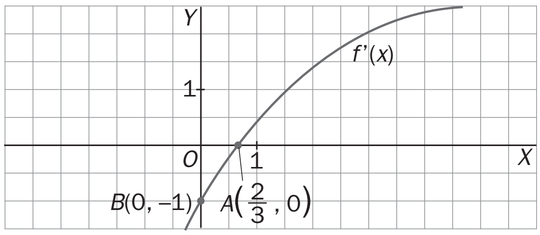
Como la derivada no se anula en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, la función no puede anularse dos veces en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

La derivada es positiva en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; por tanto, f es creciente. Además, $f(0) = 0$. Entonces, la función es positiva en ese intervalo.

En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, la derivada es negativa; así pues, la función es decreciente y, como $f(0) = 0$, es positiva en todo el intervalo. En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, la derivada es negativa y, por tanto, la función es decreciente. Como se ha comprobado que la función se anula una vez en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, si $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ con $f(c) = 0$, se concluye que f es positiva en $\left(\frac{1}{2}, c\right)$ y negativa en $(c, +\infty)$.

7.58. Considera una función $y = f(x)$, definida en el intervalo $[-1, 4]$, derivable en dicho intervalo y tal que la gráfica de la derivada, $f'(x)$, es la de la figura, que, como se observa, pasa por los puntos

$$A\left(\frac{2}{3}, 0\right), \quad B(0, -1).$$



Llamemos C a la gráfica de la función $y = f(x)$. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas, o no puedes responder con la información dada.

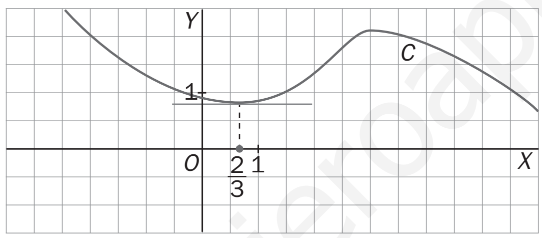
a) La recta de ecuación $y = 1$ es tangente a C en el punto de abscisa $\frac{2}{3}$.

b) La función f es creciente en el intervalo $[-1, 4]$.

c) La ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución en el intervalo $[-1, 4]$.

d) La tangente a C en el punto de abscisa 0 es paralela a la recta $y = x$.

e) Una posible curva C es la de la figura.



a) La ecuación de la tangente en el punto $A\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ es $y - f\left(\frac{2}{3}\right) = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Como $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, la ecuación de la tangentes es $y = f\left(\frac{2}{3}\right)$. Si $f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, la afirmación es verdadera, y en otro caso, falsa. Por tanto, no es posible, con la información que se tiene, decir si es verdadera o falsa.

b) Falsa, pues al ser la derivada negativa en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, la función es decreciente.

c) Lo que se puede saber es que f se anula a lo sumo dos veces en ese intervalo, ya que entre dos puntos de C con ordenada 0 hay un extremo relativo y la derivada solo se anula una vez.

d) Falsa, pues la pendiente de la recta tangente en el punto $A(0, f(0))$ es $f'(0) = -1$, y no es la pendiente de $y = x$.

e) Falsa, pues esa función tiene un máximo en $x = 3$ y allí la derivada no se anula.

7.59. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f* y calcula su derivada cuando sea posible.

b) Halla el máximo y el mínimo absolutos de *f* en el intervalo [–2, 2].

c) Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una sola raíz en el intervalo (–1, 1) y, con la ayuda de la calculadora, obtenla aproximadamente, indicando su primera cifra decimal.

a) La función es continua en **R** – {0} por estar definida por polinomios. En x = 0:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^3 + 2x + 2\right) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2 = f(0) \Rightarrow f$ es continua en **R**.

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow f$ es derivable en **R** – {0}.

b) Hay que hallar el valor de la función en los puntos donde se anula f' y en los extremos del intervalo:

Si $x \in$ (–2, 0), $f'(x) = 3x^2 + 2$, que no se anula nunca.

Si $x \in$ (0, 2) $f'(x) = 2x - 3$, que se anula en $x = \dfrac{3}{2}$, que pertenece al intervalo. Por tanto, los posibles extremos son: –2, 0, $\dfrac{3}{2}$ y 2: $f(-2) = -10$; $f(0) = 2$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$ y $f(2) = 0$. El punto $A(-2, -10)$ es el mínimo absoluto, y $B(0, 2)$, el máximo absoluto.

c) En (–1, 0), la función es creciente, pues $f'(x) > 0$, así que la función se anula como mucho una vez.

Como $f(-1) = -1$ y $f(0) = 2$, la función se anula una vez en (–1, 0).

En (0, 1), la función es decreciente, ya que $f'(x) < 0$, y como $f(1) = 0$, solo se anula en $x = 0$.

Para encontrar la solución de $x^3 + 2x + 2 = 0$ se hallan algunos valores de f en (–1, 0): $f(-0{,}5) = 0{,}875$; $f(-0{,}7) = 0{,}257$; $f(-0{,}8) = -0{,}112$. Así pues, la raíz está entre –0,8 y –0,7, y, por tanto, es $x \approx -0{,}7$.

7.60. En una empresa se han modelizado los beneficios obtenidos, en miles de euros, por la venta de *x* cientos de objetos mediante la función *f*, definida en (0, +∞) por $f(x) = -2x + (e^2 - 1) \ln x + 2$.

a) Comprueba que $f(1) = 0$ y $f(e^2) = 0$.

b) Obtén los valores de *x* para los que el beneficio obtenido es positivo o cero.

c) Obtén el valor de *x* (redondeado a la unidad) por el que se obtiene beneficio máximo.

a) $f(1) = -2 + (e^2 - 1) \ln(1) + 2 = 0$, $f(e^2) = -2e^2 + (e^2 - 1) \ln(e^2) + 2 = -2e^2 + 2(e^2 - 1) + 2 = 0$

b) Hay que calcular los valores que anulan la derivada: $f'(x) = -2 + \dfrac{e^2 - 1}{x} = \dfrac{-2x + e^2 - 1}{x} = 0$ si $x = \dfrac{e^2 - 1}{2}$.

En el apartado anterior se ha obtenido que la función se anula en $x = 1$ y $x = e^2$. Como es continua y derivable, aplicando el teorema de Rolle, la derivada se anula entre esos dos valores. Como $f'(x) = 0$ solo tiene una solución, la función únicamente se anula en esos dos valores.

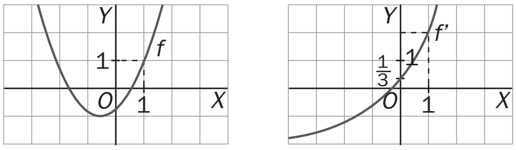
Por tanto, hay que estudiar el signo de f en los intervalos (0, 1), $(1, e^2)$ y $(e^2, +\infty)$, obteniéndose que es positiva en $(1, e^2)$ y negativa en $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$.

c) Es $x = \dfrac{e^2 - 1}{2} \approx 3$.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

7.1. Las gráficas de una función *f* y de su derivada *f '* se muestran a continuación.



¿Cuánto vale la pendiente de la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 1?

A) 1

B) –1

C) 2

D) $\frac{1}{3}$

E) Falta información para responder

La respuesta correcta es C ya que la pendiente de la tangente a *f* en el punto de abscisa 1 es *f* ’(1).

7.2. Sea *f* la función definida en (0, +∞) por la fórmula $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3x + 5$. La ecuación de la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 1 es:

A) $y = -7x + 3$

B) $y = -7x + 11$

C) $y = x + 3$

D) $y = -\frac{4}{x^3} - 3$

E) Nada de lo anterior.

La respuesta correcta es B.

7.3. Sea $y = g(x)$ una función continua estrictamente creciente en el intervalo [5, 7] tal que $g(5) = -3$ y $g(7) = 1$.

Se considera h(x) = $\frac{1}{g(x)}$.

A) $h(x)$ no está definida en [5, 7]

B) $h(x)$ es estrictamente decreciente en [5, 7].

C) $h(x)$ es estrictamente creciente en [5, 7].

D) $h(x)$ puede anularse alguna vez en [5, 7].

E) El mínimo valor de $h(x)$ en [5, 7] es $-\frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es A. Como $g(x)$ es continua en [5,7], $g(5)<0$ y $g(7)>0 \Rightarrow \exists c \in [5,7]$ tal que $g(c)=0 \Rightarrow h(x)=\frac{1}{g(x)}$ no está definida en $c \in [5,7]$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

7.4. De una función *f*, derivable en R, se muestra su tabla de variación:

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

A) Para cualquier número real x, $f(x) \geq -4$.

B) La ecuación $f(x) = -5$ admite al menos una solución en R.

C) La ecuación $f(x) = 0$ admite una única solución en el intervalo $[-1, 2]$.

D) La tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa 2 es paralela a la recta $y = x$.

E) $f'(4) < 0$.

Las respuestas correctas son A y C.

7.5. Si *f* es la función polinómica dada por $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$:

A) La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en R.

B) La ecuación $f(x) = 1$ admite exactamente dos soluciones en el intervalo $[-1, +\infty)$.

C) Si $x \in [-1, 1]$, entonces $f(x) \leq 4$.

D) Si $x < 0$, la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

E) Si $x > 0$, la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba.

Las respuestas correctas son A,B y C.

7.6. Sea f la función definida en R por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

A) *f* es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

B) *f* es estrictamente creciente en R.

C) Para cualquier número real a, la ecuación $f(x) = a$ admite una única solución.

D) f no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

E) $f''(0^-) = 0$.

Las respuestas correctas son B y D.

7.7. Sea $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ **la función definida en** $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

A) *f* es derivable en $\frac{1}{2}$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

B) $f'(1) = \frac{3}{2}$

C) *f* es estrictamente creciente en $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

D) *f* presenta un punto con tangente horizontal si $x = \frac{1}{4}$.

E) *f* no presenta ningún punto con tangente horizontal.

Las respuestas correctas son B, C y E.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

7.8. Sea *f* una función definida en R, derivable.

a) $f'(x) > 0$

b) *f* es estrictamente creciente en R.

A) a $\Leftrightarrow$ b.

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a.

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b.

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior.

La relación correcta es B.

Señala el dato innecesario para contestar:

7.9. Para encontrar el número que mide la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función $f(x) = ax^2 + bx + \ln(cx)$ en el intervalo $[1, d]$ se tienen los siguientes datos:

a) El valor de a.

b) El valor de b.

c) El valor de c.

d) El valor de d.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es E.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la siguiente cuestión:

7.10. Para probar que $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión con tangente horizontal en $x = a$, sabemos que:

a) $f'(a) = 0$

b) $f''(a) = 0$.

A) Cada información es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen faltan más datos.

La respuesta correcta es la E.

8 Representación de funciones

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Escribe los siguientes cocientes $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como $C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ con $C(x)$ y $R(x)$ polinomios y el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$:

a) $\frac{x^3+2x^2-1}{x+2}$ **b)** $\frac{x^4-x^3+x^2+x}{x^2+x+2}$

a)
$$\begin{array}{rl|l} x^3 & +2x^2-1 & x+2 \\ \cline{3-3} -x^3 & -2x^2 & x^2 \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$P(x) = x^2(x+2) - 1$

Por tanto: $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + \frac{-1}{x+2}$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & -x^3 & +x^2 & +x & x^2+x+2 \\ \cline{5-5} -x^4 & -x^3 & -2x^2 & & x^2-2x+1 \\ \hline & -2x^3 & -x^2 & +x & \\ & 2x^3 & +2x^2 & +4x & \\ \hline & & x^2 & +5x & \\ & & -x^2 & -x-2 & \\ \hline & & & 4x-2 & \end{array}$$

$P(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 - 2x + 1) + (4x - 2)$

Por tanto: $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2-2x+1+\frac{4x-2}{x^2+x+2}$

8.II. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $x^5 + x^4 - x^3 + 15x^2 = 0$ **b)** $x^4 + 10x^2 = -9$

a) Primero sacamos factor común y luego aplicamos Ruffini:

$x^5+x^4-x^3+15x^2=0 \Rightarrow x^2(x^3+x^2-x+15)=0 \Rightarrow x^2(x+3)(x^2-2x+5)=0$

Sus soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

b) Es una ecuación bicuadrada, $x^4+10x^2+9=0$, que se resuelve llamando $x^2 = t$:

$t^2+10t+9=0$, cuyas soluciones son $t = -9 = x^2$ y $t = -1 = x^2$, lo cual es imposible.

La ecuación $x^4+10x^2+9=0$ no tiene soluciones reales.

8.III. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $3x - x^3 \geq 0$ **b)** $\frac{x+5}{x^2+1} < 2$ **c)** $\frac{x^2-4}{x+1} \leq 0$

a) $3x-x^3 \geq 0 \Rightarrow x(3-x^2) \geq 0$. Esta última expresión se anula si $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Estudiamos el signo dividiendo la recta real por medio de los valores de x que anulan la expresión:

Valores de x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
Signo de $x(3-x^2)$	+	= 0	–	= 0	+	= 0	–

La solución está formada por todos los números x que pertenecen a $(-\infty,\ -\sqrt{3}] \cup [0,\ \sqrt{3}]$.

b) $\frac{x+5}{x^2+1} < 2 \Rightarrow \frac{x+5}{x^2+1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+x+3}{x^2+1} < 0$. El denominador es siempre positivo, así que estudiamos el signo del numerador: $-2x^2+x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2},\ x=-1$. Como $f(x)=-2x^2+x+3$ es una parábola cóncava hacia abajo, será negativa en $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, que coincide con la solución de la inecuación.

c) $\frac{x^2-4}{x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \leq 0$. En numerador se anula si $x = -2$, $x = 2$, y el denominador si $x = -1$.

Estudiamos el signo:

Valores de x	$(-\infty,-2)$	–2	(–2, –1)	–1	(–1, 2)	2	$(2,+\infty)$
Signo de $\frac{(x+2)(x-2)}{x+1}$	–	= 0	+	No se puede dividir por cero	–	= 0	+

La solución está formada por $(-\infty,\ -2] \cup (-1,\ 2]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 4x}$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 + x + 1}$ **d)** $i(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x+6}$

a) $D(f) = \mathbf{R}$.

b) El denominador no se anula nunca. El radicando es positivo o cero si $x \geq 1 \Rightarrow D(g) = [1, +\infty)$.

c) El denominador se anula si $x = 0$ o si $x = -4 \Rightarrow D(h) = \mathbf{R} - \{0, -4\}$.

d) El denominador se anula si $x = -6$. El radicando es positivo o cero si $x \leq 3 \Rightarrow D(i) = (-\infty, -6) \cup (-6, 3]$.

8.2. Calcula el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $g(x) = 2x^3 - 3$ **si** $-2 < x < 4$

a) La gráfica de $f(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba; así pues, los valores de $f(x)$ son mayores o iguales que la ordenada de su vértice. El vértice es el punto $V\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$. El recorrido es $R(f) = \left[-\dfrac{25}{4}, +\infty\right)$.

b) La función $g(x)$ es creciente, ya que su derivada, $g'(x) = 6x^2$, es siempre positiva o cero.
Así pues, $R(g) = [f(-2), f(4)] = [-19, 125]$.

8.3. Un psicólogo introduce repetidas veces una rata en un laberinto para estudiar su capacidad de aprendizaje. Ha observado que el tiempo, en minutos, que tarda en recorrerlo en el intento x viene dado por la fórmula:

$$T(x) = 4 + \frac{12}{x}$$

a) Calcula el dominio de $T(x)$ en este contexto.

b) ¿Puede la rata tardar menos de 4 minutos en realizar el trayecto?

c) Calcula el recorrido de la función en su contexto.

a) $D(T) = 1, 2, 3, 4, 5\ldots$

b) $T(x) = 4 + \dfrac{12}{x} > 4$; así pues, una rata siempre tardará más de 4 minutos en recorrerlo.

c) $R(T) = \{T(1) = 16, T(2) = 10, T(3) = 8, T(4) = 7\ldots\}$

8.4. Halla los puntos de corte con los ejes y estudia el signo de la función:

a) $f(x) = (x-1)(x+1)^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$

a) Basta estudiar el signo de $(x - 1)$, teniendo en cuenta que $(x + 1)^2 \geq 0$ y que la función se anula en $x = -1$ y $x = 1$.
Así pues, la función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$.
Corta al eje X en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$. Corta al eje Y en el punto $C(0, f(0)) = C(0, -1)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
Signo de f	+	= 0	–	$\notin D(f)$	+	$\notin D(f)$	–	= 0	+

Así pues, la función es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-2, 2) \cup (4, +\infty)$ y negativa en $(-4, -2) \cup (2, 4)$.
Corta al eje X en los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$. Corta al eje Y en el punto $C(0, f(0)) = C(0, 4)$.

8.5. ¿Cuáles de estas funciones son simétricas?

a) $f(x) = -2x^3 + x - 1$ **b)** $f(x) = \ln x^2$

a) $f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) - 1 = 2x^3 - x - 1$. No tiene simetría par ni impar.

b) $f(-x) = \ln(-x)^2 = \ln x^2 = f(x)$. Tiene simetría par.

8.6. Calcula el período de la función $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

$f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{3} + 2\pi\right) = \text{sen}\left(\dfrac{1}{3}(x + 6\pi)\right) = f(x + 6\pi)$. El período es $T = 6\pi$.

8.7. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2}$

a) Asíntotas verticales: $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \dfrac{(x + 4)(x - 4)}{(x + 2)(x - 2)}$. El denominador se anula si $x = -2$ o si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = -\infty$. La recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Ya no es necesario hallar el otro límite lateral.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

b) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{1}{(x + 1)(x - 3)}$ se anula si $x = -1$ o si $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{(x + 1)(x - 3)} = +\infty$. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x + 1)(x - 3)} = -\infty$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x + 1)(x - 3)} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x + 1)(x - 3)} = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

c) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$ se anula si $x = 1$ o si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{x(x + 3)}{(x - 2)} = -4$. No hay asíntota vertical en $x = 1$. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Hacemos la división que indica la expresión de la función y obtenemos:

$f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2} = x + 5 + \dfrac{10x - 10}{x^2 - 3x + 2}$. La recta $y = x + 5$ es una asíntota oblicua.

d) Asíntotas verticales: El denominador de $f(x)$ se anula si $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = +\infty$. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = 2$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 2} = -2$. La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito, y la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

8.8. Halla los extremos relativos y estudia la monotonía de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$ **b)** $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

a) La derivada de f es $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 = 15x^2(x^2 + 1)$, y se anula si $x = 0$. La derivada siempre es mayor o igual que cero, luego la función es creciente en **R**.

b) La derivada de $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$ es $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} e^{\frac{2x}{x^2+1}}$, que se anula si $x = -1$ o si $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

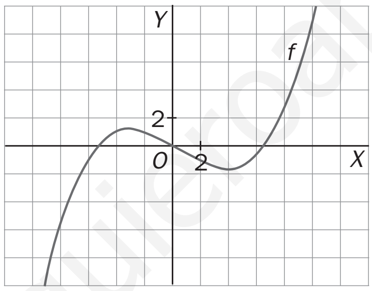
La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-1, 1)$.

Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-1, f(-1)) = A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $B(1, f(1)) = B(1, e)$.

8.9. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que:

- $f'(x) > 0$ **si** $x < -3$ **o si** $x > 4$
- $f'(x) < 0$ **si** $-3 < x < 4$
- $f(-3) < 4$ **y** $f(4) > -2$



8.10. (PAU) Una cadena de televisión ha estrenado un nuevo programa para la franja de las 11 a las 15 horas. El *share* o porcentaje de audiencia de la primera emisión vino dado por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 36t^2 - 420t + 1596, \quad 11 \le t \le 15$$

expresado el tiempo *t* en horas. Para que el programa siga en antena, el *share* ha tenido que alcanzar en algún instante el 30%.

a) Indica cuándo creció el *share* y cuándo decreció. ¿Seguirá emitiéndose el programa?

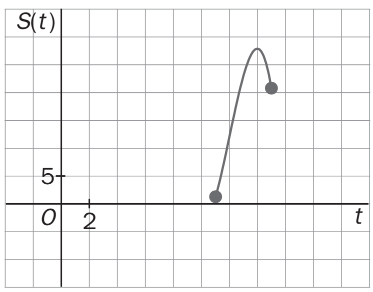
b) Dibuja la gráfica del *share*.

a) La derivada es $S'(t) = -3t^2 + 72t - 420$, que se anula si $t = 10$ o $t = 14$. Como la derivada es una parábola cóncava hacia abajo, es negativa en $(-\infty, 10) \cup (14, +\infty)$ y positiva en $(10, 14)$. Así pues, el *share* es creciente en $[11, 14)$ y decreciente en $(14, 15]$.

Estudiemos el máximo del *share* en el intervalo $[11, 15]$. Para ello comparamos:

$S(14) = 28$; $S(11) = 1$; $S(15) = 21$
Así pues, el *share* nunca alcanza el 30% y, por tanto, dejará de emitirse.

b) El dibujo de la gráfica del *share* se muestra a la derecha:



8.11. Estudia la curvatura y halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = 2x^2 + \ln x$

b) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$. La segunda derivada se anula si $x = \frac{1}{2}$. A su izquierda es negativa y a su derecha es positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. El punto $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ es el punto de inflexión.

b) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$. La segunda derivada es siempre positiva y no se anula nunca. La función es cóncava hacia arriba en todo su dominio, **R**, y no tiene puntos de inflexión.

c) El dominio de la función es $D(f) = (0, +\infty)$. $f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$, $f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (no pertenece al dominio) o si $x = \frac{1}{2}$. Estudiemos su signo:

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de f''	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2\right)$.

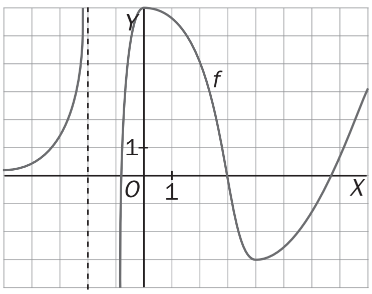
d) El dominio de la función es $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$. La derivada segunda no se anula nunca; por tanto, la función no tiene puntos de inflexión. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de f''	–	$\notin D(f)$	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

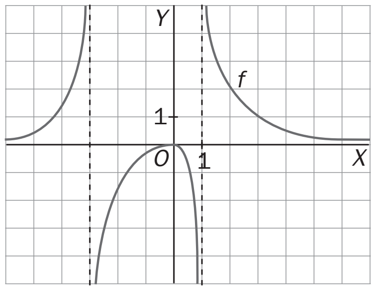
8.12. Representa una función que verifique:

- **Es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ u $(4, +\infty)$ y decreciente en $(0, 4)$.**
- **Sus extremos relativos son $A(0, 6)$ y $B(4, -3)$.**
- **$f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$.**



8.13. Representa una función que reúna todas estas características:

- $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
- **La recta $x = -3$ es una asíntota vertical.**
- **Crece en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.**
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$



8.14. Representa la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$.

I. Dominio. Es una función polinómica $\Rightarrow D(f) = \mathbf{R}$.

II. Corte con los ejes. La gráfica de $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8} = \dfrac{x^2(6 - x^2)}{8}$ corta al eje X en los puntos $O(0, 0)$, $A\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ y $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$. Corta al eje Y en el $O(0, 0)$. Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

III. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

IV. Información extraída de la primera derivada. $f'(x) = \dfrac{12x - 4x^3}{8} = \dfrac{x(3 - x^2)}{2}$

La derivada se anula si $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Estudiemos su signo:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Tiene máximos relativos en los puntos $C\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = C\left(-\sqrt{3}, \dfrac{9}{8}\right)$ y $D\left(\sqrt{3}, \dfrac{9}{8}\right)$.

Tiene un mínimo relativo en el punto $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

V. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \dfrac{12 - 12x^2}{8} = \dfrac{3(1 - x^2)}{2}$.

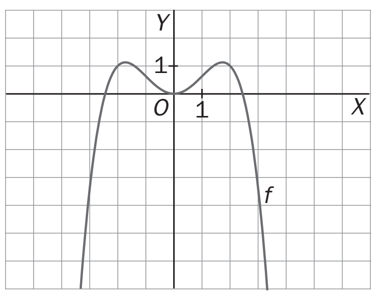
La segunda derivada se anula si $x = -1$ o $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1, +\infty)$
Signo de f''	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia arriba en (–1, 1).

Tiene dos puntos de inflexión:

$E(-1, f(-1)) = E\left(-1, \dfrac{5}{8}\right)$ y $F(1, f(1)) = F\left(1, \dfrac{5}{8}\right)$.



8.15. (PAU) Para la función f: R → R definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determina:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) Su curvatura y sus puntos de inflexión.

c) Su representación gráfica.

a) La derivada, $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 24(x^2 - 7x + 10) = 24(x-2)(x-5)$, se anula para $x = 2$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Estudiemos cómo varía el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores:

x	$(-\infty,\ 2)$	2	(2, 5)	5	$(5,\ +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(-\infty,\ 2) \cup (5,\ +\infty)$ y decreciente en (2, 5).

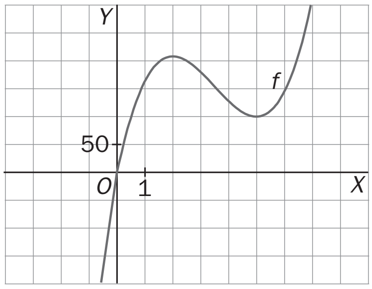
Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2)) = A(2, 208)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $B(5, f(5)) = B(5, 100)$.

b) La segunda derivada es $f''(x) = 48x - 168$, y se anula si $x = \frac{7}{2}$.

x	$\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2},\ +\infty\right)$
Signo de f''	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,\ \frac{7}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{7}{2},\ +\infty\right)$.

El punto $C\left(\frac{7}{2},\ f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = C\left(\frac{7}{2},\ 154\right)$ es un punto de inflexión.



8.16. (PAU) La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- **Pasa por el punto (0, 0).**
- **Tiene un máximo local en el punto (1, 2).**

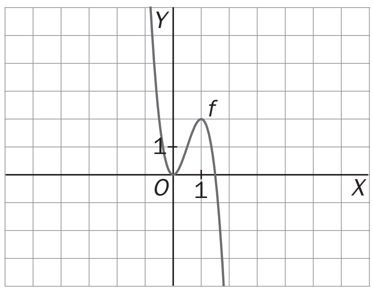
a) Obtén el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Representa la función.

a) $f(0) = 0$ implica que $f(0) = c = 0$. La función es $f(x) = ax^3 + bx^2$, y su derivada, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$
$f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$
Resolviendo el sistema, calculamos los coeficientes: $a = -4$, $b = 6$.
La función es $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.

b) La función $f(x) = -4x^3 + 6x^2 = 2x^2(3 - 2x)$ corta a los ejes en los puntos $O(0, 0)$ y $A\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$.

La derivada de la función es $f'(x) = -12x^2 + 12x = 12x(1 - x)$, y se anula si $x = 0$ o si $x = 1$.
Al estudiar el signo de la derivada se observa que en $x = 0$ hay un mínimo relativo, y en $x = 1$, un máximo relativo.
Su gráfica se encuentra a la derecha.



8.17. Representa las siguientes funciones racionales.

a) $\boldsymbol{f(x) = x + \frac{1}{x}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}}$

a) $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

I. Dominio. $D(f)$ = **R** – {0}. El denominador se anula si x = 0.

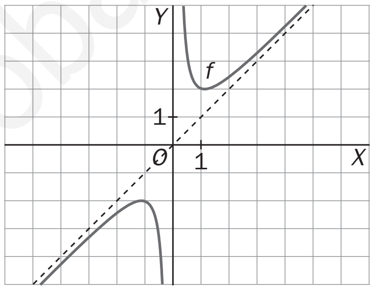
II. Corte con los ejes. No corta los ejes. La función es simétrica respecto al origen porque $f(–x) = –f(x)$.

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$; por tanto, la recta x = 0 es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$.

IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

La recta $y = x$ es asíntota oblicua, pues $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

V. Información extraída de la primera derivada. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$ solo si x = 1, x = –1. Así que P(1, 2) es un mínimo relativo, y Q(–1, –2), un máximo relativo. La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.



VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

b) $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$

I. Dominio. $D(f)$ = **R** – {–3}. El denominador se anula si x = –3.

II. Corte con los ejes. Corta el eje X en el punto A(3, 0) y al eje Y en el punto B(0, 3).

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = -\infty$, la recta x = –3 es una asíntota vertical.

Además $\lim\limits_{x\to -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = +\infty$

IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

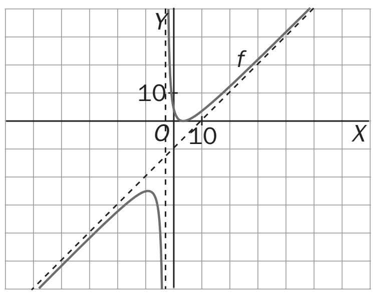
Si efectuamos el cociente, vemos que $f(x) = x - 9 + \frac{36}{x+3}$, por lo que la recta $y = x – 9$ es una asíntota oblicua.

V. Información de la primera derivada. $f'(x) = \frac{(x-3)(x+9)}{(x+3)^2}$. La derivada se anula si x = 3 o si x = –9.

x	$(-\infty, -9)$	–9	(–9, –3)	–3	(–3, 3)	3	$(3, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	$\notin D(f)$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-9, -3) \cup (-3, 3)$.

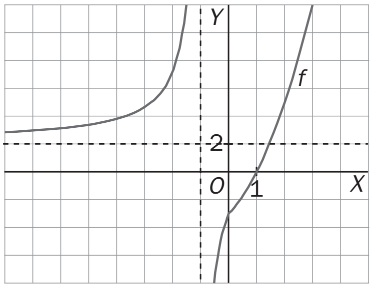
Tiene un máximo relativo en C(–9, –24) y un mínimo relativo en A(3, 0).



VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \frac{72}{(x+3)^3}$.

La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no tiene puntos de inflexión. La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia arriba en $(-3, +\infty)$.

8.18. Representa la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x\le 0\\ x^2+2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$



$D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$. La función es continua en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-3$.

El primer trozo es una función racional. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical, y la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

El segundo trozo es una parábola cóncava hacia arriba y que corta el eje X en el punto $A(1, 0)$.

8.19. Representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ **b)** $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}$

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

I. Dominio. Resolviendo la inecuación $x^2 - 4 \ge 0$, $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

II. Cortes con los ejes. No existe corte con el eje vertical y corta el eje horizontal en $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$. La función es par.

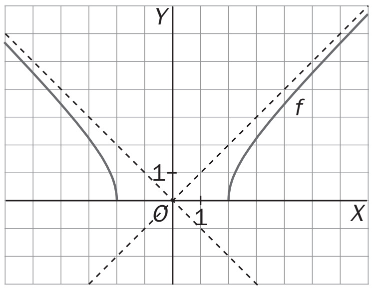
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$, luego no hay asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2-4}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-x}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}(f(-x)+(-x))\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(-x)^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt{1-4/x^2}+1\right)}=0$$



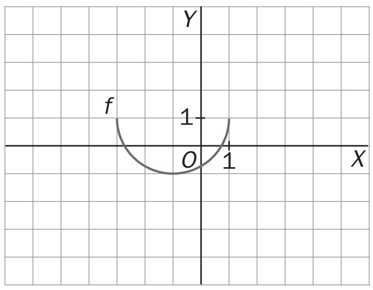
La recta $y = -x$ es asíntota oblicua en $-\infty$. Como la función es par, la recta $y = x$ es la asíntota oblicua en $+\infty$.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

La derivada en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ es $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, que es negativa en $(-\infty, -2)$ y positiva en $(2, +\infty)$. Por tanto, la función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente en $(2, +\infty)$.

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ es $f''(x)=\dfrac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$, que es siempre negativa, luego la función es cóncava hacia abajo.

b) $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}$



I. Dominio. Resolviendo la inecuación $3-2x-x^2\ge 0$, $D(f) = [-3, 1]$.

II. Corte con los ejes. $f(x)=1-\sqrt{3-2x-x^2}=0\Rightarrow\sqrt{3-2x-x^2}=1$, si $3-2x-x^2=1\Rightarrow x^2+2x-2=0$, cuyas soluciones son $x=-1+\sqrt{3}$ y $x=-1-\sqrt{3}$. Corta el eje Y en el punto $A(0, 1-\sqrt{3})$.

III. Asíntotas. No tiene asíntotas.

IV. Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos. La derivada es $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, que se anula si $x = -1$.

A su izquierda es positiva y a su derecha es negativa. Así pues, la función es decreciente en $[-3, -1)$ y creciente en $(-1, 1]$. Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto $B(-1, -1)$.

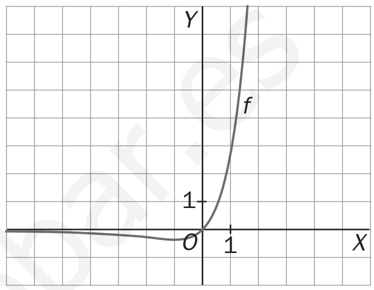
V. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x)=\dfrac{4}{(3-2x-x^2)\sqrt{3-2x-x^2}}$, que es siempre positiva, y, por tanto, la función es cóncava hacia arriba.

8.20. Representa las siguientes funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = x\,e^x}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}}$

a) $f(x) = x\,e^x$

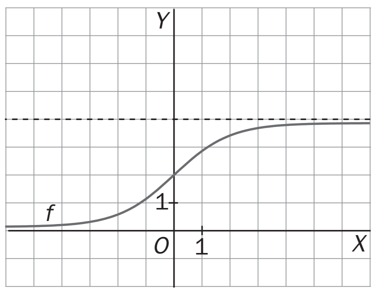
I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta a los ejes en el punto *O*(0, 0).
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, luego hay una asíntota horizontal *y* = 0 por la izquierda.
V. Monotonia. Máximos y mínimos. $f'(x) = e^x(x+1)$,que es negativa en (–∞, –1) y positiva en (–1, +∞).
Por tanto, la función es decreciente en (–∞, –1) y creciente en (–1, +∞).
Tiene un mínimo relativo (también es absoluto) en *B*(–1, $-\dfrac{1}{e}$).



VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = e^x(x+2)$, que en el intervalo (–∞, –2) es negativa, luego la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo, mientras que en el intervalo (–2, +∞) es positiva, luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo.
Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

b) $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$

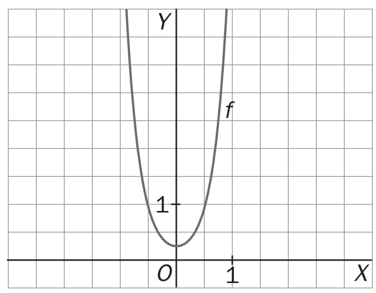
I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta los ejes en el punto *A*(0, 2).
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{1+e^{-x}} = 0$, luego hay una asíntota horizontal *y* = 0 por la izquierda,
y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^{-x}} = 4$, luego hay una asíntota horizontal *y* = 4 por la derecha.
V. Monotonia. Máximos y mínimos. $f'(x) = \dfrac{4e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$, siempre es positiva; por tanto, la función es siempre creciente.



VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es
$f''(x) = \dfrac{4e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$, que en el intervalo (–∞, 0) es positiva, luego la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba, mientras que en el intervalo (0, +∞) es negativa, luego la función es cóncava hacia abajo en este intervalo. Tiene un punto de inflexión en (0, 2).

8.21. Cuando un cable se cuelga de dos postes, la curva que forma se llama catenaria. La ecuación de una catenaria es $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8}}$**. Represéntala gráficamente.**

I. Dominio: **R**
II. Cortes con los ejes. La gráfica corta los ejes en el punto *A* (0, $\dfrac{1}{4}$).
III. Asíntotas verticales. La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{4x}+e^{-4x}}{8} = +\infty$.



V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es
$f'(x) = \dfrac{e^{4x}}{2} - \dfrac{e^{-4x}}{2}$, que en el intervalo (–∞, 0) es negativa, por tanto la función es decreciente en ese intervalo y en el intervalo (0, +∞) es positiva, luego la función crece.
VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = 2e^{4x} + 2e^{-4x}$, que es siempre positiva, luego la función es siempre cóncava hacia arriba.

8.22. Representa la función $f(x) = x^2 \ln(x)$.

I. Dominio: (0, +∞)

II. Cortes con los ejes: $f(x) = x^2\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$.La gráfica corta con el eje horizontal en el punto (1,0),

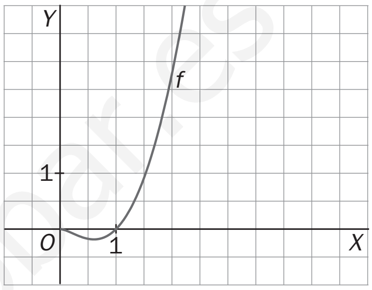
III. No tiene asíntotas verticales

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) = +\infty$

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos: La derivada es $f'(x) = 2x\ln(x) + x$, es positiva en $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, luego la función es creciente en ese intervalo y es negativa en $\left(0,\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$,luego la función es decreciente en ese intervalo. El punto $\left(e^{-\frac{1}{2}}, f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$ es un mínimo absoluto.

VI. Curvatura y puntos de inflexión: La segunda derivada es $f''(x) = 2\ln x + 3$, es positiva en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo y al ser negativa en $\left(0,\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$, la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Hay un punto de inflexión $\left(e^{-\frac{3}{2}}, f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$.



8.23. Representa la función $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$.

I. Dominio: (0, +∞)

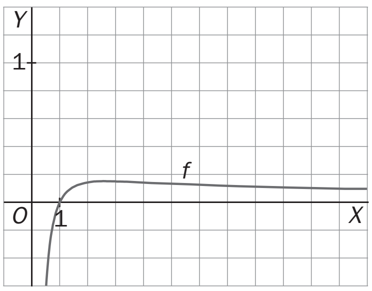
II. Cortes con los ejes: $f(x) = \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = 0 \Rightarrow \ln\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 1$. La gráfica corta el eje horizontal en el punto (1, 0).

III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = -\infty$, luego $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha.

IV. Comportamiento en el infinito. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x} = 0$, luego y = 0 es una asíntota horizontal por la derecha.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{3x^2}$, que es positiva en (0, e), por tanto la función es creciente en ese intervalo y es negativa en (e, $+\infty$), la función será decreciente en ese intervalo. Hay un máximo relativo en (e, $f(e)$) = $\left(e, \dfrac{1}{3e}\right)$.

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^3} - \dfrac{1}{x^3}$, que es positiva en ($e\sqrt{e}$, $+\infty$) luego la función es cóncava hacia arriba en ese intervalo y es negativa en (0, $e\sqrt{e}$) luego la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo. Tiene un punto de inflexión en $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e\sqrt{e}}\right)$.



8.24. Representa la grafica de $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}x}$.

I. Dominio: $\mathbf{R} - \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

II. Cortes con los ejes. La gráfica no corta a los ejes en ningún punto.

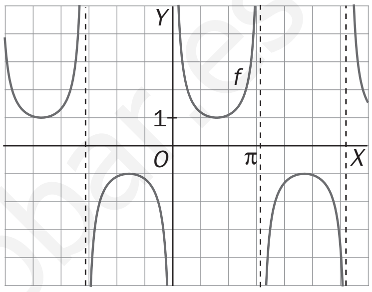
III. Asíntotas verticales. La función tiene asíntotas verticales en aquellos puntos donde se anula el denominador, es decir, las asíntotas verticales son de la forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

IV. El período de la función $f(x)$ es 2π.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. La derivada es $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$. Como la función es periódica de período 2π, la estudiaremos solo en el intervalo $(0, 2\pi)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

En $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $f'(x)$ es negativa; por tanto, $f(x)$ es decreciente en estos intervalos.

En $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, $f'(x)$ es positiva; por tanto, $f(x)$ es creciente.



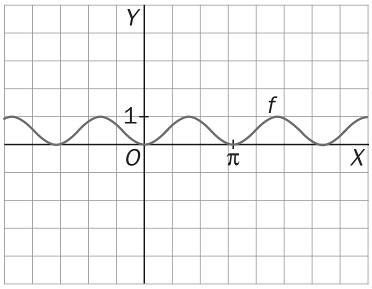
El máximo absoluto está en el punto $x = \dfrac{3\pi}{2}$, y el mínimo, en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{2\cos^2 x}{\text{sen}^3 x} + \frac{1}{\text{sen}x}.$$

En el intervalo $(0, \pi)$, $f''(x) > 0$, luego $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo y $f''(x) < 0$ en $(\pi, 2\pi)$ luego $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

8.25. Representa la gráfica de $f(x) = \text{sen}^2 x$.



I. Dominio: $\mathbf{R}$

II. La gráfica corta el eje en los puntos $(k\pi, 0)$ con $k \in \mathbf{Z}$.

III. La función no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

IV. El período de la función $f(x)$ es π.

V. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

La función tiene máximos en los puntos de la forma $\left(\dfrac{2k+1}{2}\pi, 1\right)$ y mínimos en los puntos de la forma $(k\pi, 0)$ donde $k \in \mathbf{Z}$.

8.26. Las funciones de oferta (*O*) y demanda (*D*) en función del precio de un producto son:

$$O(p) = 2p - 10 \;\text{ y }\; D(p) = \frac{2800}{p}.$$

a) Encuentra el punto de equilibrio y da el precio y el número de unidades correspondientes.

b) Dibuja la gráfica de las funciones de oferta y demanda.

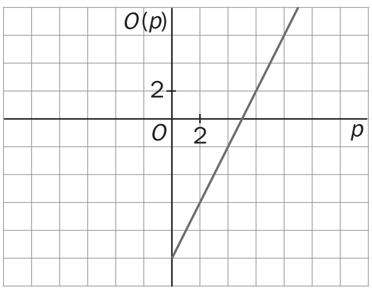
c) ¿Dónde corta la gráfica de la oferta el eje de abscisas? Explica qué significado económico tiene ese punto.

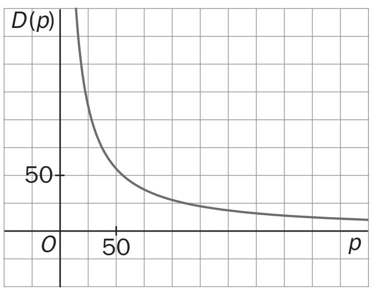
a) El punto de equilibrio se establece cuando $O(p) = D(p)$, es decir, $2p - 10 = \dfrac{2800}{p} \Rightarrow 2p^2 - 10p - 2800 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 40$ y $p = -35$ (este último resultado no tendría significado en este problema).

Luego el precio del producto sería $p = 40$ y $O(40) = 2 \cdot 40 - 10 = 70$ y $D(40) = \dfrac{2800}{40} = 70$.

b) $O(p) = 2p - 10$ $\qquad$ $D(p) = \dfrac{2800}{p}$





c) La gráfica $O(p)$ corta al eje de abscisas en el punto $x = 5$; esto quiere decir que si el precio del producto es menor que 5, no hay oferta; si el precio es 5, la oferta es nula, y si es mayor que 5, la oferta es positiva.

8.27. (PAU) El tipo de interés anual, $I(t)$ en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo, t, en años, que se esté dispuesto a mantener la inversión a través de la expresión $I(t)=\frac{90t}{t^2+9}$.

a) Calcula razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.

b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.

a) Para optimizar el tipo de interés hay que buscar el máximo de la función $I(t)$.

$I'(t)=\frac{90(9-t^2)}{(t^2+9)^2}=0 \Rightarrow t=-3$ y $t=3$ (en este problema, $t=-3$ no tiene sentido). Para $t=3$, la función $I(t)$ tiene un máximo, luego al inversor le conviene pactar 3 años.

b) $\lim_{t\to+\infty}\frac{90t}{t^2+9}=0$, luego el tipo de interés no podría llegar a ser nunca negativo porque a muy largo plazo el límite tiende a 0 y $I(t)$ es positiva para todo $t>0$

EJERCICIOS

Dominio y recorrido

8.28. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ **c)** $f(x)=\ln\left(x^2-2x-8\right)$ **e)** $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ **g)** $f(x)=\frac{\sqrt{x^3+x^2-6x}}{x^2-1}$

b) $f(x)=x-\sqrt{3-2x}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ **f)** $f(x)=\frac{x}{\text{sen}\, x}$ **h)** $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) El denominador se hace cero si $x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$. Así pues, $D(f)=\mathbf{R}-\{0\}$.

b) El radicando es positivo o cero si $3-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq\frac{3}{2}$. Así pues, $D(f)=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$.

c) El logaritmo neperiano sólo está definido para valores positivos. $x^2-2x-8>0 \Rightarrow (x+2)(x-4)>0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$.

d) El radicando es positivo o cero si $\frac{x+3}{x-2}\geq 0$

Estudiemos el signo:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3, 2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f	+	= 0	–	$\notin D(f)$	+

Así pues, $D(f)=(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$.

e) $D(f)=\mathbf{R}-\{1\}$, ya que $x=1$ anula el denominador del exponente.

f) $D(f)=\mathbf{R}-\{k\pi\}$, $k=0, \pm 1, \pm 2\ldots$, ya que el seno se anula para los valores $k\pi$, con k entero.

g) El denominador se anula si $x=-1$ o $x=1$. El numerador se anula si $x^3+x^2-6x=0 \Rightarrow x(x+3)(x-2)=0$, es decir, si $x=0$, $x=-3$, $x=2$. Estudiemos el signo de f:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2,+\infty)$
Signo de f	$\notin D(f)$	= 0	+	$\notin D(f)$	–	= 0	$\notin D(f)$	$\notin D(f)$	$\notin D(f)$	= 0	+

Así pues, $D(f)=[-3,-1)\cup(-1,0]\cup[2,+\infty)$.

h) El denominador se anula si $x=2$; así pues, $D(f)=\mathbf{R}-\{2\}$.

Cortes con los ejes, signo, simetrías y periodicidad

8.29. Halla los cortes con los ejes de las funciones:

a) $f(x) = x\ln x$ **b)** $f(x) = |2x - 10| - |2 - x|$

a) $D(f) = (0, +\infty)$. Corte con X: $f(x) = 0 \Rightarrow x\ln x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(f), \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.
El único punto de corte con el eje X es (1, 0).
No corta el eje Y porque x = 0 no pertenece al dominio.

b) Corte con X, $f(x)$ = 0 si $2x$ – 10 = 2 – x o si $2x$ – 10= –2 + x, es decir, si x = 4 o si x = 8. Los puntos de corte con el eje X son A(4, 0) y B(8, 0). Corte con Y: C(0, f(0)) = C(0, 8).

8.30. Estudia el signo de la función $f(x) = (2x - 6)(x + 1)(x^2 + 3)$ **.**

La función se anula si x = 3 o x = –1. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	–1	(–1, 3)	3	$(3, +\infty)$
Signo de f	+	= 0	–	= 0	+

Así pues, f es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, negativa en (–1, 3) y nula en x = –1 y en x = 3.

Ramas infinitas. Asíntotas

8.31. (PAU) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$ **:**

a) Especifica su dominio de definición.
b) Estudia su continuidad.
c) Calcula sus asíntotas si las hubiera.

a) El denominador se anula si x = 1 o x = 2; así pues, $D(f)$ = **R** – {1, 2}.

b) La función es continua si x es distinto de 1 y de 2, es decir, es continua en su dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

c) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{(x-2)} = -1$; por tanto, no hay asíntota vertical en x = 1.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$; por tanto, la recta x = 2 es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1$

La recta y = 1 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

8.32. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones, estudia el comportamiento de la función con respecto a sus asíntotas e interpreta gráficamente:

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-2x^2-3x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$

a) Asíntotas verticales:

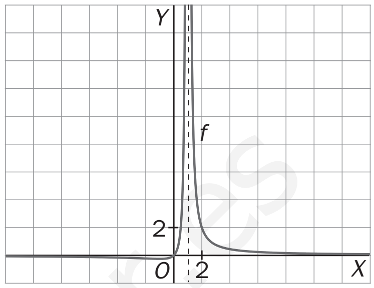
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta x = 1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{(x-1)^2}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$.

La recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.



b) Asíntotas verticales:

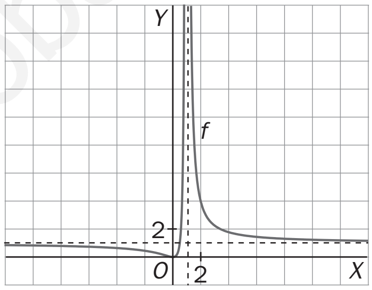
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta x = 1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

La recta y = 1 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.



c) Asíntotas verticales:

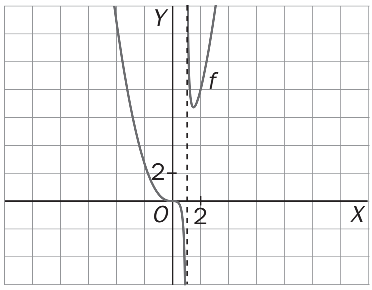
$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x-1}=-\infty$; por tanto, la recta x = 1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x-1}=+\infty$ .No tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.



d) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$; por tanto, la recta x = 1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$.

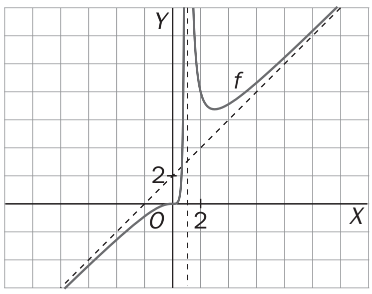
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$

Asíntotas oblicuas:

Si dividimos, $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}=x+2+\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}$.

La recta y = x + 2 es una asíntota oblicua.



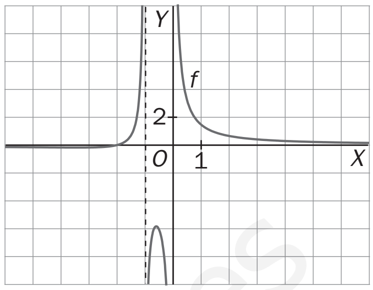
e) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-2x^2-3x}=\dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x-3)}$

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$; por tanto, la recta x = –1 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$; por tanto, la recta x = 0 es una asíntota vertical. Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{5}{12}$. No hay asíntota vertical en x = 3.



Asíntotas horizontales:

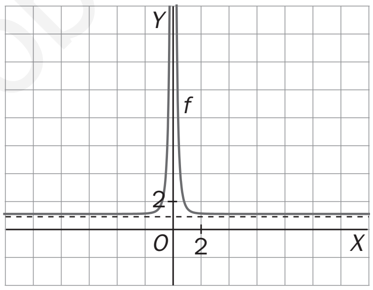
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. La recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

f) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$; por tanto, la recta x = 0 es una asíntota vertical.

Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.



Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=1$.

La recta y = 1 es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

Las derivadas. Monotonía y curvatura

8.33. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x^4}$.

La derivada es $f'(x)=\dfrac{(x-4)e^x}{x^5}$, que se anula si x = 4. Estudiemos su signo sin olvidarnos de x = 0, que no pertenece al dominio:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 4)	4	$(4, +\infty)$
Signo de f'	+	$\notin D(f)$	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, 0)\cup(4, +\infty)$ y decreciente en (0, 4).

Tiene un mínimo relativo en el punto $A\left(4, \dfrac{e^4}{256}\right)$.

8.34. Estudia la curvatura de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = xe^x$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$. La segunda derivada se anula si $x = \frac{1}{2}$. A su izquierda es negativa, y a su derecha, positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. El punto $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el punto de inflexión.

b) $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x$. La segunda derivada se anula si $x = -2$. A su izquierda es negativa, y a su derecha, positiva. Por tanto, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$. El punto $A\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ es el punto de inflexión.

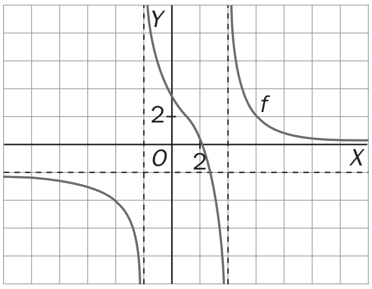
Estudio completo de funciones. Representación gráfica

8.35. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:

- **Las rectas $x = -2$, $x = 4$, $y = -2$ son sus únicas asíntotas.**
- **Su derivada no se anula nunca y es negativa en todos los puntos en que está definida.**

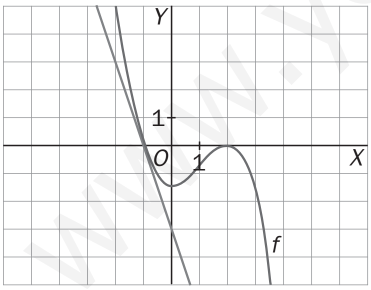
a) ¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?

b) ¿Puede la derivada segunda no anularse nunca?



a) La función se anula una sola vez, entre $x = -2$ y $x = 4$.
b) La derivada segunda se anula una vez, entre $x = -2$ y $x = 4$.

8.36. (PAU) La curva $y = f(x)$ de la figura tiene como dominio el conjunto de todos los números reales.



a) Determina los puntos donde la función vale 0. Determina los valores de x para los que la función es positiva.

b) Di en qué puntos se anula la derivada y en qué puntos $f'(x) < 0$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

d) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$.

e) Determina a sabiendo que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.

a) En $x = -1$ y en $x = 2$, la función vale cero: $f(-1) = f(2) = 0$. La función es positiva en $(-\infty, -1)$.

b) La derivada se anula en los puntos con tangente horizontal, $x = 0$ y $x = 2$: $f'(0) = f'(2) = 0$. La derivada es negativa si la función decrece, es decir, en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) En $x = 2$, la tangente es horizontal y pasa por el punto $A(2, f(2)) = A(2, 0)$. La recta tangente es $y = 0$.

d) En $x = -1$, la pendiente de la recta tangente es $\frac{6}{-2} = -3$.

Como la recta pasa por el punto $B(-1, f(-1)) = B(-1, 0)$, la ecuación de la tangente es $y = -3x - 3$.

e) Como en la gráfica no se aprecia con exactitud la ordenada de los puntos, salvo en $x = -1$ y en $x = 2$, utilizaremos su derivada. La derivada de $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$ es $f'(x) = a\,((x - 2)^2 + 2(x + 1)(x - 2))$.

Como $f'(-1) = -3$, entonces: $-3 = f'(-1) = a\,((-1 - 2)^2 + 2(-1 + 1)(-1 - 2)) = 9a$, de donde $a = -\frac{1}{3}$.

Estudio de funciones polinómicas

8.37. (PAU) Se considera la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

a) Halla sus máximos y mínimos.
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 6(x^2 - 7x + 10) = 6(x - 2)(x - 5)$, que se anula si $x = 2$ o si $x = 5$.

Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 2)$	2	(2, 5)	5	$(5, +\infty)$
Signo de f'	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2)) = A(2, 20)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $B(5, f(5)) = B(5, -7)$.

b) La función es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en (2, 5).

8.38. Sea f una función tal que $f'(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$. Obtén las abscisas de los extremos relativos de f, decidiendo qué son.

La derivada se anula para $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Estudiemos cómo varía el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores para dilucidar:

x	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	(3, 5)	5	$(5, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Así pues, en $x = 1$ y en $x = 5$, la función presenta mínimos relativos. En $x = 3$ hay un máximo relativo.

8.39. (PAU) Considera la función: $G(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Dibuja la gráfica.

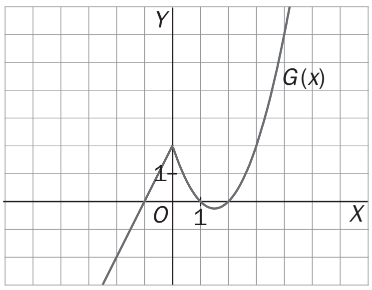
b) Estudia la continuidad.

c) Determina los extremos relativos.

a) El primer tramo es una semirrecta creciente que pasa por los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 2)$.
El segundo tramo corresponde a una parábola cóncava hacia arriba, que corta al eje X en los puntos $C(1, 0)$ y $D(2, 0)$.

Su vértice es el punto $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Además, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2$. La gráfica es:



b) Observando la gráfica podemos asegurar que la función es continua.
Como intervienen una semirrecta y un trozo de parábola, solo queda estudiar qué ocurre en el punto de solapamiento, $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 2) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2$, $f(0) = 2$.

Podemos afirmar que la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en todo **R**.

c) Tiene dos extremos relativos, un máximo relativo en el punto de solapamiento $B(0, 2)$ y un mínimo relativo en el vértice de la parábola $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Estudio de funciones racionales

8.40. (PAU) Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

a) Calcula su dominio y asíntotas.
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Haz su representación gráfica aproximada.

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{-1\}$. El denominador se anula si $x = -1$.
Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$; por tanto, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

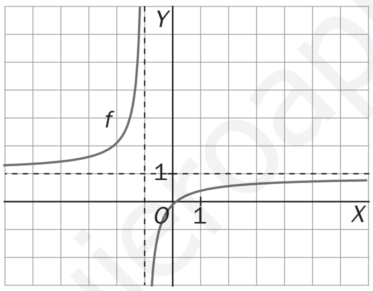
Además, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

b) La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, que no se anula nunca y es siempre positiva; por tanto, la función es creciente en todo su dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. No tiene extremos relativos.

c) La gráfica es:



8.41. (PAU) Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

I. Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. El denominador se anula si $x = 2$.
II. Corte con los ejes. Corta los ejes X e Y en el punto $O(0, 0)$.
III. Asíntotas verticales. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$; por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$.

IV. Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función por ambos lados.

V. Información de la primera derivada. $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-2)^3}$. La derivada se anula si $x = 0$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 2)	2	$(2, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	$\notin D(f)$	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente		Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en (0, 2). Tiene un mínimo relativo en $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

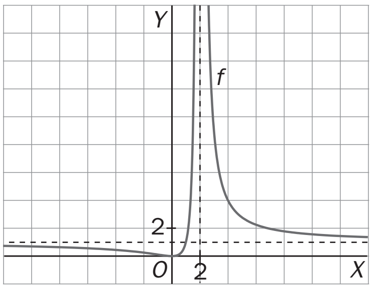
VI. Información extraída de la segunda derivada. $f''(x) = \dfrac{8(x+1)}{(x-2)^4}$. La segunda derivada se anula si $x = -1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de f''	$-$	$= 0$	$+$	$\notin D(f)$	$+$
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba		Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y cóncava hacia arriba en $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

El punto $A(-1, f(-1)) = A\left(-1, \dfrac{1}{9}\right)$ es un punto de inflexión.

VII. Gráfica de la función.



8.42. (PAU) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

Se pide:
a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.
b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, si los hay.
d) Representación gráfica aproximada.

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$. El denominador se anula si $x = -2$ o si $x = 2$.
Corte con los ejes. Corta los ejes X e Y en el punto $O(0, 0)$.
Simetrías. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$. Es simétrica respecto del origen.

b) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x}{(x+2)(x-2)} = -\infty$; por tanto, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Además, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x}{(x+2)(x-2)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{(x+2)(x-2)} = -\infty$; por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función por ambos lados.

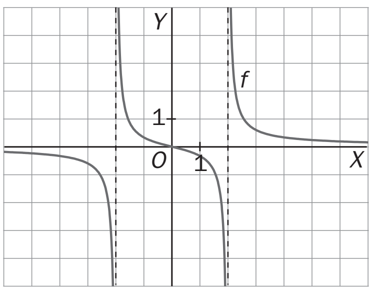
Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

Estudiemos el signo de la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Signo de f	$-$	$\notin D(f)$	$+$	$= 0$	$-$	$\notin D(f)$	$+$

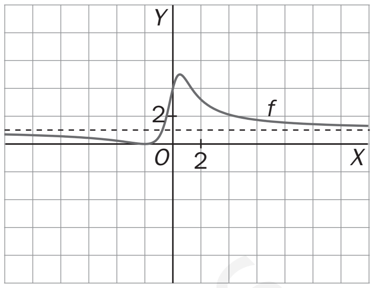
c) La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{-(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$. Esta derivada no se anula nunca y, además, es siempre negativa donde está definida; por tanto, la función no tiene extremos relativos y es decreciente en todo su dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

d) Gráfica de la función:



8.43. (PAU) Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 1}$.

Halla el dominio de definición, los puntos de corte con los ejes, las posibles asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles máximos y mínimos. Haz luego un esquema sencillo de la gráfica de dicha función.



I. Dominio. $D(f) = \mathbf{R}$. El denominador no se anula nunca.

II. Corte con los ejes. La función $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1} = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$

corta al eje X en el punto $A(-2, 0)$ y al eje Y en el punto $B(0, 4)$.

III. Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+1} = 1$.

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Asíntotas oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas.

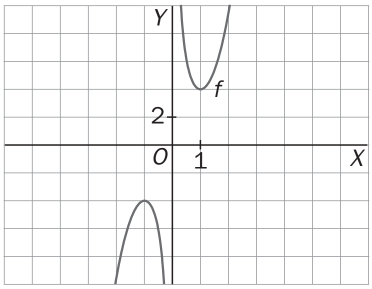
IV. Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. $f'(x) = \dfrac{2(x+2)(1-2x)}{(x^2+1)^2}$, que se anula si $x = -2$ o si $x = \dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de f'	$-$	$= 0$	$+$	$= 0$	$-$
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y creciente en $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$. Tiene un mínimo relativo (que es absoluto) en el punto $A(-2, 0)$ y un máximo relativo (que también es absoluto) en $C\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = C\left(\dfrac{1}{2}, 5\right)$.

8.44. (PAU) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) Estudia su curvatura y sus posibles puntos de inflexión.



a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$. El denominador se anula si $x = 0$.

Corte con los ejes. La función no se anula nunca, ya que $x^4 + 3 > 0$. Así pues, no corta el eje X. Tampoco corta el eje Y, ya que $x = 0$ no está en el domino de la función.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty$; por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Además, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3}{x} = +\infty$. Así pues, no tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas, ya que el grado del numerador no es una unidad mayor que el del denominador.

b) La derivada es $f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$. Se anula si $x = -1$ o si $x = 1$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
Signo de f'	$+$	$= 0$	$-$	$\notin D(f)$	$-$		$+$
Comportamiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente		Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1, f(-1)) = A(-1, -4)$ y un mínimo relativo en $B(1, f(1)) = B(1, 4)$.

c) La segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$ y no se anula nunca, por lo que no tiene puntos de inflexión.

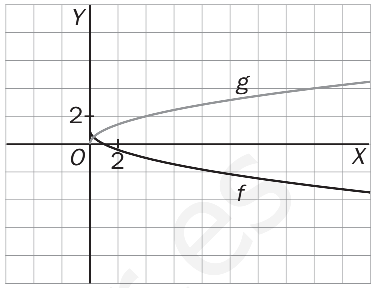
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
Signo de f''	$-$	$\notin D(f)$	$+$
Comportamiento de f	Cóncava hacia abajo		Cóncava hacia arriba

Estudio de funciones con radicales

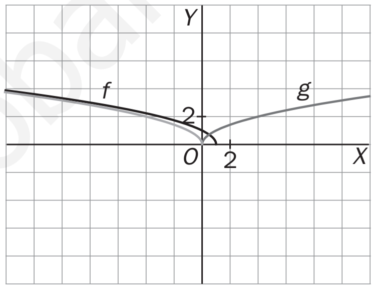
8.45. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1-x}$ **c)** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

a) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x}$ sin más que reflejarla mediante una simetría respecto al eje X y después desplazarla verticalmente una unidad hacia arriba.
Así pues, $D(f) = [0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.
Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.

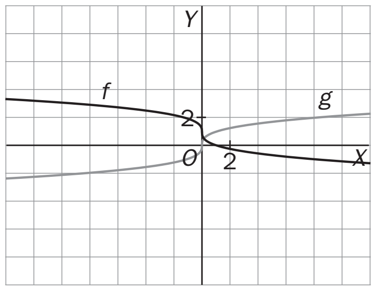


b) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Primero dibujamos su simétrica respecto del eje Y y luego la trasladamos horizontalmente una unidad hacia la derecha.
Así pues, $D(f) = (-\infty, 1]$. La función es continua en su dominio.
Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.

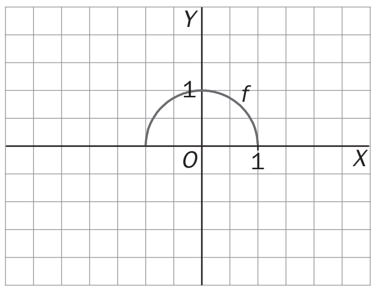


c) Primero dibujamos la gráfica de $g(x) = \sqrt[3]{x}$. A continuación dibujamos su simétrica respecto del eje Y y luego la desplazamos verticalmente una unidad hacia arriba. Así pues, $D(f)$ = **R**. La función es continua en su dominio.

Es siempre decreciente. Corta los ejes en los puntos $A(0, 1)$ y $B(1, 0)$.



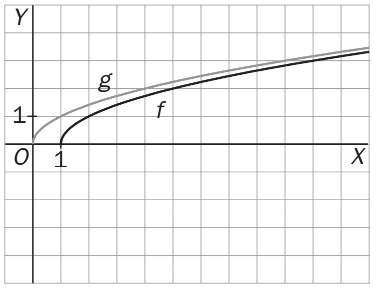
d) I. Dominio. Resolviendo la inecuación $1 - x^2 \geq 0$, $D(f) = [-1, 1]$.
II. Cortes con los ejes: Corta los ejes en los puntos $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, 1)$. La función es simétrica respecto al eje Y.
III. Asíntotas verticales: La función no tiene asíntotas verticales.
IV. Comportamiento en el infinito: No tiene sentido estudiarlo.
V. Crecimiento y decrecimiento: Máximos y mínimos.
La derivada en $(-1, 1)$ es $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, que se anula en $x = 0$.
A su izquierda es positiva, y a su derecha, negativa. Así pues, la función es creciente en $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$. El punto $C(0, 1)$ es un máximo relativo y también absoluto.



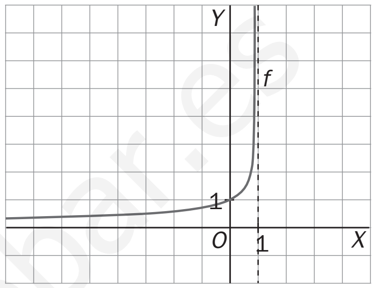
VI. Curvatura y puntos de inflexión. La segunda derivada en $(-1, 1)$ es $f''(x) = \dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, que es siempre negativa, luego la función es cóncava hacia abajo.

8.46. Representa las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$



a) La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x}$, sin más que trasladarla horizontalmente una unidad hacia la derecha. Así pues, $D(f) = [1, +\infty)$. La función es continua en su dominio. Es siempre creciente. Corta el eje X en el punto $A(1, 0)$.



b) $D(f) = (-\infty, 1)$. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical, y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Estudio de funciones exponenciales

8.47. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2\left(1-e^x\right)}{1+e^x}$**.**

Para ello, calcula sus asíntotas; demuestra que es simétrica respecto al origen; demuestra que es siempre decreciente; estudia su curvatura y halla su punto de inflexión.

Asíntotas verticales: No tiene porque es continua en todo **R**.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1} = 2$; así pues, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a menos infinito.

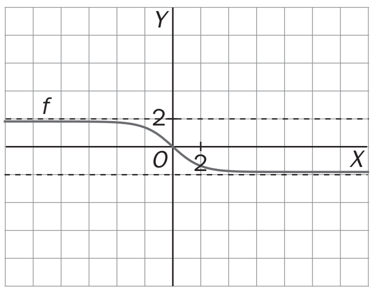
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-2e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{e^x} - \dfrac{2e^x}{e^x}}{\dfrac{1}{e^x} + \dfrac{e^x}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{e^x} - 2}{\dfrac{1}{e^x} + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$; así pues, la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a más infinito.

$$f(-x) = \frac{2-2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2 - \dfrac{2}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}} = \frac{2e^x - 2}{e^x + 1} = -\frac{2-2e^x}{e^x+1} = -f(x).$$

La función es simétrica respecto al origen.

La derivada es $f'(x) = \dfrac{-2e^x(1+e^x) - (2-2e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-2e^x(1+e^x+1-e^x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-4e^x}{(1+e^x)^2}$, que es siempre negativa; por tanto, f es siempre decreciente.

La segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ y se anula si $x = 0$.



A la izquierda de $x = 0$ es negativa y a su derecha es positiva. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $O(0, f(0)) = O(0, 0)$.

La gráfica es la que se muestra.

8.48. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, se pide:

a) Halla su dominio.
b) Demuestra que es siempre positiva.
c) Demuestra que es simétrica respecto al eje *Y*.
d) Realiza un estudio completo de sus posibles asíntotas.
e) Encuentra su máximo y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Encuentra sus puntos de inflexión y estudia su curvatura.
g) Dibuja su gráfica.

a) Dom(f) = **R**.

b) La función es siempre positiva porque se trata de una exponencial.

c) La función es par porque $f(-x) = f(x)$; por tanto, es simétrica respecto al eje Y.

d) No tiene asíntotas verticales ni oblicuas, pero sí horizontales, ya que:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, es decir, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en más infinito como en menos infinito, ya que es simétrica respecto al eje Y.

e) Su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot(-x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = 0$. Para valores negativos de x es positiva, y para valores positivos, negativa. Así pues, f es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

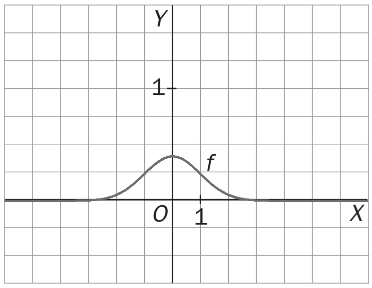
Tiene un máximo relativo (que es también absoluto) en el punto $(0, f(0)) = \left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

f) Su derivada segunda es $f''(x)=\dfrac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x = -1$ y $x = 1$.

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
Signo de f''	+	= 0	–	= 0	+
Comportamiento de f	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

Tiene dos puntos de inflexión en $\left(-1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y en $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$.



g) La gráfica de la función es la que se muestra.
Esta función es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1, $N(0, 1)$, también llamada normal estándar.
Su gráfica se conoce con el nombre de campana de Gauss.

8.49. (PAU) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y los mínimos, de la función $f(x) = x^2e^{-x}$.

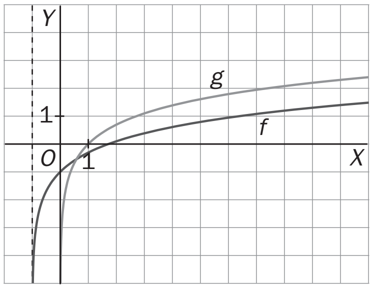
El dominio de la función es todo **R**.
La derivada es $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$. La derivada se anula si $x = 0$ o si $x = 2$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty,\ 0)$	0	(0, 2)	2	$(2,\ +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y creciente en (0, 2).
Tiene un mínimo relativo (que también es absoluto) en el punto $O(0, f(0)) = O(0, 0)$. Tiene un máximo relativo en el punto $A(2, f(2)) = A\left(2,\ \dfrac{4}{e^2}\right)$.

Estudio de funciones logarítmicas

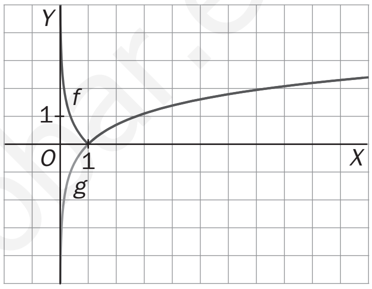
8.50. Representa la función $f(x) = \ln(x + 1) - 1$.



Para representar esta función trasladamos una unidad hacia la izquierda la función $g(x) = \ln x$ y después la desplazamos verticalmente hacia abajo una unidad.
La función es continua y creciente en su dominio, $D(f) = (-1, +\infty)$.

Como $f(x) = \ln(x+1) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x+1) = 1 \Rightarrow x + 1 = e \Rightarrow x = e - 1$, la función corta el eje X en el punto $A(e - 1, 0)$. Corta el eje Y en el punto $B(0, f(0)) = B(0, -1)$.

8.51. Haz un estudio completo y representa la función $f(x) = |\ln x|$.



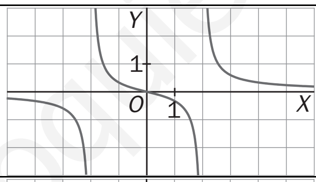
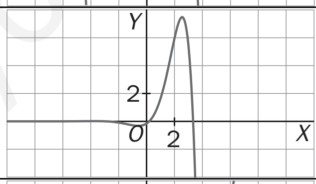
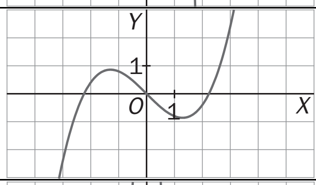
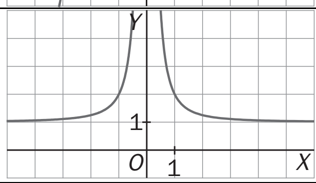
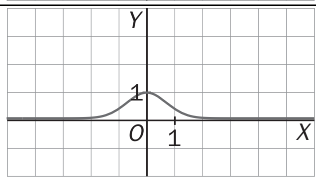
La gráfica de la función $f(x)$ se representa a partir de la gráfica de la función $g(x) = \ln x$ sin más que reflejar su parte negativa mediante una simetría respecto al eje X.
Así pues, $D(f) = (0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.

Es decreciente en (0, 1) y creciente en $(1, +\infty)$.

Tiene un mínimo absoluto en el punto $A(1, 0)$, pero no es un punto con tangente horizontal. La función es cóncava hacia arriba en (0, 1) y cóncava hacia abajo en $(1, +\infty)$.

Síntesis

8.52. Asocia cada función de la izquierda con su correspondiente gráfica de la derecha

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$	
$f(x) = e^{-x^2}$	
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$	
$f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$	
$f(x) = e^x \operatorname{sen} x$	

1.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

2.ª gráfica: $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

3.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x^3}{5} - x$

4.ª gráfica: $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

5.ª gráfica: $f(x) = e^{-x^2}$

8.53. (PAU) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, $R(x)$, en euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta, x, en euros (para $x \geq 10$), por medio de la siguiente expresión: $R(x) = -0{,}1x^2 + 50x + 250$.

a) Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b) ¿Qué rentabilidad obtendría?

a) Debemos hallar el máximo de $R(x)$ siendo $x \geq 10$.
La derivada es $R'(x) = -0{,}2x + 50$, que se anula si $x = 250$. Para este valor se consigue el máximo rendimiento, ya que la gráfica de $R(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo.
Es decir, si se invierten 250 euros, se obtiene el rendimiento máximo.

b) $R(250) = 6500$. Se obtiene una rentabilidad de 6500 euros.

8.54. (PAU) La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento de esta función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

a) La función es continua, ya que $\lim\limits_{x\to 15^-} \dfrac{x}{3} = \lim\limits_{x\to 15^-} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = f(15) = 5$.

Por otra parte, el primer tramo de la función es creciente, ya que se trata de una recta de pendiente positiva.

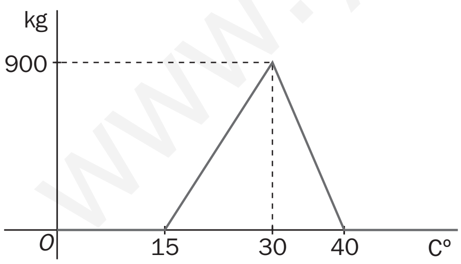
La derivada del segundo tramo, $f(x) = \dfrac{2x}{0{,}2x+3}$, es $f'(x) = \dfrac{6}{(0{,}2x+3)^2}$, que es siempre positiva. Así pues, en este tramo la función también es creciente. Como $G(x)$ es continua, concluimos que es creciente en todo su dominio.

Si $x < 15$, $G(x) = \dfrac{x}{3} < \dfrac{15}{3} = 5$, es decir, nunca llegará a 5 si estudia menos de 15 horas.

b) Veamos si es posible: como $G(x)$ es creciente, estudiaremos el límite en el infinito $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{0{,}2x+3} = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$.

Es decir, por muchas horas de preparación, jamás se conseguirá una nota de 10.

8.55. (PAU) Un invernadero está destinado al cultivo de tomates. Se sabe que las tomateras solo producen frutos si la temperatura dentro del invernadero está entre 15 ºC y 40 ºC.
En la siguiente gráfica se muestra la producción de tomates en kilogramos, según la temperatura que se mantiene en el invernadero.



a) Si la temperatura está entre 15 ºC y 29 ºC, di qué variación experimenta la producción al aumentar la temperatura 1 ºC. Calcula dicha variación cuando la temperatura está entre 30 ºC y 39 ºC.

b) Define una función a trozos que exprese la producción según la temperatura.

c) Halla las temperaturas para las que se obtiene el 75% de la producción máxima.

a) La variación la da la pendiente de la recta. En el primer caso, entre 15º y 29º, la recta tiene igual pendiente que la recta que une los puntos de abscisas 15º y 30º: $m_1 = \dfrac{900-0}{30-15} = 60$. Entre 30º y 39º, la recta tiene igual pendiente que la recta que une los puntos de abscisas 30º y 40º: $m_1 = \dfrac{0-900}{40-30} = -90$.

b) Como ya conocemos las pendientes de las rectas, resulta: $f(x) = \begin{cases} 60x - 900 & \text{si } 15 \leq x \leq 30 \\ -90x + 3600 & \text{si } 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$

c) La producción máxima es de 900 kg, y su 75% es 675.
Si $15 \leq x \leq 30$, $60x - 900 = 675$, lo que implica que $x = 26{,}25$º.
Si $30 \leq x \leq 40$, $-90x + 3600 = 675$, lo que implica que $x = 32{,}5$º.
Así pues, a 26,25º y a 32,5º se consigue el 75% de la producción máxima.

8.56. (PAU) La producción de cierta hortaliza en un invernadero, $Q(x)$ en kg, depende de la temperatura, x, en ºC, según la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2 (32 - x)$.

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

a) La función es $Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$ y su derivada es $Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 3(x + 1)(21 - x)$, que se anula si $x = -1$ o $x = 21$. Estudiemos su signo:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 21)$	21	$(21, +\infty)$
Signo de f'	–	= 0	+	= 0	–
Comportamiento de f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

Como es natural, suponemos que la temperatura debe ser superior a 0º y, por tanto, la temperatura que asegura la máxima producción es de 21º.

b) $Q(21) = 5324$. Es decir, se producirían 5324 kg de hortalizas.

8.57. (PAU) En un trabajo de investigación sobre el rendimiento (en una escala de 0 a 100) durante 24 horas de funcionamiento de cierta válvula, unos ingenieros industriales han comprobado que dicho rendimiento se comporta de acuerdo con la siguiente función:

$$R(t) = \frac{(30 - t)(t + 10)}{4}; \quad 0 \le t \le 24$$

a) ¿Cuánto debe estar funcionando la válvula para conseguir su máximo rendimiento? Justifica la respuesta.

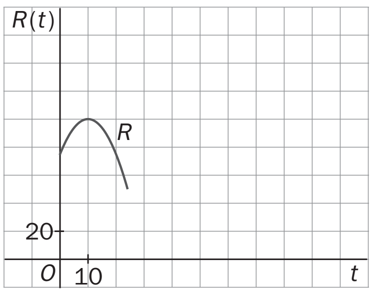
b) Representa y comenta la función.

a) La gráfica de la función es una parábola cóncava hacia abajo que tiene su máximo en su vértice. Así pues, este será el máximo si su abscisa pertenece al dominio.

La función rendimiento es $R(t) = \frac{(30-t)(t+10)}{4} = \frac{-t^2 + 20t + 300}{4}$; su derivada es

$R'(t) = \frac{-2t + 20}{4} = \frac{-t + 10}{2}$, que se anula si $t = 10$. Como $t = 10$ pertenece al dominio, podemos afirmar que el máximo rendimiento se alcanza a las 10 horas de funcionamiento de la válvula.

b) El vértice de la parábola es el punto $V(10, R(10)) = V(10, 100)$.
La gráfica es la que se muestra.



La máquina empieza con un rendimiento del 75% (el punto de corte con Y es $A(0, 75)$) y va aumentando hasta conseguir el 100% de rendimiento a las 10 horas.
A partir de ahí va disminuyendo hasta llegar a un rendimiento del 51% ($R(24) = 51$).

PROBLEMAS

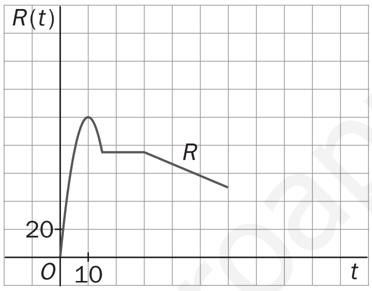
8.58. El rendimiento físico ante determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos viene dado a través de la función

$$\boldsymbol{R(t)=\begin{cases} -t(t-20) & \text{si } 0\le t<15 \\ 75 & \text{si } 15\le t<30 \\ 100-\dfrac{5t}{6} & \text{si } 30\le t\le 60 \end{cases}}$$

a) Representa dicha función.

b) Interpreta la gráfica obtenida.

a) El primer tramo es una parábola cóncava hacia abajo; el segundo es una recta horizontal, y el último es una recta decreciente. Es importante calcular los puntos de los extremos de los intervalos y, en su caso, el límite. También calculamos el vértice de la parábola: $V(10, 100)$
La gráfica es la que se muestra.



b) El rendimiento físico va aumentando hasta llegar a su máximo, que se alcanza en el vértice de la parábola, $V(10, 100)$
Así, a los 10 minutos se consigue el 100% de rendimiento. Después decrece hasta llegar a los 15 minutos, que se mantiene estable en un 75% hasta llegar a los 30 minutos, y a partir de aquí decrece paulatinamente hasta llegar al 50%, al final del esfuerzo, a los 60 minutos.

8.59. (PAU) Un importador de caviar estima que si vende el kilogramo de caviar a *x* euros, entonces su beneficio por Kilogramo viene dado por la función $\boldsymbol{B(x)=160x-x^2-6300}$.

a) Indica entre qué precios obtiene beneficios el importador.

b) Calcula a qué precio debe vender el kilo de caviar para obtener un beneficio máximo.

c) Calcula el beneficio máximo por kilo.

a) La función $B(x)=160x-x^2-6300$ corta el eje *X* en los puntos $A(70, 0)$ y $B(90, 0)$. Como la función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, será positiva entre $x = 70$ y $x = 90$. Así pues, se obtienen beneficios si el precio de venta del kilo de caviar está comprendido entre 70 y 90 euros.

b) La función beneficio es una parábola cóncava hacia abajo, por lo que el máximo se encuentra en su vértice, cuya abscisa es el valor que anula la derivada, $B'(x)=160-2x=0\Rightarrow x=80$. Si vende el kilo de caviar a 80 euros, obtiene el beneficio máximo.

c) $B(80) = 100$. Es decir, el beneficio máximo por kilo es de 100 euros.

8.60. (PAU) Las ganancias de una empresa, en miles de euros, se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x > 0$.

a) Representa gráficamente la función $y = f(x)$ para $x \in (-\infty, +\infty)$, indicando: dominio, corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y decrecimiento.

b) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas?

c) A medida que transcurre el tiempo, ¿están limitados sus beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

a) Dominio. $D(f) = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$. El denominador se anula si $x = -\dfrac{5}{2}$.

Corte con los ejes. Corta el eje Y en el punto $A(0, f(0)) = A(0, -20)$ y el eje X en el punto $B(2, 0)$.

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^-} \dfrac{50x-100}{2x+5} = +\infty$; por tanto, la recta $x = -\dfrac{5}{2}$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

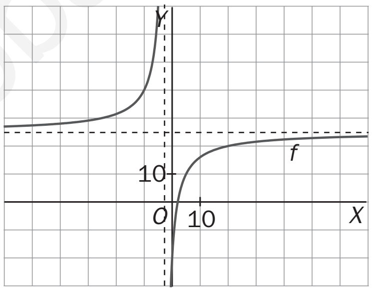
Además, $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{2}^+} \dfrac{50x-100}{2x+5} = -\infty$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25$.

La recta $y = 25$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

Crecimiento y decrecimiento. La derivada es $f'(x)=\dfrac{450}{(2x+5)^2}$, que no se anula nunca y es siempre positiva; por tanto, la función es creciente en todo su dominio: $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

No tiene extremos relativos.



b) La empresa deja de tener pérdidas a partir del segundo año; a partir de $x = 2$, la función es positiva.

c) Los beneficios están limitados por 25 000 euros, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{50x-100}{2x+5} = 25$.

8.61. (PAU) La capacidad de concentración de una atleta de sato de altura en una competición de 3 horas de duración viene dada por la función $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$ dada por $f(t) = 300t(3 - t)$, donde t mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

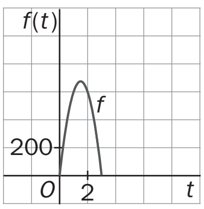
b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

c) Representa gráficamente la función de capacidad de concentración.

a) $f'(t) = 300\,(3 - t) - 300t = -600t + 900$, se anula si $t = \dfrac{3}{2}$. Así pues, en $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, $f'(t) > 0$, por lo que la capacidad de concentración, $f\,t)$, aumenta, mientras que en $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$, $f'(t) < 0$, la capacidad de concentración disminuye. $f(t) = 0$ si $t = 0$ o si $t = 3$, o sea, al comenzar y al terminar la competición.

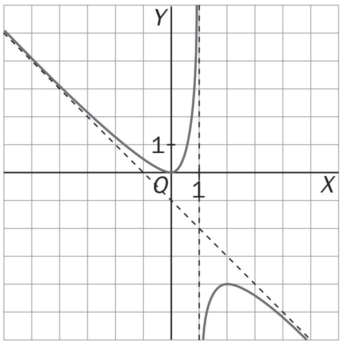
b) El instante en el que la capacidad de concentración es máxima, que es en $t = \dfrac{3}{2}$, máximo de f en [0, 3].

c)



PROFUNDIZACIÓN

8.62. La curva de la figura representa la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$. Obtén los números reales *a, b, c, d, e.*



Como $f(0) = 0$, $c = 0$. Y como la recta $x = 1$ es una asíntota vertical, el denominador se anula para $x = 1$ y por tanto, $d = -e$. Así pues, $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{dx-d}=\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{ax^2+bx}{x-1}=\dfrac{1}{d}\left(ax+a+b+\dfrac{a+b}{x-1}\right)$, con lo que la recta

$y=\dfrac{1}{d}(ax+a+b)$ es asíntota oblicua, que, al observar el dibujo, vemos que debe ser la recta $y = -x - 1$, por lo que $\dfrac{a}{d}=-1$ y $\dfrac{a+b}{d}=-1$, es decir, $b = 0$ y $d = -a$. La función será, por tanto, $f(x)=\dfrac{ax^2}{a-ax}=\dfrac{x^2}{1-x}$, pues, evidentemente, a no puede ser 0.

8.63. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ obteniendo previamente sus elementos más significativos y comprueba que alcanza el máximo absoluto en el punto de abscisa *e*. A la vista de la gráfica, ¿qué es mayor: $\dfrac{1}{e}$ o $\dfrac{\ln\pi}{\pi}$? Deduce que $e^{\pi}>\pi^{e}$.

La gráfica de f corta el eje de ordenadas si $f(x) = 0$, es decir, si $\ln x = 0$, o sea, si $x = 1$.

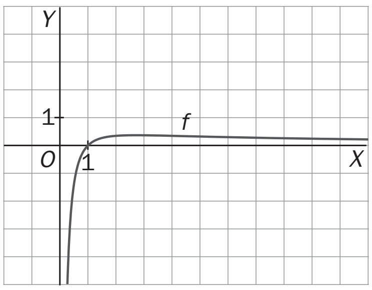
Por otra parte, solo está definida en $(0, +\infty)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Como $f'(x)=\dfrac{x\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ solo si $x = e$, ya podemos esbozar su gráfica.

Así pues, la función es decreciente en $(e, +\infty)$, o sea, $f(e) > f(\pi)$, es decir,

$\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi\ln e > e\ln\pi \Leftrightarrow \ln e^{\pi} > \ln \pi^{e}$, y como la función logaritmo es creciente, concluimos que $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Nota: Una extensión curiosa de este resultado es decidir qué es mayor, a^b o b^a si $0 < a < b$. El mismo argumento que hemos utilizado lleva a afirmar que si $0 < a < b \le e$, entonces $a^b < b^a$, y si $e \le a < b$, entonces $a^b > b^a$.



8.64. Sea f : R → R continua, cociente de polinomios, y tal que admite como asíntota a la recta $y = x - 1$. Algunas de las siguientes afirmaciones son verdaderas y otras falsas. Justifica cómo es cada una.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) Existe $a \geq 0$ tal que para todo $x \geq a$ se verifica que $f(x) \geq 5$.

d) Existe $b \geq 0$ tal que para todo $x \geq b$ se verifica que $f(x) \leq 5$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$

a) Verdadera: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$

b) Verdadera: $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

c) Verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d) Falsa, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

e) Falsa: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = -1$

8.65. Sea f una función definida en R, decreciente en (–∞, 0), creciente en (0, +∞) con $f(0) = 1$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones podrían ser una fórmula para f ?

a) $f(x) = |x| + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

d) $f(x) = \ln(x^2+1) + 1$

e) $f(x) = e^x - x$

En primer lugar se observa que todas estas funciones cumplen que $f(0) = 1$. Estudiemos su monotonía.

a) Para estudiar su monotonía, definimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Su derivada para x distinto de cero es $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Por tanto, f es decreciente en (–∞, 0) y creciente en (0, +∞). Sí es una fórmula para f.

b) $f(0) = 1$. Para estudiar su monotonía, definimos la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{-x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Su derivada para x distinto de cero es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x^2-2x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x > 0$, la derivada se anula si $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1, \quad x = -\sqrt{2} - 1$. Estudiando el signo de la derivada se observa que si $x \in (0, \sqrt{2} - 1)$, la derivada es negativa, y, por tanto, la función f es decreciente. Así pues, f no es creciente en (0, +∞).

c) La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, que es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en (–∞, 0) y creciente en (0, +∞). Sí es una fórmula para f.

d) La derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, que es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en (–∞, 0) y creciente en (0, +∞). Sí es una fórmula para f.

e) La derivada es $f'(x) = e^x - 1$, que se anula si $x = 0$. Esta derivada es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, f es decreciente en (–∞, 0) y creciente en (0, +∞). Sí es una fórmula para f.

8.66. Considera la función f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x| + 1 + \dfrac{\ln|x|}{x^2}$. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

b) Para todo $x > 0$, es $f(x) \geq 0$.

c) El eje de ordenadas es eje de simetría de la gráfica de f.

d) La gráfica de f admite como asíntota la recta $y = x + 1$.

e) La gráfica de f admite como asíntota la recta $y = -x + 1$.

a) Verdadera. Si $x > 0$, la función está definida por $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

Para valores muy grandes de x, todos los sumandos de la expresión $f(x)$ son positivos.

b) Falsa. Por ejemplo, si $x = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -1{,}27$.

c) Verdadera. $f(-x) = |-x| + 1 + \dfrac{\ln|-x|}{|-x|^2} = |x| + 1 + \dfrac{\ln|x|}{x^2} = f(x)$

d) Verdadera. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \dfrac{\ln x}{x^2} - (x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ La recta $y = x + 1$ es una asíntota

e) Verdadera. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (-x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x + 1 + \dfrac{\ln(-x)}{x^2} + x - 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{(-x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

8.67. Sea f la función definida por $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$.

a) Calcula el dominio de f y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Prueba que la recta de ecuación $y = 2x + 3$ es asíntota a la gráfica de f en $+\infty$.

c) ¿Es f derivable en 0? ¿Y en 4?

d) Estudia los posibles máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

e) Dibuja las asíntotas y luego la gráfica de f.

a) Como $x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x(x+4) \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$, o $x \geq 0$, entonces, $D(f) = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2+4x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2+4x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - x + \sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1 - x + \sqrt{x^2-4x}\right)\left(1 - x - \sqrt{x^2-4x}\right)}{1 - x - \sqrt{x^2-4x}} = \frac{2}{-1-1} = -1$$

b) Debemos probar que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x+3)\right) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2+4x} - (2x+3)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x} - (x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+4x} + (x+2)\right)}{\sqrt{x^2+4x} + (x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x} + x + 2} = 0.$$

c) La derivada de $f(x)$ para x distinto de 0 y de -4 es $f'(x) = 1 + \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = 1 + \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$.

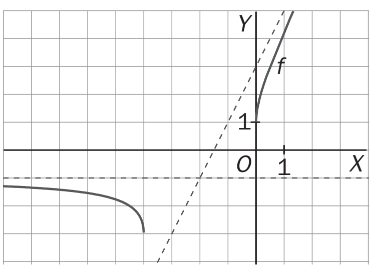
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+}\left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to-4^-} f'(x) = \lim_{x\to-4^-}\left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right) = -\infty$$

Así pues, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, ni en $x = -4$.

d) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal, $y = -1$, cuando x tiende a menos infinito.

Y ya hemos visto que $y = 2x + 3$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f en $+\infty$. Es decreciente en $(-\infty, -4]$ y creciente en $[0, +\infty)$.

e)



8.68. Sea *f* la función definida en $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) *f* es decreciente en $(-\infty, -1]$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x\right) = 1$

d) La recta de ecuación $y = x + 1$ es asíntota en $-\infty$ a la gráfica de *f*.

e) La recta de ecuación $y = x - 1$ es asíntota en $+\infty$ a la gráfica de *f*.

a) Verdadera. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. Para valores de x del intervalo

$(-\infty, -1]$, esta derivada es negativa; así pues, f es decreciente en $(-\infty, -1]$.

b) Falsa. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{-x} = -1$.

c) Verdadera.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-3}+x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \frac{2}{1+1} = 1$$

d) Falsa. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-3}-x-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-3}+x-1\right) = +\infty \neq 0$. Como era de esperar, esta recta no es asíntota, ya que por el apartado anterior deducimos que la recta $y = -x + 1$ es una asíntota oblicua en menos infinito.

e) Verdadera.

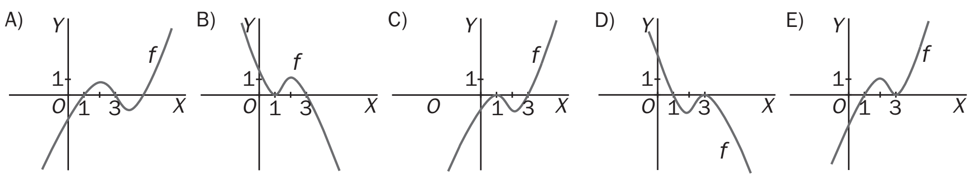
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x-3}-(x-1)\right)\left(\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)\right)}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-3-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+(x-1)} = 0$$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

8.1. La gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-3)^2$ podría ser:



La respuesta correcta es la E.

8.2. Si $f(x)$ es una función polinómica de 4.º grado, su gráfica:

A) Tiene que presentar tres puntos con tangente horizontal.

B) Tiene que tener al menos dos puntos máximos o mínimos relativos.

C) Es seguro que presenta algún punto con tangente horizontal.

D) Cortará al menos una vez el eje horizontal.

E) Pueden no coincidir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

A) Es falsa. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ solo tiene un punto con tangente horizontal: (0, 0).

B) Es falsa. Sirve el mismo contraejemplo que en A, ya que la función $f(x) = x^4$ solo tiene un mínimo: (0, 0).

C) Es verdadera. Como $f'(x)$ es un polinomio de grado tres y signo $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) \neq$ signo $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$, la función pasa de ser creciente a decreciente al menos una vez y, por tanto, tendrá al menos un extremo relativo.

D) Es falsa. Un contraejemplo es $f(x) = x^4 + 4$.

E) Es falsa por ser un polinomio de grado par.

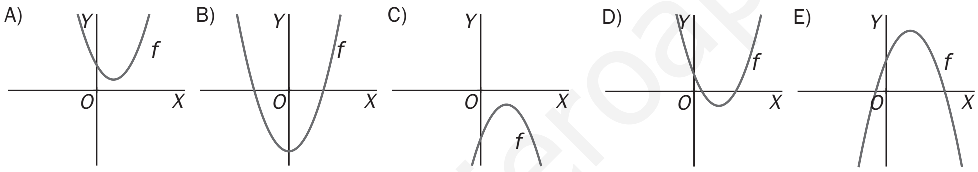
8.3. El número de asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{(x^2 - 1)(x - 2)(x - 3)}$ es:

A) 1 **B) 2** **C) 3** **D) 4** **E) 5**

La respuesta correcta es la E. Las asíntotas de la función son $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $y = 0$.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

8.4. Si $a > 0$ y $b^2 > ac$, la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ podría ser:



Podemos descartar las gráficas C y E porque son parábolas con las ramas hacia abajo y la condición $a > 0$ no se cumpliría. Las posibles gráficas de la función $f(x)$ son la A y la D. En la gráfica B se tiene que $b = 0$, entonces, para que la condición $b^2 > ac$ se cumpla, se debe tener que $c < 0$.

8.5. Si la gráfica de una función polinómica de 3.er grado $y = f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto de abscisa 1 y un mínimo relativo en el punto de abscisa 3, entonces:

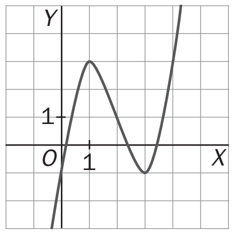
A) Existen números a para los que la ecuación $f(x) = a$ no tiene soluciones reales.

B) No hay ningún número a para el que la ecuación $f(x) = a$ tenga solo dos raíces reales.

C) Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente tres raíces reales.

D) Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene tres raíces reales.

E) La gráfica de $y = f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.



Para resolver este problema es útil trazar la gráfica de una función que verifique las hipótesis.

A) Es falsa. Como una función polinómica de 3.er grado es una función continua y o bien $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ o $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, el recorrido de la función es todo **R** y la ecuación $f(x) = a$ siempre tiene al menos una solución real.

B) Es falsa. Como $(1, f(1))$ es máximo relativo de la función, entonces la ecuación $f(x) = f(1)$ tiene dos soluciones reales ($x = 1$ doble y otra distinta). Lo mismo ocurre con la ecuación $f(x) = f(3)$.

C) Es verdadera. Si $f(3) < a < f(1)$, la ecuación $f(x) = a$ tiene tres soluciones, una menor que 1, otra entre 1 y 3, y la tercera mayor que 3, como se ve en la gráfica.

D) Es verdadera. Si signo $f(1) \neq$ signo $f(3)$, entonces $f(3) < 0 < f(1)$, y estamos en las hipótesis de C.

E) Es verdadera. Los polinomios de 3.er grado son simétricos respecto de su punto de inflexión y, por tanto, la abscisa del punto de inflexión está entre las abscisas de sus extremos relativos.

8.6. Sea $f(x) = e^x P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de tercer grado. Entonces:
A) La gráfica de $y = f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.
B) La gráfica de $y = f(x)$ corta al menos tres veces el eje horizontal.
C) Solo hay dos puntos, como mucho, con tangente horizontal.
D) La gráfica de f no puede tener asíntotas oblicuas.
E) En la gráfica de f puede haber simultáneamente asíntotas horizontales y oblicuas.

A) Es falsa. $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$, ya que $\lim_{x\to-\infty} e^x P(x) = 0$ cualquiera que sea $P(x)$.

B) Es falsa. La función vale 0 si $P(x) = 0$ y un polinomio de grado 3 no siempre tiene tres raíces reales.

C) Es falsa. $f'(x) = e^x [P(x) + P'(x)]$ y, como $P(x) + P'(x)$ es un polinomio de tercer grado, puede anularse hasta tres veces.

D) Es verdadera. En $-\infty$ tiene una asíntota horizontal, y en $+\infty$, como $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x P(x)}{x} = +\infty$ cualquiera que sea $P(x)$, no tiene asíntota oblicua.

E) Es falsa. Ver apartado D.

8.7. Considera la función $f(x) = \text{sen}[g(x)]$, siendo $g(x)$ un polinomio de 4.º grado. Entonces:
A) La gráfica de f puede cortar 5 veces el eje horizontal.
B) El máximo número de puntos de la gráfica de f con tangente horizontal es 5.
C) Si $g(x) > \pi$ para todo x real, entonces la gráfica de f no corta el eje horizontal en ningún punto.
D) Si $g'(x) \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq 1$.
E) La gráfica de f es periódica de período 2π.

A) Es cierta. Como $g(x)$ es continua en **R**, sen($g(x)$) cortará infinitas veces el eje horizontal (siempre que $g(x) = k\pi$).

B) Es falsa. Habrá infinitos puntos con tangente horizontal (siempre que $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

C) Es falsa. Por ejemplo, si $g(a) = 2\pi$, sen($g(a)$) = 0.

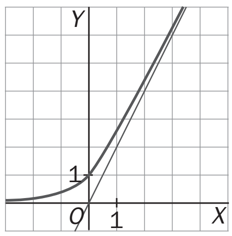
D) Es cierta. $f'(x) = \cos(g(x))g'(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \cos(g(x)) \Rightarrow \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right| = |\cos(g(x))| \leq 1$, siendo $g'(x) \neq 0$.

E) Es falsa, ya que, por ejemplo, el período de la función $h(x) = \text{sen}(px)$ es $T = \dfrac{2\pi}{p}$,

pues $h(x) = \text{sen}(px) = \text{sen}(px + 2\pi) = \text{sen}\left(p\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)\right) = h\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

8.8. Sea f una función definida en R.
a) La gráfica de f presenta alguna asíntota horizontal.
b) La gráfica de f presenta alguna asíntota oblicua.



A) $b \Rightarrow a$, pero $a \not\Rightarrow b$
B) $a \Rightarrow b$, pero $b \not\Rightarrow a$
C) $a \Leftrightarrow b$
D) a y b se excluyen entre sí.
E) Nada de lo anterior

E) Nada de lo anterior. Hay gráficas de funciones que solo tienen asíntota horizontal; otras que solo tienen asíntota oblicua, y otras que tienen una asíntota oblicua en más infinito y una asíntota horizontal en menos infinito, como se ve en el ejemplo.

Señala el dato innecesario para contestar:

8.9. Para encontrar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = e^{ax^3+bx^2+cx+d}$ nos dan estos datos:

a) Valor de *a*
b) Valor de *b*
c) Valor de *c*
d) Valor de *d*

A) Puede eliminarse el dato a.
B) Puede eliminarse el dato b.
C) Puede eliminarse el dato c.
D) Puede eliminarse el dato d.
E) No puede eliminarse ninguno.

D) Puede eliminarse el dato *d*. Las abscisas de los extremos relativos son aquellas que anulan la derivada: $f'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^{ax^3+bx^2+cx+d}$. Dicha derivada será cero si $3ax^2 + bx + c = 0$, es decir, no depende del valor de *d*.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar a la cuestión:

8.10. Para probar que la gráfica de $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde *a*, *b* y *c* son reales, corta una sola vez al eje horizontal nos dicen que:

a) $a = 0$
b) $b > 0$

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.
B) a es suficiente por sí sola, pero b no.
C) b es suficiente por sí sola, pero a no.
D) Son necesarias las dos.
E) Faltan más datos.

A) Son necesarios ambos datos ($a = 0$ y $b > 0$). La función es $y = x^3 + bx + c$, y sabemos que al menos corta una vez el eje *X*, ya que es un polinomio de grado 3. Su derivada es $y' = 3x^2 + b$, que es siempre positiva, ya que $b > 0$; por tanto, la función es siempre creciente y solo corta una vez el eje *X*.

9 Integrales

ACTIVIDADES INICIALES

9.I. Encuentra la función que mide el área de las regiones limitadas por el eje horizontal y las rectas:

a) $y = 3x - 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x con $x > 1$.

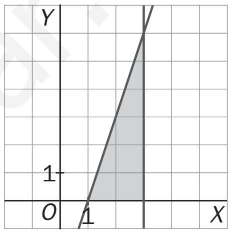
b) $y = x$ si $x \le 3$; $y = -x + 6$ si $x > 3$; la recta vertical trazada por el punto de abscisa x. Distingue entre $0 \le x \le 3$ y $3 < x \le 6$.

En ambos casos, calcula también la derivada de las funciones áreas obtenidas.

a) Se forma un triángulo de base $x - 1$ y altura $3x - 3$.

La función área es: $A(x) = \dfrac{(x-1)(3x-3)}{2}$

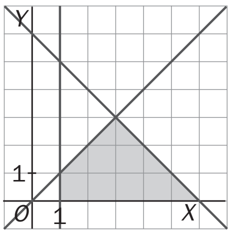
Y su derivada: $A'(x) = \dfrac{6x-6}{2} = 3x - 3$

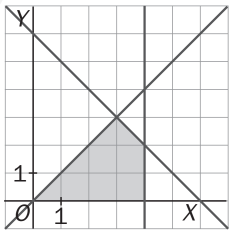


b) En ambos casos, la figura que se forma es un triángulo de base 6 y altura 3 menos un triángulo.

Si $0 \le x \le 3$, el triángulo tiene base x y altura x.

Si $3 < x \le 6$, el triángulo tiene base $6 - x$ y altura $-x + 6$.

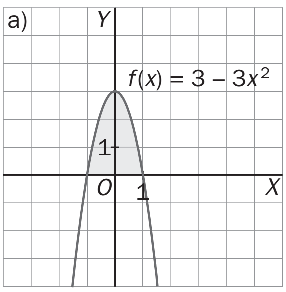


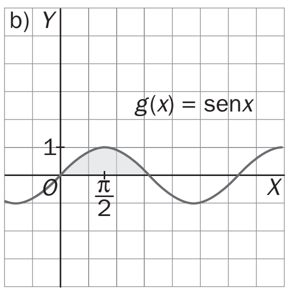


La función área es: $A(x) = \begin{cases} 9 - \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x \le 3 \\ 9 - \dfrac{(6-x)^2}{2} & 3 < x \le 6 \end{cases}$. Y su derivada: $A'(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 3 \\ 6 - x & 3 < x < 6 \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1. Calcula el área de las regiones sombreadas.

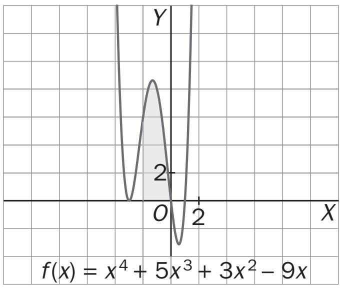




a) Si $f(x) = 3 - 3x^2$, entonces $F(x) = 3x - x^3$ cumple que $F'(x) = f(x)$ y el área de la zona sombreada es: $F(1) - F(-1) = (3 - 1) - (-3 + 1) = 4$ u^2.

b) Si $g(x) = \text{sen } x$, entonces $G(x) = -\cos x$ cumple que $G'(x) = g(x)$ y el área sombreada es $G(\pi) - G(0) = -(-1) + 1 = 2$ u^2.

9.2. Halla el área del recinto sombreado.



Una primitiva de $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$ es $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{4} + x^3 - \frac{9x^2}{2}$.

El área sombreada es $F(0) - F(-2) = -\left(\frac{(-2)^5}{5} + \frac{5(-2)^4}{4} + (-2)^3 - \frac{9(-2)^2}{2}\right) = \frac{62}{5}\,\text{u}^2$.

9.3. Calcula el área de la zona limitada por la gráfica de $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Área = $G(2) - G(0)$ con $G'(x) = x^2$

Una primitiva de $G'(x)$ es $G(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área pedida es: $G(2) - G(0) = \frac{8}{3}\,\text{u}^2$.

9.4. Calcula:

a) $\int_0^1 3x^2\,dx$ **b)** $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx$ **c)** $\int_0^2 (x^2 - 1)\,dx$

a) $\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen } x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$

c) $\int_0^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

9.5. Escribe una función continua f para la que $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$.

Como el intervalo es simétrico respecto del origen, cualquier función impar lo verifica, por ejemplo, $f(x) = x$.

9.6. Calcula $\int_{-1}^4 |3x|\,dx$.

Como $f(x) = |3x| = \begin{cases} -3x & -1 \le x < 0 \\ 3x & 0 \le x \le 4 \end{cases}$,

$$\int_{-1}^4 |3x| dx = \int_{-1}^0 |3x| dx + \int_0^4 |3x| dx = \int_{-1}^0 -3x\,dx + \int_0^4 3x\,dx = \left[-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot 4^2 = \frac{51}{2}$$

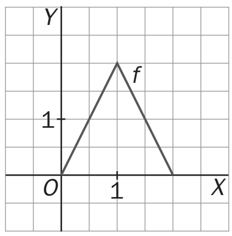
9.7. Escribe una función f no constante en [0, 2] y tal que $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$.

Hay que obtener una función $F(x)$ con $F(2) - F(0) = 2$.
$F(x) = x$ no sirve, pues $f(x) = F'(x) = 1$ es constante.

Probando con $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ y, por tanto, $f(x) = x$.

Otra forma de resolverlo es dibujando un triángulo isósceles de base 2 y altura 2.

La función que lo define es $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x & 1 < x \le 2 \end{cases}$



9.8. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ y $\int_0^3 f(x)\,dx = 3$, calcula:

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_1^3 f(x)\,dx$ c) $\int_2^3 f(x)\,dx$

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 1+2=3$

b) $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 3-1=2$

c) $\int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx\right) = 3-(1+2)=0$

9.9. Si *f* es continua y $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$, ¿cuánto vale $\int_0^1 g(t)\,dt$, siendo $g(t) = f(t) + 1$?

$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 (f(t)+1)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 dt = 2 + [t]_0^1 = 2+1=3$

9.10. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 1$, $\int_a^b g(x)\,dx = 2$, $\int_a^b h(x)\,dx = -3$, calcula, si tienes datos suficientes, el valor de algunas de estas integrales:

a) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ b) $\int_a^b (2f(x)-3g(x))\,dx$ c) $\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\,dx$ d) $\int_a^b (f(x)-2h(x))\,dx$

a) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = 1+2=3$

b) $\int_a^b (2f(x)-3g(x))\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx - 3\int_a^b g(x)\,dx = 2\cdot 1 - 3\cdot 2 = -4$

c) $\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\,dx$. No se tienen datos suficientes.

d) $\int_a^b (f(x)-2h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - 2\int_a^b h(x)\,dx = 1-2\cdot(-3)=7$

9.11. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.

Como $y = \frac{1}{x} > 0$ en [1, 2] y sabemos que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, el área es: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69\text{ u}^2$

9.12. Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

Hay que buscar los puntos de corte de la parábola y el eje horizontal: $x^2 - 2x - 3 = 0$ si $x = 3$ y si $x = -1$. En el intervalo [–1, 3], $x^2 - 2x - 3 \le 0$, luego el área pedida es:

$$\int_{-1}^3 -(x^2-2x-3)\,dx = \left[-\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\right]_{-1}^3 = -(9-9-9) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{32}{3}\text{ u}^2$$

9.13. Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$.

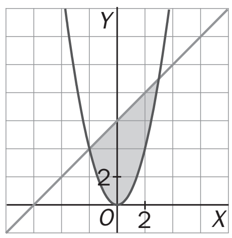
Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$2x - x^2 = x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

Como en [–1, 3], $f(x) \ge g(x)$, el área buscada es:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (f(x)-g(x))\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{3}\text{ u}^2$$

9.14. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x + 6$ e $y = x^2$.



Los puntos de corte de las funciones son:

$x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ o $x = 3$. El área pedida es:

$$\int_{-2}^3 \left(x + 6 - x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 6x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^3 = \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{125}{6}\text{ u}^2$$

9.15.Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx$ c) $\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ e) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2}$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ d) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx$

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx = -\cos x - e^x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} + C$

c) $\int \left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx = x + \frac{3}{5} x\sqrt[3]{x^2} + C$

d) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt[6]{x^5}\, dx = \frac{6}{11} x\sqrt[6]{x^5} + C$

e) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 + 2x}{x^2} = \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - x + \frac{2}{x}\right) dx = -2\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} x^2 + 2\ln x + C$

9.16.Calcula, en cada caso, la función $f(x)$ que verifica las condiciones dadas:

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$ y $f(\pi) = 0$

b) $f'(x) = \frac{3}{1 + x^2} - e^x$ y $f(0) = 1$

c) $f'(x) = x^3 - 4 \cdot 6^x$ y $f(0) = -\frac{4}{\ln 6}$

d) $f'(x) = x - 2\cos x$, y la gráfica de f corta a la bisectriz del 2.º cuadrante en el punto de abscisa $x = \pi$.

a) $f(x) = \int (\cos x + x\sqrt{x})\, dx = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5} x^2\sqrt{x} + C$

Como $f(\pi) = 0$, $f(\pi) = \operatorname{sen}\pi + \frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi} + C = \frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{5}\pi^2\sqrt{\pi}$

Por tanto, $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\left(x^2\sqrt{x} - \pi^2\sqrt{\pi}\right)$

b) $f(x) = \int \left(\frac{3}{1 + x^2} - e^x\right) dx = 3\operatorname{arctg} x - e^x + C$

Como $f(0) = 1$, $f(0) = 3\operatorname{arctg} 0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

La función es $f(x) = 3\operatorname{arctg} x - e^x + 2$.

c) $f(x) = \int (x^3 - 4 \cdot 6^x) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{\ln 6} 6^x + C$

Como $f(0) = -\frac{4}{\ln 6}$, $f(0) = -\frac{4}{\ln 6} + C = -\frac{4}{\ln 6} \Rightarrow C = 0$

La función es $f(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{4}{\ln 6} 6^x$.

d) $f(x) = \int (x - 2\cos x)\, dx = \frac{1}{2} x^2 - 2\operatorname{sen} x + C$

Como $f(\pi) = -\pi$, $\frac{1}{2}\pi^2 - 2\operatorname{sen}\pi + C = -\pi \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

La función es $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\pi^2 - \pi$.

9.17. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{s}}{1+e^{2s}}\,ds$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)^{20}\cdot 5x\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+3}}\,dt = \sqrt{t^2+2t+3}+C$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2s}}{1+e^{2s}}\,ds = \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2s}\right)+C$

c) $\displaystyle\int \left(x^2+1\right)^{20}\cdot 5x\,dx = \frac{5}{2}\int \left(x^2+1\right)^{20}\cdot 2x dx = \frac{5}{42}\left(x^2+1\right)^{21}+C$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\,dt = \operatorname{sen}(\ln t)+C$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{s}}{1+e^{2s}}\,ds = \int \frac{e^{s}}{1+\left(e^{s}\right)^2}\,ds = \operatorname{arctg}(e^{s})+C$

f) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x^2)+C$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)+C$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{1+9x^4}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+\left(3x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(3x^2)+C$

9.18. Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)$

c) $h(x) = x^2e^{x^3}$

b) $g(x) = \operatorname{tg}(3x+2)$

d) $j(x) = 3(1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x$

a) $\displaystyle F(x) = \int 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)\,dx = -\int \left(2x(-\operatorname{sen} x^2)\right)(\cos x^2)^4\,dx = \frac{1}{5}(\cos x^2)^5+C$

b) $\displaystyle G(x) = \int \operatorname{tg}(3x+2)\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{3(-\operatorname{sen}(3x+2))}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right|+C$

c) $\displaystyle H(x) = \int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}+C$

d) $\displaystyle J(x) = \int 3(1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x\,dx = 3\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$

9.19. Calcula las derivadas de $f(x) = tg^2 x$ y $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, simplifícalas al máximo y explica qué observas.

$$f'(x) = \left(\operatorname{tg}^2 x\right)' = 2\operatorname{tg} x\,\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^4 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

Ambas derivadas son iguales.

9.20. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (1-x)e^{-x}dx$ c) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$ e) $\int te^{-\frac{t}{2}}dt$

b) $\int t^2\ln t\, dt$ d) $\int (x^2+1)\cos x\, dx$ f) $\int \text{sen}x\cdot \text{sen}x\, dx$

a) $\int (1-x)e^{-x}\,dx$. Llamando $f(x) = 1 - x$ y $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -1$ y $g(x) = -e^{-x}$, se obtiene:

$$\int (1-x)e^{-x}\,dx = (1-x)(-e^{-x}) - \int (-1)(-e^{-x})\,dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

b) $\int t^2\ln t\,dt$. Llamando $f(t) = \ln t$ y $g'(t) = t^2 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$ y $g(t) = \frac{1}{3}t^3$.

$$\int t^2\ln t\,dt = \frac{1}{3}t^3\ln t - \int \frac{t^3}{3t}dt = \frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{3}\int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{9}t^3 + C$$

c) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$. Llamando $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2x\sqrt{x}}{3x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{3}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

d) $\int (x^2+1)\cos x\,dx$. Llamando $f(x) = x^2 + 1$ y $g'(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x$ y $g(x) = \text{sen}\, x$.

$$\int (x^2+1)\cos x\,dx = (x^2+1)\text{sen}\,x - \int 2x\text{sen}\,x\,dx$$

Se vuelve a integrar por partes llamando $f(x) = 2x$ y $g'(x) = \text{sen}\,x \Rightarrow f'(x) = 2$ y $g(x) = -\cos x$.

$$\int (x^2+1)\cos x\,dx = (x^2+1)\text{sen}\,x - \int 2x\text{sen}\,x\,dx = (x^2+1)\text{sen}\,x - \left(-2x\cos x - \int -2\cos x\,dx\right) =$$
$$= (x^2+1)\text{sen}\,x + 2x\cos x - 2\text{sen}\,x + C = (x^2-1)\text{sen}\,x + 2x\cos x + C$$

e) $\int te^{-\frac{t}{2}}dt$ Llamando $f(t) = t$ y $g'(t) = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow f'(t) = 1$ y $g(t) = -2e^{-\frac{t}{2}}$.

$$\int te^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - \int -2e^{-\frac{t}{2}}dt = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C = -2e^{-\frac{t}{2}}(t+2) + C$$

f) $\int \text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x dx$ Llamando $f(x) = \text{sen}\,x$ y $g'(x) = \text{sen}\,x. \Rightarrow f'(x) = \cos x$ y $g(x) = -\cos x$.

$$\int \text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x - \int \cos x(-\cos x)\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int (1-\text{sen}^2 x)\,dx =$$
$$= -\text{sen}\,x\cos x + \int dx - \int \text{sen}^2 x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + x - \int \text{sen}^2 x\,dx$$

Despejando se obtiene: $2\int \text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + x \Rightarrow \int \text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x\,dx = \frac{-\text{sen}\,x\cos x + x}{2} + C$.

9.21. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$ b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx$ c) $\int \frac{x}{\left(5+x^2\right)^2}dx$ d) $\int \left(x^3+5\right)^4\cdot x^2\,dx$

a) Llamando $t = 1 + \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$: $\int \frac{1+\ln x}{x}dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + C$

b) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2\,dx$: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+5}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+5} + C$

c) Llamando $t = 5 + x^2$, $dt = 2x\,dx$: $\int \frac{x}{\left(5+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(5+x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5+x^2} + C$

d) Llamando $t = x^3 + 5$, $dt = 3x^2\,dx$: $\int \left(x^3+5\right)^4\cdot x^2\,dx = \int \frac{t^4}{3}dt = \frac{t^5}{15} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^5}{15} + C$

9.22. Calcula la integral $\int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$.

Realiza el cambio de variable $t=\sqrt{x-1}$, despeja *x* elevando al cuadrado en dicha expresión y sustituye *x* por el resultado obtenido en la función a integrar.

$$t=\sqrt{x-1} \Rightarrow x=t^2+1 \Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$$

9.23. Halla el valor medio de estas funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x)=x^2-4x+3$ en [0, 1]

b) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$ en [–2, 4]

c) $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ en [0, 3]

En todos los casos se puede aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral por ser funciones continuas en los intervalos correspondientes.

a) $\int_0^1 x^2-4x+3\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}=f(c)(1-0)\Rightarrow f(c)=\frac{4}{3}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, 1] es $\frac{4}{3}$.

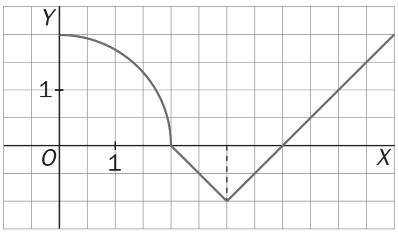
b) $\int_{-2}^4 f(x)dx=\int_{-2}^2 x+2\,dx+\int_2^4 4\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^2+\left[4x\right]_2^4=8+8=16=f(c)(4-(-2))=6f(c)\Rightarrow f(c)=\frac{8}{3}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [–2, 4] es $\frac{8}{3}$.

c) $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^2+x\right]_0^3=\frac{9}{2}=3f(c)\Rightarrow f(c)=\frac{3}{2}$

El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, 3] es $\frac{3}{2}$.

9.24. Halla el valor medio de la función:



$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx=$$

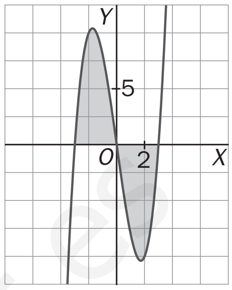
= Área de un cuarto de círculo de radio 2 – área de triángulo + 0 +área encerrada por la recta $y = x - 4$ y el eje X en el intervalo [5,6]= $\frac{\pi\cdot 2^2}{4}-\frac{1\cdot 1}{2}+\frac{3}{2}=\pi+1=6f(c) \Rightarrow f(c)=\frac{\pi+1}{6}$

EJERCICIOS

Área bajo una curva. Teorema fundamental del cálculo

9.25. (PAU) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 9x$ y el eje X.

$x^3 - 9x = 0$ si $x = -3$, $x = 0$ o $x = 3$

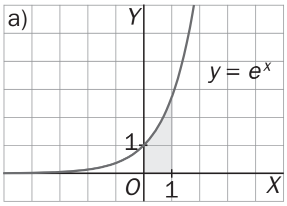


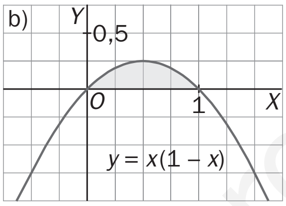
Se forman dos recintos, uno sobre el eje X para x en el intervalo $[-3, 0]$ y otro bajo el eje X para x en el intervalo $[0, 3]$.

El área buscada es:

$$\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx-\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)=\frac{81}{2}\ \text{u}^2$$

9.26. Calcula el área de las siguientes regiones.



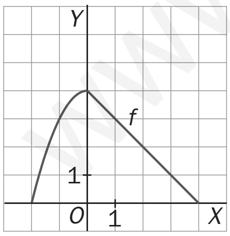


a) $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1\ \text{u}^2$ b) $\int_0^1 x(1-x)\,dx = \int_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ \text{u}^2$

9.27. (PAU) Representa gráficamente la función dada por

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{si } -2\le x<0\\ 4-x & \text{si } 0\le x\le 4\end{cases}}$$

y halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.



El área es:

$$\int_{-2}^{4}f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{4}f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(4-x^2)\,dx+\int_{0}^{4}(4-x)\,dx=$$

$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{0}+\left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}=8-\frac{8}{3}+16-\frac{16}{2}=\frac{40}{3}\ \text{u}^2$$

9.28. (PAU) Dada la función $f(x) = x^2 + a$ con $a > 0$, calcula el valor de a para que el área determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 27.

Como la función es siempre positiva, el área buscada es:

$$\int_0^3 (x^2+a)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+ax\right]_0^3=9+3a=27 \text{ si } a = 6$$

Integral definida. Regla de Barrow

9.29. Si f' es continua y $f(1) = 2$, ¿cuál es el valor de $f(7)$, sabiendo que $\int_1^7 f'(x)\,dx = 3$?

Al ser f' continua, por la regla de Barrow: $\int_1^7 f'(x)\,dx = f(7) - f(1) = f(7) - 2 = 3 \Rightarrow f(7) = 5$

9.30. ¿Son verdaderas o falsas estas afirmaciones?

a) Si f es continua y par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f es continua, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

c) $\int_0^{\pi} x\,\text{sen}\,x\,dx = 2x$

d) $\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c\right) dx = 2\int_0^1 \left(ax^2 + c\right) dx$

e) $\int_0^3 x(x-1)(x-3)\,dx$ mide el área de la región encerrada por la curva $f(x) = x(x - 1)(x - 3)$ y el eje horizontal.

f) El área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ es 6.

a) Cierta.

f es par si $f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

Haciendo $t = -x$, $dt = -dx$ en la primera integral, $t = a$ si $x = -a$ y $t = 0$ si $x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(-x)\,dx = \int_a^0 -f(t)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt$

Luego $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

b) Falsa. Basta considerar $f(x) = 1$.

c) Falsa. La integral definida es un número, no una función.

d) Cierta.

Teniendo en cuenta que $ax^2 + c$ es una función par y utilizando el apartado a, se obtiene:

$$\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(ax^2 + c\right) dx + \int_{-1}^{1} bx\,dx + = 2\int_0^1 \left(ax^2 + c\right) dx + \left[\frac{b}{2}x^2\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\int_0^1 \left(ax^2 + c\right) dx + 0 = 2\int_0^1 \left(ax^2 + c\right) dx$$

e) Falsa. La función cambia de signo en [0, 3], y la región limitada por esa curva y el eje horizontal en [0, 1] está por debajo del eje y en [1, 3] está por encima.

f) Falsa. La función está por debajo del eje de abscisas en [0, 1] y por encima en [1, 3]. Por tanto, el área es:

$$-\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx + \int_1^3 (x^2 - 1)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 + 9 - 3 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{3}\ \text{u}^2$$

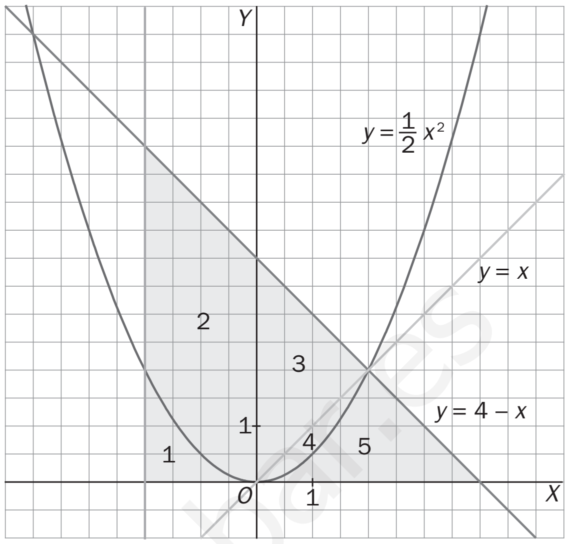
9.31. (PAU) Calcula $\int_{-1}^{1} \left(x + |x|\right) dx$.

Se escribe la función a integrar como una función definida a trozos: $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$

Así pues: $\int_{-1}^{1} \left(x + |x|\right) dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^1 2x\,dx = 0 + \left[x^2\right]_0^1 = 1$

9.32. Calcula el área de las regiones numeradas de 1 a 5 en el siguiente dibujo.

Empezando por las más fáciles:



(3) es un triángulo de base 4 y altura 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_3 = \dfrac{4{\cdot}2}{2} = 4\ \text{u}^2$

(4) + (5) es un triángulo de base 4 y altura 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_4 + A_5 = 4\ \text{u}^2$

(4) es el área entre una parábola y una recta:

$$A_4 = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{6}2^3 = \frac{2}{3}\ \text{u}^2$$

Luego $A_5 = 4 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{3}\ \text{u}^2$

(1) + (2) es un trapecio de bases 6 y 4 y altura 2 $\Rightarrow$

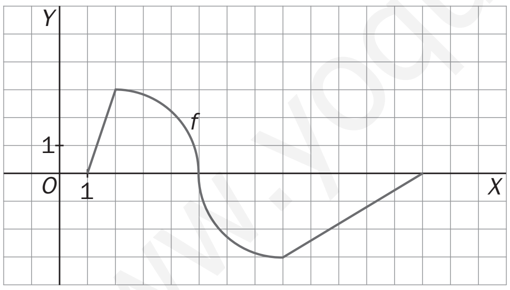
$\Rightarrow A_1 + A_2 = \dfrac{(6+4)2}{2} = 10\ \text{u}^2$

(1) es el área entre el eje de abscisas, la parábola y la recta $x = -2 \Rightarrow A_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^2\,dx = -\frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$

Luego: $A_2 = 10 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{26}{3}\ \text{u}^2$

Propiedades de la integral

9.33. Sea la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en segmentos y cuartos de circunferencia.



Calcula $\displaystyle\int_8^{13} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^{13} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_1^{13} |f(x)|\,dx$.

Las áreas de cada trozo son:

$$A_1 = \frac{1\cdot 3}{2} = \frac{3}{2};\quad A_2 = \frac{\pi\cdot 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4};\quad A_3 = \frac{9\pi}{4};\quad A_4 = \frac{5\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\int_8^{13} f(x)\,dx = -A_4 = -\frac{15}{2}$$

$$\int_1^{13} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^8 f(x)\,dx + \int_8^{13} f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = \frac{3}{2} - \frac{15}{2} = -6$$

$$\int_1^{13} |f(x)|\,dx = \int_1^2 |f(x)|\,dx + \int_2^5 |f(x)|\,dx + \int_5^8 |f(x)|\,dx + \int_8^{13} |f(x)|\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{3}{2} + 2\frac{9\pi}{4} + \frac{15}{2} = 9 + \frac{9\pi}{2}$$

9.34. Sea *f* continua en [–1, 4] y *g*(*x*) = *f*(*x*) – *x*. Si $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5$, calcula $\int_{-1}^{4} g(t)dt$.

$$\int_{-1}^{4} g(t)dt = \int_{-1}^{4} (f(t)-t)dt = \int_{-1}^{4} f(t)dt - \int_{-1}^{4} t\,dt = 5 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{4} = 5 - 8 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

9.35. (PAU) Contesta, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

c) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **, entonces *a* = *b***

d) Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ **y** $f(x) > 0$ **para todo *x*, entonces *a* = *b***

e) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

a) Verdadera, es la propiedad 4 de integrales.

b) Falsa. Por ejemplo, $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$, pero $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, luego $\int_0^1 x^2\,dx \neq \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 x\,dx$

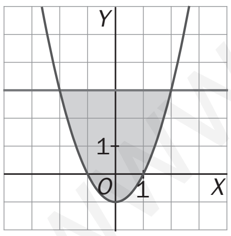
c) Falsa. Por ejemplo, $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

d) Verdadera por la propiedad 5

e) Verdadera, es la propiedad 2.

Área entre dos curvas

9.36. Halla el área del recinto limitado por la parábola *y* = x^2 – 1 y la recta horizontal *y* = 3.

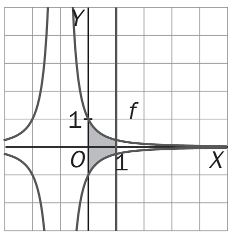


$x^2 - 1 = 3$ si $x = -2$ o $x = 2$

Como la recta está por encima de la parábola, el área buscada es:

$$\int_{-2}^{2} (3 - x^2 + 1)\,dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

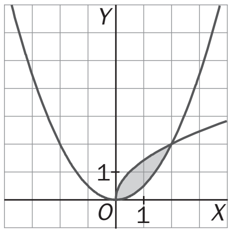
9.37. Calcula el área de la región del plano que está limitada entre las curvas $y = \frac{1}{(1+x)^2}$, $y = \frac{-1}{(1+x)^2}$ **y las rectas *x* = 0 y *x* = 1.**



El área buscada es:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{-1}{(1+x)^2}\right) dx = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = 2\left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = 2\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = 1\ \text{u}^2$$

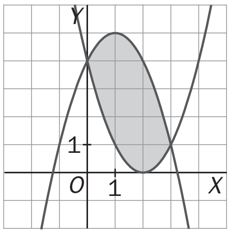
9.38.(PAU) Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{2x}$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.



$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 8x = x^4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

El área buscada es: $\displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{2x\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4\cdot 2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ u^2.

9.39.(PAU) Dibuja la región limitada por las parábolas $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -x^2 + 2x + 4$, y calcula el área de la región limitada por ambas curvas.



Los puntos de corte de las dos funciones son:

$x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$

El área buscada es:

$$\int_0^3 \left((-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4)\right) dx = \int_0^3 \left(-2x^2 + 6x\right) dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ u}^2$$

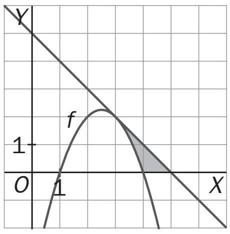
9.40.Halla el área del recinto acotado por estas tres fronteras:

- **La parábola de ecuación $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.**
- **La recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 3$.**
- **El eje horizontal.**

Hay que calcular la recta tangente a la parábola en el punto $A(3, f(3)) = A(3, 2)$.

Como $f'(x) = -2x + 5$, $f'(3) = -1$, y la recta tangente es: $y = -1(x - 3) + 2 \Rightarrow y = -x + 5$

El área buscada es:

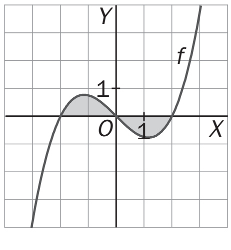


$$\int_3^4 \left((-x+5) - (-x^2 + 5x - 4)\right) dx + \int_4^5 (-x+5)\, dx = \int_3^4 \left(x^2 - 6x + 9\right) dx + \int_4^5 (-x+5)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_3^4 + \left[\frac{-x^2}{2} + 5x\right]_4^5 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 9\cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 9\cdot 3\right) + \left(\frac{-5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{-4^2}{2} + 5\cdot 4\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\text{u}^2$$

9.41.(PAU) Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,(x^2 - 1)\, dx$ y explica mediante un gráfico el significado geométrico del valor obtenido.



$$\int_{-1}^{1} x\,(x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0.$$

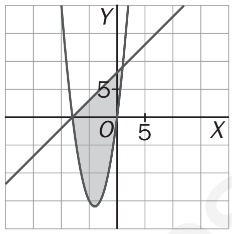
La función es simétrica con respecto a $O(0, 0)$ y, por tanto, el área de la derecha es igual al área de la izquierda.

9.42.(PAU) Considerando la curva de ecuaciones cartesianas $y = x^2 + 8x$:
a) Calcula las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y = 2x$.
b) Calcula el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva dada y de la recta de ecuación $y = x + 8$.

a) Como la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $f'(a)$ y la pendiente de la recta $y = 2x$ es 2, hay que calcular un punto $A(a, f(a))$ con $f'(a) = 2$.

$f'(a) = 2a + 8 = 2$ si $a = -3$

El punto buscado es $(-3, f(-3)) = A(-3, -15)$.



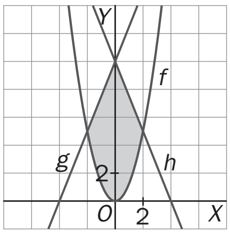
b) $x^2 + 8x = x + 8$ si $x = -8$ o $x = 1$

El área buscada es:

$$\int_{-8}^{1}\left((x+8)-(x^2+8x)\right)dx = \int_{-8}^{1}\left(-x^2-7x+8\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+8x\right]_{-8}^{1} =$$

$$= \left(\frac{-1^3}{3}-\frac{7}{2}1^2+8\cdot 1\right)-\left(\frac{-(-8)^3}{3}-\frac{7}{2}(-8)^2+8\cdot(-8)\right) = \frac{243}{2}\text{u}^2$$

9.43.(PAU) Representa gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{5}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(5x+20)$ y $h(x) = \frac{1}{2}(-5x+20)$, y obtén su área.



Punto de corte de la función con cada una de las rectas:

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x+20) \Rightarrow 5x^2 - 10x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ o $x = 4$

$\frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(-5x+20) \Rightarrow 5x^2 + 10x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4$ o $x = 2$

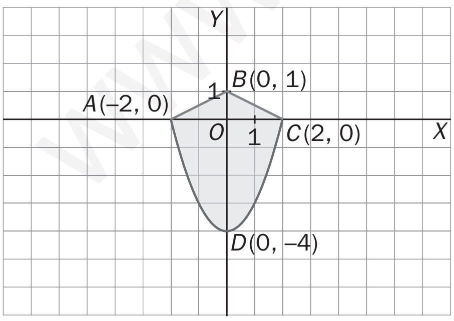
Observando el recinto, los puntos a considerar son $x = -2$ y $x = 2$.

El área es:

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{5}{2}x+10-\frac{5}{4}x^2\right)dx + \int_{0}^{2}\left(-\frac{5}{2}x+10-\frac{5}{4}x^2\right)dx = \left[\frac{5x^2}{4}+10x-\frac{5}{12}x^3\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{5x^2}{4}+10x-\frac{5}{12}x^3\right]_{0}^{2} =$$

$$= -\left(\frac{5(-2)^2}{4}+10\cdot(-2)-\frac{5}{12}\cdot(-2)^3\right)+\left(-\frac{5\cdot 2^2}{4}+10\cdot 2-\frac{5}{12}\cdot 2^3\right) = \frac{70}{3}\text{u}^2$$

9.44.(PAU) Determina el área de la figura *ABCDA* sabiendo que la curva *ADC* es parte de la gráfica de una función polinómica de segundo grado.



Como es simétrica, es suficiente con calcular el área que está a la derecha del eje vertical y multiplicarla por 2.

Ese área está limitada por la parábola que pasa por los puntos $A(-2, 0)$, $C(2, 0)$ y $D(0, -4)$.

Como corta al eje en $x = -2$ y en $x = 2$, su ecuación es $f(x) = a(x + 2)(x - 2)$, y como pasa por D, vale -4 si $x = 0$, $a = 1$.

Con estos datos, la ecuación de la parábola es $f(x) = x^2 - 4$.

La ecuación de la recta que pasa por B y C es $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

El área de la derecha es:

$$\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+1-(x^2-4)\right)dx = \int_{0}^{2}\left(-x^2-\frac{1}{2}x+5)\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{4}+5x\right]_{0}^{2} = \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{2^2}{4}+5\cdot 2\right) = \frac{19}{3}\text{u}^2 \Rightarrow$$

Área buscada: $2\cdot\frac{19}{3} = \frac{38}{3}\text{u}^2$

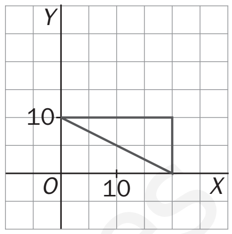
9.45. Calcula el valor de *m*, *m* > 0 para que el área encerrada entre las líneas $y = x^2$ e $y = mx$ sea 36.

Puntos de corte de las funciones: $x^2 = mx \Rightarrow x = 0$ o $x = m$

En el intervalo $[0, m]$, $x^2 \leq mx$, y como $m > 0$, el área entre la recta y la parábola es:

$$\int_0^m \left(mx - x^2\right)dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^m = \frac{m}{2}\cdot m^2 - \frac{m^3}{3} = \frac{m^3}{6} = 36 \Rightarrow m = 6$$

9.46. (PAU) Calcula, por geometría elemental y utilizando el cálculo integral, el área del triángulo de vértices (0, 10), (20, 10) y (20, 0).

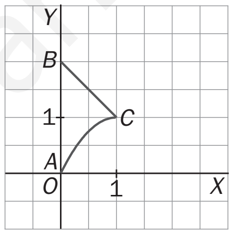


La base del triángulo mide 20, y la altura, 10, luego su área es 100 u^2.

Con cálculo integral, el triángulo es el área entre las rectas $y = 10$, $y = -\frac{1}{2}x + 10$,

$x = 0$ y $x = 20$: $\displaystyle\int_0^{20}\left(10 - \left(-\frac{1}{2}x + 10\right)\right)dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{20} = 100\,u^2$

9.47. (PAU) Representa gráficamente y halla el área del recinto *ABC*, donde *A* = (0, 0), *B* = (0, 2), *C* = (1, 1), las líneas *AB* y *BC* son rectas, y la línea *AC* tiene por ecuación $y = 2x - x^2$.



La recta que une los puntos *BC* tiene ecuación $y = -x + 2$.

El área es: $\displaystyle\int_0^1\left(-x + 2 - \left(2x - x^2\right)\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{6}\,u^2$

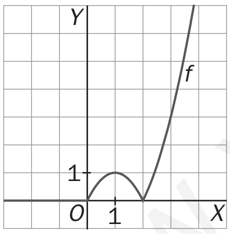
9.48. (PAU) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \left|x^2 - 2x\right| & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en el punto $x = 0$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte positiva del eje *X*.

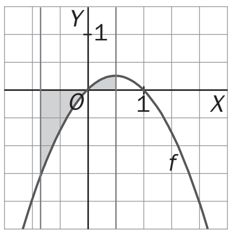
a)



b) La función es continua en $x = 0$, pues $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

c) $\displaystyle\int_0^2\left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\,u^2$

9.49. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x - x^2$. Encuentra el intervalo $[a, b]$ para el que $\displaystyle\int_a^b\left(x - x^2\right)dx$ alcanza el máximo valor.



Como $\displaystyle\int_a^b (x - x^2)\,dx$ mide la diferencia entre las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo del eje horizontal, se obtendrá el máximo valor cuando se abarque toda la región de la curva que esté sobre el eje horizontal, esto es, en [0, 1].

Así pues, el máximo valor de la integral es $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$.

La integral indefinida. Primitivas inmediatas

9.50. Identifica cada una de las primitivas siguientes con una de la tabla dada en el texto y, a continuación, resuélvelas.

a) $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx$ e) $\int\frac{x}{1+x^4}\,dx$ i) $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}\,dx$ m) $\int\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

b) $\int \operatorname{tg} x\,dx$ f) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$ j) $\int\left(\operatorname{sen} x+\frac{2}{1+x^2}+\cos x\right)dx$ n) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

c) $\int(3x-5)^2\,dx$ g) $\int xe^{x^2}\,dx$ k) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ ñ) $\int\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

d) $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx$ h) $\int\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$ l) $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx$ o) $\int e^{2x}\sqrt[7]{e^{2x}+1}\,dx$

a) $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int 2\,dx=\ln|x|+2x+C$. Tipos 2 y 1

b) $\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx=-\ln|\cos x|+C$. Tipo 2

c) $\int(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{3}\int 3(3x-5)^2\,dx=\frac{1}{9}(3x-5)^3+C$. Tipo 1

d) $\int x^3\sqrt[4]{x^5}\,dx=\int x^{\frac{17}{4}}\,dx=\frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}}+C=\frac{4}{21}x^5\sqrt[4]{x}+C$. Tipo 1

e) $\int\frac{x}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)+C$. Tipo 9

f) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx=\frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen} 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)+C$. Tipo 6

g) $\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. Tipo 3

h) $\int\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. Tipo 1

i) $\int\frac{x^3-5x^2+3}{x}\,dx=\int x^2\,dx-5\int x\,dx+3\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3\ln|x|+C$. Tipos 1 y 2

j) $\int\left(\operatorname{sen} x+\frac{2}{1+x^2}+\cos x\right)dx=\int\operatorname{sen} x\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}\,dx+\int\cos x\,dx=-\cos x+2\operatorname{arctg} x+\operatorname{sen} x+C$. Tipos 6, 9 y 5

k) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\,dx=\operatorname{arcsen}(e^x)+C$. Tipo 7

l) $\int x\left(x^2-1+\sqrt[3]{x^2-1}\right)dx=\int x^3dx-\int x\,dx+\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x^2-1}+C$. Tipo 1

m) $\int\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx=\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)+C$. Tipo 9

n) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}+C$. Tipo 1

ñ) $\int\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx=\ln(\operatorname{sen}^2 x+1)+C$. Tipo 2

o) $\int e^{2x}\sqrt[7]{e^{2x}+1}\,dx=\frac{7}{16}(e^{2x}+1)\sqrt[7]{e^{2x}+1}+C$. Tipo 1

9.51. (PAU) Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx$

b) $\displaystyle\int(\operatorname{sen} 2x-\cos 3x+2\cos x \operatorname{sen} x)\,dx$

c) $\displaystyle\int\sqrt{(1+e^x)^3}\,e^x\,dx$

a) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)dx=\sqrt{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$

b) $\displaystyle\int(\operatorname{sen} 2x-\cos 3x+2\cos x \operatorname{sen} x)\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen}^2 x+C$

c) $\displaystyle\int\sqrt{(1+e^x)^3}\,e^x\,dx=\frac{2}{5}(1+e^x)^2\sqrt{1+e^x}+C$

9.52. (PAU) Encuentra la primitiva de $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$ que vale 5 en el 2.

$F(x)=\displaystyle\int\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}+C$. Como $F(2)=5$, $F(2)=\dfrac{2^2}{2}-\dfrac{4}{2}+C=5\Rightarrow C=5$

Entonces, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{4}{x}+5$.

9.53. Considerando la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$:

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Demuestra que si $x>1$, la función $f(x)$ es siempre positiva.

c) Calcula el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ entre las rectas verticales $x=2$ y $x=3$.

a) $F(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}\,dx=\frac{\ln\left|x^2-1\right|}{2}$

b) Si $x>1$, entonces el numerador es positivo y el denominador también, pues x^2-1 es positivo en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Por tanto, la función es siempre positiva si $x>1$.

c) Como $f(x)$ es positiva en $[2, 3]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, el área buscada es $F(3)-F(2)=\dfrac{\ln 8-\ln 3}{2}$ u^2.

9.54. (PAU) Dada la función $f(x)=(x-1)(x+1)(x-3)$:

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que $F(x)=x^4+2x-4$ no es primitiva de $f(x)$.

c) Halla el área limitada por la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

a) $F(x)=\displaystyle\int(x-1)(x+1)(x-3)\,dx=\int(x^3-3x^2-x+3)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x$

b) Si lo fuera, debería cumplir que $F'(x)=f(x)$, pero $F'(x)=4x^3+2\neq(x-1)(x+1)(x-3)$ (para ver esto, no es necesario calcular el producto, basta ver que no valen lo mismo en $x=1$).

c) Como la función cambia de signo en $[0, 2]$, es positiva en $[0, 1)$ y negativa en $(1, 2]$, el área es:

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx=\big(F(1)-F(0)\big)-\big(F(2)-F(1)\big)=2F(1)-F(2)=\frac{7}{2}\ \text{u}^2$$

9.55.(PAU) Determina la ecuación de la función polinómica *f* que pasa por los puntos *A*(0, 1) y *B*(1, 1), y tal que $f''(x) = 6x + 4$.

$f'(x) = \int (6x+4)\,dx = 3x^2 + 4x + C$ y $f(x) = \int (3x^2 + 4x + C)\,dx = x^3 + 2x^2 + Cx + D$

Como $y = f(x)$ pasa por $A(0,1)$, debe ser $f(0) = D = 1$, y como pasa por $B(1, 1)$, $f(1) = 1 + 2 + C + 1 = 1 \Rightarrow C = -3$.

La función buscada es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

9.56.(PAU) Da dos funciones cuya derivada sea $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + e^{2x}$ tales que en el punto $x = 0$ una tenga doble valor que la otra.

$F(x) = \int \left(\dfrac{1}{x+1} + e^{2x}\right) dx = \ln|x+1| + \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

$F(0) = \dfrac{1}{2} + C$

Si $C = 0$ para una de ellas, y para la otra, $C = \dfrac{1}{2}$, las funciones son $F(x) = \ln|x+1| + \dfrac{1}{2}e^{2x}$ y

$G(x) = \ln|x+1| + \dfrac{1}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{2}$.

Integración por partes

9.57.Calcula las siguientes integrales.

a) $\int x\,e^x dx$ d) $\int \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$ g) $\int \ln(x+1)\,dx$ j) $\int x \ln x\,dx$

b) $\int \dfrac{x\,dx}{2^x}$ e) $\int \text{sen}^2 x\,dx$ h) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$ k) $\int x(\ln x)^2\,dx$

c) $\int \text{arctg}\,x\,dx$ f) $\int (x^2 + x)\,e^{-2x+1}\,dx$ i) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$ l) $\int e^x \cos(3x)\,dx$

a) Si $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$ $\Rightarrow$ $\int x\,e^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$

b) Si $f(x) = x$ y $g'(x) = 2^{-x}$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = \dfrac{-1}{\ln 2}\cdot\dfrac{1}{2^x}$ $\Rightarrow$ $\int \dfrac{x\,dx}{2^x} = \dfrac{-x}{2^x \ln 2} + \dfrac{1}{\ln 2}\int \dfrac{1}{2^x}dx = \dfrac{-x}{2^x \ln 2} - \dfrac{1}{2^x(\ln 2)^2} + C$

c) Si $f(x) = \text{arctg}\,x$ y $g'(x) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $g(x) = x \Rightarrow$

$$\int 1\cdot \text{arctg}\,x\,dx = x\text{arctg}x - \int \frac{x}{x^2+1}dx = x\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

d) Si $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{4}{3}x\sqrt{x}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sqrt[3]{x}\ln x\,dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x - \int \frac{3}{4}\frac{x\sqrt[3]{x}}{x}dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{3}{4}\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{9}{16}x\sqrt[3]{x} + C$$

e) Si $f(x) = \text{sen}\,x$ y $g'(x) = \text{sen}\,x$, $f'(x) = \cos x$ y $g(x) = -\cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \text{sen}^2 x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\text{sen}\,x\cos x + \int (1 - \text{sen}^2 x)\,dx = -\text{sen}\,x \cos x + x - \int \text{sen}^2 x\,dx$$

Despejando obtenemos $\int \text{sen}^2 x\,dx = \dfrac{x - \text{sen}\,x\cos x}{2} + C$.

f) $\int (x^2 + x)e^{-2x+1}dx$ $f(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = e^{-2x+1}$; $f'(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x+1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int (x^2+x)e^{-2x+1}dx = -\dfrac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1} + \dfrac{1}{2}\int (2x+1)e^{-2x+1}dx$. Si ahora $f(x) = 2x + 1$ y $g'(x) = e^{-2x+1}$;

$f'(x) = 2$ y $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x+1}$ $\Rightarrow$ $\int (x^2+x)e^{-2x+1}dx = -\dfrac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1} - \dfrac{1}{4}(2x+1)e^{-2x+1} + \dfrac{1}{2}\int e^{-2x+1}dx =$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x+1} - \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x+1} - \frac{1}{4}e^{-2x+1} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x+1}(x^2+2x+1) + C$$

g) Si $f(x) = \ln(x + 1)$ y $g'(x) = 1$, $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = x$

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx = x\ln(x+1)-\int\frac{x+1-1}{x+1}dx =$$
$$= x\ln(x+1)-x+\int\frac{1}{x+1}dx = x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$$

h) $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C = -\frac{\ln x+1}{x}+C$

i) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx = \int x^2{\cdot}xe^{-x^2}\,dx$

Si $f(x) = x^2$ y $g'(x) = x\,e^{-x^2}$; $f'(x) = 2x$ y $g(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int x^3e^{-x^2}\,dx = \int x^2\cdot xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C$$

j) Si $f(x)=\ln x$ y $g'(x) = x$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

k) Si $f(x) = (\ln x)^2$ y $g'(x) = x$, $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int x(\ln x)^2dx = \frac{(x\ln x)^2}{2}-\int x\ln x\,dx = \frac{(x\ln x)^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C \text{ (por el apartado j)}$$

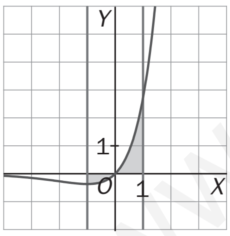
l) Si $f(x) = \cos 3x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = -3\text{sen } 3x$ y $g(x) = e^x$ $\Rightarrow \displaystyle\int e^x\cos(3x)dx = e^x\cos 3x+3\int e^x\text{sen } 3x\,dx$

Si ahora $f(x) = \text{sen } 3x$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 3\cos 3x$ y $g(x) = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int e^x\cos(3x)dx = e^x\cos(3x)+3e^x\text{sen}(3x)-9\int e^x\cos(3x)dx$$

Despejando: $\displaystyle\int e^x\cos(3x)dx = \frac{e^x\cos(3x)+3e^x\text{sen}(3x)}{10}+C$.

9.58. Halla el área que encierra el recinto limitado por las gráficas de $f(x) = xe^x$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.



$$A = -\int_{-1}^{0}xe^x\,dx+\int_0^1 xe^x\,dx = -\left[e^x(x-1)\right]_{-1}^{0}+\left[e^x(x-1)\right]_0^1 = -\left(\frac{2}{e}-1\right)+1 = 2-\frac{2}{e}\text{ u}^2$$

9.59. (PAU) Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x) = e^x(x+1)$ en el intervalo [0, 1].

Regla de Barrow: Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier primitiva de f, $F'(x) = f(x)$, entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

Como $f(x)$ es continua, se calcula una de sus primitivas, $F(x)=\displaystyle\int e^x(x+1)\,dx$.

Llamando $f(x) = x + 1$ y $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$,

$$F(x)=\int e^x(x+1)dx = e^x(x+1)-\int e^xdx = e^x(x+1)-e^x = xe^x$$

Por tanto: $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = F(1)-F(0) = e$

Integración por cambio de variable

9.60. Calcula la integral $\int e^{2x} sen\, e^x dx$ mediante el cambio $t = e^x$.

$t = e^x$; $dt = e^x dx$ $\Rightarrow$ $\int e^{2x}\text{sen}\, e^x\, dx = \int e^x e^x \text{sen}\, e^x\, dx = \int e^x \text{sen}\, e^x\, e^x dx = \int t\, \text{sen}\, t\, dt$.

Integrando por partes: $f(t) = t$ y $g'(t) = \text{sen}\, t$; $f'(t) = 1$ y $g(t) = -\cos t$

$$\int e^{2x}\text{sen}\, e^x\, dx = \int t\text{sen}\, t\, dt = -t\cos t + \int \cos t\, dt = -t\cos t + \text{sen}\, t + c = -e^x \cos e^x + e^x\, \text{sen}\, e^x + c$$

9.61. Calcula:

a) $\int \text{sen}(\text{sen}\, x)\cos x\, dx$ **b)** $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}\, dx$ **c)** $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}}\, dx$ **d)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

a) $t = \text{sen}\, x$; $dt = \cos x\, dx \Rightarrow \int \text{sen}(\text{sen}\, x)\cos x\, dx = \int \text{sen}\, t\, dt = -\cos t + C = -\cos(\text{sen} x) + C$

b) $t = e^x$; $dt = e^x\, dx \Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x+1)^3} dx = \int \frac{1}{(t+1)^3} dt = \frac{-1}{2(t+1)^2} + C = -\frac{1}{2\left(e^x+1\right)^2} + C$

c) $t = e^{-2x}$; $dt = -2e^{-2x}dx \Rightarrow \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2}\text{arctg}\, t + C = -\frac{1}{2}\text{arctg}\, e^{-2x} + C$

d) $t = \ln x$; $dt = \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx = \int \cos t\, dt = \text{sen}\, t + C = \text{sen}\left(\ln x\right) + C$

Teorema del valor medio del cálculo integral

9.62. Encuentra el valor medio de:

a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f_3(x) = x^{\frac{1}{3}}$ **sobre el intervalo [0, 1].**

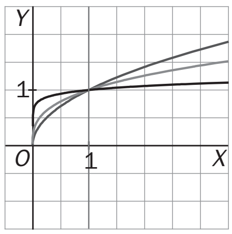
b) Conjetura, a partir del apartado anterior, el valor medio de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ **en dicho intervalo.**

c) ¿A qué número se aproxima el valor medio de $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ **cuando** n **es grande? ¿Se puede explicar este resultado a partir de la gráfica de dicha función?**

a) Valor medio de $f_1(x)$: $\int_0^1 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = f_1(c)(1-0) = f_1(c)$

Valor medio de $f_2(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} = f_2(c)$

Valor medio de $f_3(x)$: $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} = f_3(c)$



b) $f(c) = \frac{n}{n+1}$

c) Se aproxima a 1. En las gráficas de $f(x)$ se observa que a medida que n crece, el área parece cada vez más un cuadrado de lado 1.

9.63. **Dos autores de este libro han hecho en el verano de 2008 la travesía a pie de los Carros de Foc por el Pirineo catalán empleando 95 horas, a lo largo de las cuales fueron anotando la altitud a la que se encontraban en diversos momentos y, después de aproximar y redondear los datos, obtuvieron la siguiente tabla:**

Tiempo (h)	3	15	30	25	20	2
Altitud (m)	2000	2200	2300	2400	2500	2600

¿Cuál fue la altitud media a la que se movieron?

La altitud media es el valor medio de la función altitud en el intervalo [0, 95].

Como no se conoce la expresión de la altitud, sino solo una tabla de valores, se aproxima dicha integral con la suma de las áreas de los rectángulos, es decir, el numerador de la siguiente fracción:

$$\text{Altitud media} \approx \frac{3\cdot 2000+15\cdot 2200+30\cdot 2300+25\cdot 2400+20\cdot 2500+2\cdot 2600}{95} \approx 2349{,}47\ \text{m}$$

Aplicaciones de la integral definida en las ciencias sociales

9.64. **(PAU) Una empresa quiere producir $c(t) = 200 + 10t$ unidades de un producto que pretende vender a $p(t) = 200 - 2t$ euros cada unidad, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la producción.**

a) Halla, dependiendo de t, la función beneficio $B(t)$.

b) Halla el beneficio acumulado durante los primeros 90 días.

a) El beneficio de un día es $B(t) = c(t) \cdot p(t) = 40\,000 + 1600t - 20t^2 = 20(2000 + 80t - t^2)$ euros.

b) Para saber el beneficio acumulado se calcula:

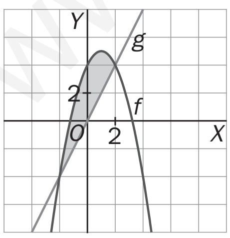
$$\int_0^{90} B(t)dt = 20\int_0^{90}(2000+80t-t^2)dt = 20\left[2000t+40t^2-\frac{t^3}{3}\right]_0^{90} = 20(180000+324000-243000) = 5220000\ €$$

9.65. **(PAU) Una inmobiliaria está interesada en adquirir unos terrenos que pueden ser representados en un determinado plano como la superficie encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$.**

a) Halla la representación gráfica simultánea de estas dos funciones.

b) Si una unidad del área de este plano equivale a 1 km² y el precio del kilómetro cuadrado es de 30 millones de euros, ¿qué importe debe pagar la inmobiliaria por esos terrenos?

a)



b) Las funciones se cortan en los puntos: $-x^2 + 2x + 4 = 2x \Rightarrow x = -2$ o $x = 2$

Su área: $\displaystyle\int_{-2}^{2}(-x^2+2x+4-2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}\ \text{km}^2$

El precio del terreno: $30 \cdot \dfrac{32}{3} = 320$ millones de €

9.66.(PAU) Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función:

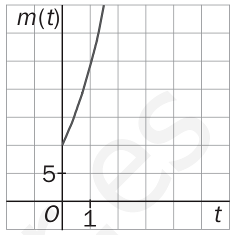
$$\boldsymbol{m(t) = 10 + 10t + 4t^2}$$

Donde *t* se mide en años, y *m*, en cientos de euros por año.
Se pide:
a) Dibujar la gráfica y hacer una interpretación.
b) Hallar el área entre la curva anterior y el eje de abscisas, entre los valores *t* = 0 y *t* = 5. ¿Qué representa el resultado?

a) La tasa de variación de los gastos de mantenimiento aumenta con el paso del tiempo.

b) $\int_0^5 (10+10t+4t^2)\,dt = \left[10t+5t^2+\frac{4t^3}{3}\right]_0^5 = \frac{1025}{3} \approx 341{,}67$

El área representa el dinero total gastado en mantenimiento de equipos los 5 primeros años y es de 34 167 euros.

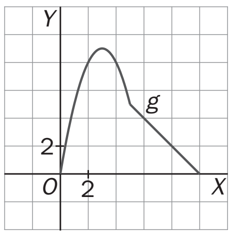


PROBLEMAS

9.67.Un publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 m de longitud y resto del contorno limitado por la función $g(x)=\begin{cases} -x^2+6x & \text{si } 0\le x\le 5 \\ -x+10 & \text{si } 5< x\le 10\end{cases}$. Dibuja el recorrido correspondiente al cartel publicitario y calcula su área.

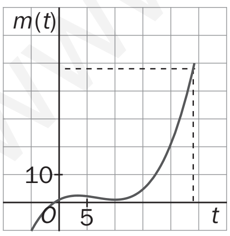
$$A=\int_0^5(-x^2+6x)\,dx+\int_5^{10}(-x+10)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^5+\left[-\frac{x^2}{2}+10x\right]_5^{10}=$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+75\right)+(-50+100)-\left(-\frac{25}{2}+50\right)=\frac{100}{3}+\frac{25}{2}=\frac{275}{6}\ \text{m}^2$$



9.68. Una fábrica arroja diariamente material a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$, siendo *m* la cantidad de material en kg, y *t*, la hora del día.
a) Esboza la gráfica de esta función en el intervalo [0, 24].
b) ¿Qué representa el área bajo esa curva y sobre el eje horizontal?
c) Calcula el material que se arroja al día.

a)



b) El área bajo la curva representa la cantidad de material arrojado en un día.

c) $\int_0^{24}(0{,}01t^3-0{,}2t^2+t+1)\,dt=\left[\frac{0{,}01t^4}{4}-\frac{0{,}2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right]_0^{24}=\frac{0{,}01\cdot 24^4}{4}-\frac{0{,}2\cdot 24^3}{3}+\frac{24^2}{2}+24=219{,}84$ kg al día

9.69. Un estudio estadístico permite establecer que en cierta ciudad, el número de hogares en los que hay ordenador viene dado por la función $f(t) = \dfrac{e^{0,1t}}{2+e^{0,1t}}$, donde t mide los años transcurridos desde el 1 de enero de 2004, y $f(t)$, en miles de hogares.
Calcula la media de hogares en los que hay ordenadores entre el 1 de enero de 2006 y el 1 de enero de 2010.

$\int_2^6 \dfrac{e^{0,1t}}{2+e^{0,1t}} = 10\left[\ln(2+e^{0,1t}\right]_2^6 \approx 1,71 = f(c)(6-2) \Rightarrow f(c) \approx \dfrac{1,71}{4} \approx 0,43$. Es decir, 430 hogares.

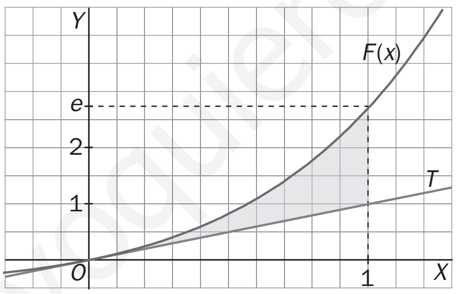
9.70. El número de personas afectadas por una enfermedad contagiosa viene dado por $N(t) = 1000(1 - e^{-0,2t})$, donde t representa el número de días transcurridos desde la aparición de la epidemia. Se acepta que el valor medio de la función $N(t)$ en el intervalo [0, 30] es una buena aproximación del número medio de enfermos por día en un período de 30 días. Calcula esa media de enfermos por día.

$$\int_0^{30} 1000(1-e^{-0,2t}) = 1000\left[t+5e^{-0,2t}\right]_0^{30} \approx 25012,39 = 30\,f(c)$$

$f(c) \approx \dfrac{25012,39}{30} \approx 834$ enfermos de media al día.

PROFUNDIZACIÓN

9.71. Sea f la función definida en el intervalo [–1, 1] por $f(x) = (ax + b)e^{kx}$, donde a, b y k son números reales, y sea la curva de la figura un trozo de su gráfica. La recta T es tangente a dicha curva en el origen.
a) Sabiendo que T pasa por (1, 1), calcula su pendiente.
b) Con el apartado anterior y sabiendo que la gráfica de f pasa por (1, e), calcula a, b y k.
c) Calcula el área sombreada.



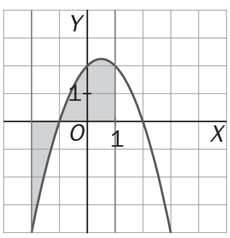
a) Como T pasa por $O(0, 0)$ y por $A(1, 1)$, su pendiente es $m = 1$.

b) Como la función pasa por el origen, debe ser $f(0) = b = 0$. Y como pasa por $B(1, e)$, debe ser $ae^k = e$. Como la pendiente de T es 1, debe ser $f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) = ae^{kx}(kx + 1)$ y $f'(0) = a = 1$. Al sustituir en $ae^k = e$, $k = 1$. Por tanto, la función es $f(x) = xe^x$.

c) La ecuación de la recta tangente es $y = x$, y el área sombreada:

$$\int_0^1 (xe^x - x)\,dx = \left[e^x(x-1) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ \text{u}^2$$

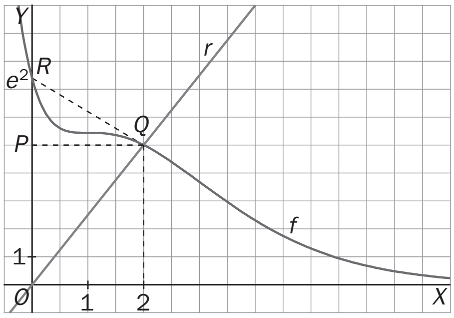
9.72. Encuentra el intervalo [a, b] para el que la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ alcanza su máximo valor.



Como $\int_a^b (2+x-x^2)\,dx$ mide la diferencia entre las áreas limitadas por la curva por encima y por debajo del eje horizontal, se obtiene el máximo valor cuando toda la región que abarca la curva esté por encima del eje horizontal, esto es, en [–1, 2].

Luego el máximo valor de la integral es: $\int_{-1}^2 (2+x-x^2)dx = \left[2x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \dfrac{9}{2}$

9.73.Sea f la función definida en R por $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$. En el dibujo se muestra un trozo de la gráfica de f, así como la recta r: $y = \dfrac{5}{2}x$.



a) Comprueba que el punto Q(2, 5) está en dicha recta y en la gráfica de f.

b) Calcula el área de los triángulos OPQ y ORQ .

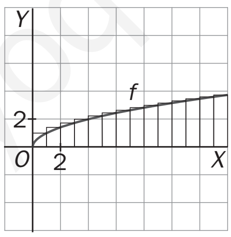
c) Calcula el área encerrada por las gráficas de f, el eje vertical y la recta r, y comprueba que el número obtenido está comprendido entre los dos números del apartado b.

a) Está en la recta, pues $\dfrac{5}{2}\cdot 2 = 5$, y también en la curva, pues $(2^2 + 1)\, e^{-2+2} = 5$.

b) OPQ tiene base 5 y altura 2, su área es 5 u^2. ORQ tiene base e^2 y altura 2, luego su área es $e^2 \approx 7{,}389$ u^2.

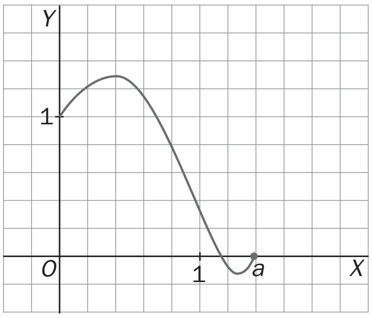
c) $\displaystyle\int_0^2 \left((x^2+1)e^{-x+2} - \frac{5}{2}x\right)dx = \left[-e^{-x+2}(x^2+2x+3) - \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 = 3e^2 - 16 \approx 6{,}167$, que está comprendido entre los valores obtenidos anteriormente.

9.74.Supón que tienes que calcular la suma de las raíces cuadradas de los 10 000 primeros números naturales. Aproxima ese valor con una integral.



$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{1000} \approx \int_0^{10000} \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right]_0^{10000} = \frac{2000000}{3} \approx 666666{,}67$$

9.75. La gráfica de la función $y = f(x)$ es la que tienes debajo. Ordena, de menor a mayor, los siguientes números.



a) $f'(1)$

b) El valor medio de $f(x)$ en el intervalo [0, a]

c) El valor medio de la función $f'(x)$ en el intervalo [0, a]

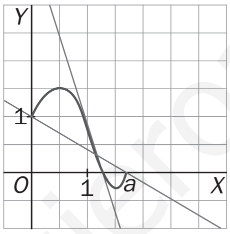
d) $\int_0^a f(x)dx$

$f\,'(1)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.
El valor medio de la función $f\,'(x)$ en el intervalo [0, a] es la pendiente de la recta que une los puntos $A(0, f(0))$ y $B(a, f(a))$.

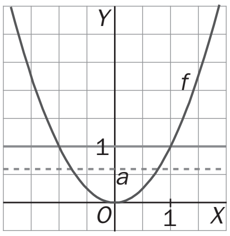
Trazando ambas rectas se observa que la $f\,'(1)$ es menor que $\frac{f(a)-f(0)}{a}$ y que ambos números son negativos.

El valor medio de f es $f(c)$ con $\int_0^a f(x)\,dx = f(c)(a-0)$, y como a es mayor que 1, entonces $\int_0^a f(x)dx > f(c)$.

Además, ambos números son positivos , pues claramente el área sobre el eje horizontal es mayor que el área por debajo del eje. Luego $f\,'(1) < \frac{f(a)-f(0)}{a} < f(c) < \int_0^a f(x)\,dx$.



9.76. (PAU) Dos hermanos heredan una parcela que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividirla en dos regiones de igual área mediante la recta horizontal $y = a$. Calcula el valor de a.



La recta $y = 1$ corta a la parábola en los puntos de abscisa $x = –1$ y $x = 1$, y la recta $y = a$ la corta en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{a}$ y $x = \sqrt{a}$.
Como se ha de dividir en dos partes de igual área mediante la recta $y = a$, tiene que ocurrir que:

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}.$$

Al resolver la integral primera se obtiene: $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$

Igualando el resultado a $\frac{2}{3}$ y despejando: $\frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{a^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0{,}63$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta en cada caso:

9.1. En Economía, el coste marginal se identifica con la derivada del coste total. En una empresa, un estudio ha concluido que el coste marginal $C_m(q)$ expresado en miles de euros en función del número q de artículos fabricados viene dado por $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$. ¿Cuál es el coste total $C_T(q)$ en miles de euros sabiendo que para 5 artículos es de 20 000 euros?

A) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q$

B) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 5$

C) $C_T(q) = 6q - 12$

D) $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$

La respuesta correcta es la D.

Una primitiva de $C_m(q) = 3q^2 - 12q - 17$ es $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + C$.

Como $C_T(5) = 20$, se puede hallar la constante C: $C_T(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 17 \cdot 5 + C = 20$, por tanto $C = 130$ y $C_T(q) = q^3 - 6q^2 - 17q + 130$.

9.2. La función $F(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x}$ definida en $(0, +\infty)$ resulta ser una primitiva de una función f definida en ese conjunto. Otra primitiva, G, de f podría ser:

A) $\dfrac{4x+2}{x^2+x}$

B) $\dfrac{3x^2+5x+2}{2(x^2+x)}$

C) $\dfrac{x^3+x^2+x-1}{x(x+1)}$

D) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+1}$

E) $2\ln|x+1| - \ln|x|$

La respuesta correcta es B.

Para que ambas sean primitivas de una misma función, deben diferir en una constante:

$$F(x) - G(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{3x^2+5x-2}{2(x^2+x)} = \frac{4x-2x-2-3x^2-5x+2}{2x(x+1)} = \frac{-3x^2-3x}{2x(x+1)} = \frac{-3x(x+1)}{2x(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

9.3. Sea S el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $a \le x \le b$ y $0 \le y \le f(x)$. Si el área de S vale 1, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $a = -1$, $b = 0$, y $f(x) = e^{-x}$

b) $a = 1$, $b = e$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{4}$, y $f(x) = \operatorname{tg} x$

d) $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, y $f(x) = \operatorname{sen} x$

A) Ninguna

B) Solo una

C) Solo dos

D) Solo tres

E) Las cuatro

La respuesta correcta es la C ya que son ciertas b y d:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -e^0 - (-e) = e - 1$. FALSA.

b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$. VEDADERA.

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\ln 1) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$. FALSA

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$. VERDADERA.

Señala en cada caso las respuestas correctas:

9.4. Sea $I = \int_{-1}^{2}\left(x^2 - 1\right)dx$.

A) I mide el área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = x^2 - 1$, e eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = -1$, $x = 2$.

B) $I = 0$

C) $I = \int_{-2}^{1}\left(1 - x^2\right)dx$

D) $I = \left[2x\right]_{-1}^{2}$

E) $I \le \int_{1}^{2}\left(x^2 - 1\right)dx$

Son correctas las afirmaciones B, C y E.

A) La función $f(x) = x^2 - 1$ es una parábola que va por debajo del eje X entre –1 y 1, así pues, I no mide el área entre – 1 y 2.

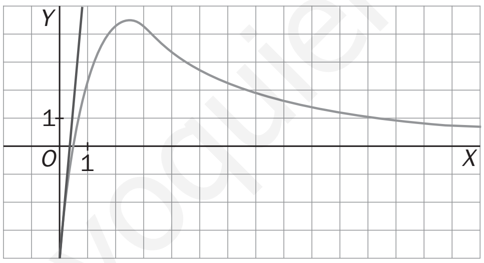
B) $\int_{-1}^{2}(x^2 - 1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{2} = 0$

C) $\int_{-2}^{1}(1 - x^2)\,dx = \left[x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = 0$

D) $\left[2x\right]_{-1}^{2} = 4 - (-2) = 6$

E) $\int_{1}^{2}(x^2 - 1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = \dfrac{4}{3}$. Entre 1 y 2 la función va siempre por encima del eje X.

9.5. La gráfica de la figura es la de una función f derivable en el intervalo [0, 10].



A) $f'(0) = 9$
B) $f'(5) > 0$

C) Cualquier primitiva de f se anula en $x = \dfrac{1}{2}$.

D) Cualquier primitiva de f es decreciente en $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

E) Cualquier primitiva de f admite un máximo relativo en $x = \dfrac{5}{2}$.

Son correctas las afirmaciones A y E.

A) La pendiente de la recta tangente el punto (0, –4) es $\dfrac{5-(-4)}{1-0} = 9$, por lo que $f'(0) = 9$.

B) La tangente el punto de abscisa 5 es decreciente y por tanto, $f\,'(5)$ debe ser negativa.

C) Al ser $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, cualquier primitiva de f tendrá un mínimo relativo en $x = \dfrac{1}{2}$.

D) Al ser f negativa en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ sus primitivas son decrecientes en dicho intervalo.

E) Para que una primitiva de f tenga un máximo es indispensable que f se anule en dicho punto.

Elije la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

9.6. Sea *f* una función continua en el intervalo [0, 4].

a) $\int_0^4 f(x)\,dx > 0$

b) $f(x) > 0$ **en [0, 4]**

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior

La respuesta correcta es C.

Si *f* es estrictamente positiva en [0, 4] entonces $\int_0^4 f(x)dx$ debe ser positiva ya que dicha integral mide el área entre la curva y el eje *X*. La otra implicación no es cierta ya que la integral definida puede ser mayor que cero sin que la función sea siempre positiva.

Señala el dato necesario para contestar:

9.7. Sea $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + be^{-x} + c\sqrt{x}$, de la que se sabe que en el punto de abscisa d la gráfica de *f* presenta tangente horizontal. Para calcular $\int_1^d f''(x)\,dx$ se tienen los siguientes datos.

a) El valor de *a*.
b) El valor de *b*.
c) El valor de *c*.
d) El valor de *d*.

A) Puede eliminarse el dato *a*.

B) Puede eliminarse el dato *b*.

C) Puede eliminarse el dato *c*.

D) Puede eliminarse el dato *d*.

E) No puede eliminarse ningún dato.

La respuesta correcta es D.

Como $f'(d) = 0$ ya que la tangente en *d* es horizontal, se obtiene: $\int_1^d f''(x)dx = f'(d) - f'(1) = 0 - f'(1) = -f'(1)$.

Además la derivada de *f* es $f'(x) = a\cos x - be^{-x} + \dfrac{c}{2\sqrt{x}}$, por tanto, para calcular $\int_1^d f''(x)dx = -f'(1)$ no hace falta el valor de *d*.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la siguiente cuestión:

9.8. Para decidir el signo de la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$, siendo f una función continua y creciente, se sabe que:

a) *f*(2) > 0 **b) *f* (0) > 0**

A) Cada información, a y b, es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen faltan más datos.

La respuesta correcta es la C.

Si $f(0) > 0$, como *f* es creciente, se deduce que *f* es positiva en el intervalo [0, 2], por lo que $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva.

En cambio si $f(2) > 0$, no se aporta ninguna información sobre el signo de la función en [0, 2] y no se puede concluir nada acerca del signo de la integral.

10 Combinatoria

ACTIVIDADES INICIALES

10.I. Unos códigos cifrados en cierto idioma tienen que estar formados por cuatro consonantes seguidas de dos vocales y a continuación seis dígitos. Tanto las consonantes como las vocales y los dígitos se pueden repetir. ¿Cuántos códigos distintos se podrán formar teniendo en cuenta que el alfabeto de ese idioma tiene 21 consonantes y 5 vocales?

$21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4{,}862025 \cdot 10^{12}$ códigos diferentes

10.II. En un polideportivo se puede practicar pádel, tenis, gimnasia, natación, esgrima y saltos de trampolín. Para realizar cada una de estas actividades se puede escoger entre dos franjas horarias en la mañana y tres en la tarde. ¿Cuántas elecciones puede hacer una persona que quiere realizar uno de estos deportes?

Se va a elegir un solo deporte, y en una de las cinco franjas horarias que ofrece el polideportivo, 2 diurnas y 3 por la tarde; por tanto, hay:

$6 \cdot 5 = 30$ elecciones diferentes

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1. En una liga de fútbol en la que participan 18 equipos, el primer clasificado acude a un campeonato europeo y el segundo tiene que ir a una eliminatoria previa. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ocupar estos dos puestos?

Hay $V_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$ formas diferentes de ocupar los dos primeros puestos.

10.2. ¿Cuántas apuestas habrá que rellenar para acertar seguro una quiniela de 14 partidos?

Habrá que rellenar $VR_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969$ apuestas.

10.3. ¿Cuántos números naturales de seis cifras distintas hay?

Hay $V_{10,6} = 151\ 200$ números con seis cifras distintas, pero aquí están incluidos los que comienzan por cero, que son $V_{9,5} = 15\ 120$, y que hay que eliminarlos; así que la solución es $V_{10,6} - V_{9,5} = 136\ 080$ números.

10.4. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar las letras de la palabra LIBRO?

Se pueden ordenar de $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas distintas.

10.5. Seis amigos van al cine y compran seis entradas con asientos consecutivos. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse?

Se pueden sentar de $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas distintas.

10.6. En un banquete de bodas, las mesas son redondas y con capacidad para ocho comensales

a) ¿De cuántas formas podrán sentarse en una de las mesas?

b) ¿Cuántas distribuciones diferentes habrá en una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

a) Como las mesas son redondas, se trata de permutaciones circulares.

Se podrán sentar de $PC_8 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ formas diferentes.

b) Como dos personas deben estar siempre juntas, se trataría de PC_7, pero como estas dos personas se pueden sentar de dos formas, habrá: $2 \cdot PC_7 = 2 \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$ distribuciones diferentes

10.7. Para acceder a una caja fuerte se tiene que introducir un número de 10 cifras. Se sabe que dicho número está formado por 5 doses, 3 cincos y 2 seises. ¿Cuántas claves diferentes se pueden formar?

$P_{10}^{5,\,3,\,2} = \dfrac{10!}{5!\;3!\;2!} = 2520$ claves diferentes

10.8. Un equipo de balonmano ha ganado una liga ganando 10 partidos, empatando 2 y perdiendo 4. ¿De cuántas formas diferentes lo ha podido hacer?

De $P_{16}^{10,\,2,\,4} = \dfrac{16!}{10!\;2!\;4!} = 120\ 120$ formas diferentes

10.9. ¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar con 8 unos, 4 equis y 2 doses?

$P_{14}^{8,\,4,\,2} = \dfrac{14!}{8!\;4!\;2!} = 45\ 045$ quinielas distintas

10.10. ¿Cuántos números mayores que un millón existen que contengan exactamente las siguientes cifras?

0, 2, 2, 3, 3, 3, 4

Con las cifras dadas se pueden formar $P_7^{3,\,2,\,1,\,1} = \dfrac{7!}{3!\;2!\;1!\;1!} = 420$ números diferentes.

Los números menores que un millón empiezan por 0, y hay $P_6^{3,\,2,\,1} = \dfrac{6!}{3!\;2!\;1!} = 60$.

Por tanto, habrá 420 – 60 = 360 números diferentes mayores que un millón.

10.11. Con 1 uno, 2 doses y 3 treses:

a) ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar?

b) ¿Cuántos de ellos son pares?

c) ¿Cuántos son divisibles por 3?

d) ¿Cuántos empiezan y terminan por 3?

a) $P_6^{3,\,2,\,1} = \dfrac{6!}{3!\;2!\;1!} = 60$ números diferentes

b) Para que sean pares deben terminar en dos; por tanto, se trata de calcular cuántos números de 5 cifras se pueden escribir con 1 uno, 1 dos y 3 treses:

$$P_5^{2,\,2,\,1} = \frac{5!}{2!\;2!\;1!} = 30 \text{ números diferentes}$$

c) Ninguno, ya que la suma de las cifras no es múltiplo de tres.

d) Como la primera y la última cifra deben ser 3, habrá $P_4^{2,\,1,\,1} = \dfrac{4!}{2!\;1!\;1!} = 12$ números diferentes que empiezan y terminan por 3.

10.12. Para decidir los ganadores de un concurso de poesía, un profesor debe elegir de jurado a 3 de sus 22 alumnos. ¿De cuántas formas diferentes puede realizar su elección?

De $C_{22,3} = \dfrac{22\cdot 21\cdot 20}{3!} = 1540$ formas diferentes

10.13. ¿Cuántas diagonales se pueden formar en un hexágono? ¿Y en un dodecágono?

Una diagonal une dos vértices no consecutivos de un polígono. En el hexágono, el número de segmentos que se pueden formar con seis puntos es $C_{6,2}$=15, pero aquí están incluidos los lados del hexágono, que unen vértices consecutivos; por tanto, un hexágono tiene $C_{6,2} - 6 = 15 - 6 = 9$ diagonales.
De forma análoga se deduce que un dodecágono tiene $C_{12,2} - 12 = 66 - 12 = 54$ diagonales.

10.14. Con las cifras 1, 2, 3, 5, 6 y 7:

a) ¿Cuántos productos diferentes se pueden hacer de tres factores sin repetirlos?

b) De todos los productos anteriores, ¿cuántos dan como resultado un múltiplo de 6?

a) Se pueden formar $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$ productos diferentes.

b) Los múltiplos de 6 pueden ser de dos formas:

– Que contengan el 2 y el 3 como factores: 4 productos.

– Que contengan el 6: $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$ productos.

El producto $2 \cdot 3 \cdot 6$ se ha contado en los dos tipos; por tanto, el número de productos diferentes que se pueden formar es 4 + 10 – 1 = 13.

10.15. Se lanzan simultáneamente 4 dados. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

Habrá $CR_{6,4} = C_{9,4} = 126$ posibles resultados.

10.16. Tenemos 6 pelotas de golf que se colorean con 3 colores diferentes. ¿De cuántas formas se pueden colorear?

De $CR_{3,6} = C_{8,6} = 28$ formas diferentes

10.17. En un restaurante de comida rápida se puede elegir entre hamburguesa con queso, sándwich vegetal, sándwich mixto, ensalada César y perrito caliente. ¿Cuántos pedidos diferentes puede hacer un grupo de 6 amigos.

Pueden hacer $CR_{5,6} = C_{10,6} = 210$ pedidos diferentes.

10.18. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}-\binom{9}{4}$

b) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$

a) Como $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$ y $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}=\binom{9}{4}$, se tiene que $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}-\binom{9}{4}=\binom{8}{3}+\binom{8}{4}-\binom{9}{4}=\binom{9}{4}-\binom{9}{4}=0$

b) Como $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$, se tiene que $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=2^4-\binom{4}{4}=16-1=15$.

10.19. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{25}\right]\cdot 4!}{630}$.

$$\frac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{25}\right]\cdot 4!}{630}=\frac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{4}\right]\cdot 4!}{630}=\frac{\binom{30}{4}\cdot 4!}{630}=\frac{\frac{30!}{4!26!}\cdot 4!}{630}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{630}=1044$$

10.20. Simplifica la expresión $\dfrac{2^{n-3}(n+2)\ !}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}$.

$$\frac{2^{n-3}(n+2)\ !}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}=\frac{(n+2)\ !}{2^2\,\frac{(n+2)\ !}{n!2!}}=\frac{n\ !}{2}$$

10.21. Desarrolla el binomio $(2x+y)^5$.

$(2x + y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 \cdot y + 10(2x)^3 \cdot y^2 + 10(2x)^2 \cdot y^3 + 5 \cdot 2x \cdot y^4 + y^5 =$

$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$

10.22. Calcula el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(x-2)^6$.

Será $\binom{6}{2}(-2)^2 = 60$.

10.23. Calcula $(x+1)^5-(x-1)^5$.

$(x + 1)^5 - (x - 1)^5 = (x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1) - (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1) = 10x^4 + 20x^2 + 2$

10.24. Calcula $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$.

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 = x^6 - 6x^5\cdot\frac{1}{x} + 15x^4\cdot\frac{1}{x^2} - 20x^3\cdot\frac{1}{x^3} + 15x^2\cdot\frac{1}{x^4} - 6x\cdot\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} =$$

$$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

10.25. ¿De cuántas formas diferentes pueden saltar al campo los 11 futbolistas de un equipo, sabiendo que el primero que tiene que saltar siempre es el capitán?

Como importa el orden, intervienen todos los elementos y no hay elementos iguales, se trata de permutaciones, y como el capitán tiene que salir primero, habrá P_{10} = 3 628 800 formas distintas de saltar al campo.

10.26. En una comunidad son 24 vecinos y hay que designar un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer?

Como importa el orden y no puede haber repeticiones, ya que una persona no puede ocupar dos cargos, se trata de variaciones sin repetición, y se podrán hacer: $V_{24,3} = 24 \cdot 23 \cdot 22$ = 12 144 juntas diferentes.

EJERCICIOS

Principio de multiplicación

10.27. Un juego consiste en crear personajes. Para ello se dispone de 5 rostros, 10 cuerpos y 8 pares de piernas. ¿Cuántos personajes se pueden crear?

Se pueden crear $5 \cdot 10 \cdot 8 = 400$ personajes.

10.28. Un conductor de autobús tiene que hacer la ruta Madrid-Barcelona efectuando una parada en Zaragoza. Para ir de Madrid a Zaragoza tiene 3 rutas posibles, y para ir de Zaragoza a Barcelona, 5. ¿Cuántas rutas diferentes puede hacer el conductor?

Puede hacer $3 \cdot 5 = 15$ rutas diferentes.

10.29. Los premios Oscar los otorga anualmente la Academia de las Artes y las Ciencias Cinematográficas en Los Ángeles (California). En la ceremonia se entregan 24 premios por distintas categorías (mejor película, mejor actriz, mejor fotografía, etc.). Para cada premio hay cinco posibles candidatos. ¿De cuántas formas distintas se pueden conceder estos premios?

Se pueden otorgar los premios de $5 \cdot 5\ldots$ (24 veces)$\ldots \cdot 5 = 5^{24} \approx 5{,}96 \cdot 10^{16}$ formas diferentes.

10.30. Unos espías se comunican información mediante códigos formados por dos colores (iguales o distintos) elegidos de entre cinco, seguidos de dos letras (iguales o distintas) de nuestro alfabeto. ¿Cuántos códigos distintos podrán formar?

Podrán formar $5 \cdot 5 \cdot 26 \cdot 26 = 16\,900$ códigos distintos.

10.31. En una Escuela Oficial de Idiomas ofrecen las enseñanzas de inglés, francés, alemán, italiano y portugués, todos ellos en un turno matinal, dos turnos de tarde y uno nocturno. ¿Cuántas posibilidades de elección tiene una persona que quiera estudiar un idioma?

Se va a elegir un solo idioma, y en uno de los cuatro turnos que ofrece la escuela; por tanto, hay:

$5 \cdot 4 = 20$ elecciones diferentes.

Variaciones sin repetición

10.32. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{V_{x,2}}{2} = \dfrac{V_{x-1,3}}{4}$

b) $V_{x+2,3} = 5\,V_{x+1,2}$

a) $\dfrac{V_{x,2}}{2} = \dfrac{V_{x-1,3}}{4} \Rightarrow 4x(x-1) = 2(x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow 2x^3 - 16x^2 + 26x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 6$

La solución $x = 1$ no es válida, ya que $V_{0,3}$ no tiene sentido. Por tanto, $x = 6$.

b) $V_{x+2,3} = 5V_{x+1,2} \Rightarrow (x+2)(x+1)x = 5(x+1)x \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3,\ x = -1$

La única solución válida es $x = 3$.

10.33. En una clase de 22 alumnos, todos quieren sentarse en los cinco asientos de la primera fila. ¿De cuántas formas puede asignar el profesor esos asientos?

De $V_{22,5} = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 3\,160\,080$ formas diferentes

10.34. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos impares? ¿Y con los pares?

Como hay 5 cifras impares, se podrán formar $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números diferentes.

Con los dígitos pares se pueden formar $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números. Ahora bien, de estos hay que quitar los que empiezan por 0, ya que no son números de tres cifras.

Quedarán, por tanto, $60 - V_{4,2} = 60 - 12 = 48$ números de tres cifras pares diferentes.

10.35. Una línea de cercanías comunica 10 poblaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir teniendo en cuenta que en cada billete figura en primer lugar la localidad de origen, seguida de la localidad de destino, y por último se indica si el billete es de ida o de ida y vuelta?

El número total de billetes distintos será: $2 \cdot V_{10,2} = 180$.

10.36. Para un nuevo club deportivo se quiere hacer una bandera tricolor (tres colores distintos) que conste de tres franjas verticales. Si para crearla se dispone de 10 colores distintos, ¿cuántas banderas diferentes se pueden realizar?

Se pueden diseñar $V_{10,3} = 720$ banderas distintas.

Si se pueden repetir los colores de los extremos, tendremos que añadir $V_{10,2} = 90$ banderas más, por lo que habría 810 banderas distintas.

Variaciones con repetición

10.37. Resuelve estas ecuaciones.

a) $VR_{x,2} - 5VR_{x+1,2} = 6x - 5$
b) $VR_{x,3} + VR_{x-1,2} = VR_{x-1,2} + 5VR_{x,2}$

a) $VR_{x,2} - 5VR_{x+1,2} = 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 5(x + 1)^2 = 6x - 5 \Rightarrow -4x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -4$

No son soluciones válidas.

b) $VR_{x,3} + VR_{x-1,2} = VR_{x-1,2} + 5VR_{x,2} \Rightarrow x^3 + (x - 1)^2 = (x - 1)^2 + 5x^2 \Rightarrow x^3 - 5x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 5$.

La única solución válida es $x = 5$.

10.38. La Organización de las Naciones Unidas decidió unificar las abreviaturas de los países, asignando a cada uno tres letras de las 26 del alfabeto latino. Así, ESP (España), EEU (Estados Unidos), FRA (Francia), etc. ¿Cuántas abreviaturas de este tipo podrán formarse?

Se pueden formar un máximo de $VR_{26,3} = 17\,576$ abreviaturas diferentes.

10.39. A un polideportivo se puede acceder y salir por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede acceder y salir del mismo una persona?

Puede acceder y salir del polideportivo de $VR_{5,2} = 5^2 = 25$ formas distintas.

10.40. En una revista, cada semana tienen una sección donde analizan los signos del Zodíaco. A cada uno de los 12 signos le asignan un número entero entre 0 y 5 en las categorías de salud, dinero, amor, amistades y familia. ¿Cuántos horóscopos distintos puede hacer la revista cada semana?

Para cada signo hay $VR_{6,5} = 6^5 = 7776$ posibilidades, luego podrá hacer $12 \cdot 7776 = 93\,312$ horóscopos diferentes.

10.41. Los números de los décimos de la Lotería Nacional tienen cinco cifras que se pueden repetir. Si por error un día se les olvida introducir en los cinco bombos el número 0, ¿cuántos posibles números habrá como candidatos al premio?

Se pueden formar $VR_{9,5} = 9^5 = 59\,049$ números distintos.

10.42. Al girar una ruleta puede salir como resultado cualquier número natural comprendido entre el 0 y el 36 (ambos inclusive). Si se gira la ruleta tres veces, ¿cuántos resultados pueden obtenerse?

Podrá haber $VR_{37,3} = 37^3 = 50\ 653$ resultados diferentes.

Permutaciones ordinarias

10.43. A una cumbre europea acudieron 12 presidentes de gobierno.

a) A la hora de hacerse la foto conmemorativa se colocaron en fila. ¿De cuántas formas distintas se pudieron colocar?

b) A la hora de comer se sentaron en una mesa circular. ¿De cuántas formas distintas pudieron colocarse?

a) De $P_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$ formas diferentes

b) De $PC_{12} = 11! = 39\ 916\ 800$ formas diferentes

10.44. a) Con las letras de la palabra AMIGO, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?

b) ¿Cuántas empiezan por A?

c) ¿Cuántas empiezan por AMI?

a) $P_5 = 5! = 120$ ordenaciones

b) Por A empiezan $P_4 = 4! = 24$ ordenaciones.

c) Por AMI empiezan $P_2 = 2! = 2$ ordenaciones.

10.45. En el banquete que sigue a una boda se sientan en la mesa presidencial 10 personas, incluidos los novios. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar con la condición de que los novios no se separen si la mesa es lineal? ¿Y si la mesa es circular?

Como los novios se tienen que sentar juntos, contarán como un único elemento; por tanto, podrán sentarse de $2 \cdot P_9 = 2 \cdot 9! = 725\ 760$ formas diferentes.

Si la mesa fuera circular, se podrían sentar de $2 \cdot PC_9 = 2 \cdot 8! = 80\ 640$ formas diferentes.

10.46. ¿De cuántas formas distintas se pueden situar en una fila 5 chicas y 8 chicos de manera que las chicas estén las primeras y después estén los chicos?

Se podrán sentar de $P_5 \cdot P_8 = 5! \cdot 8! = 4\ 838\ 400$ formas diferentes.

Permutaciones con repetición

10.47. Un jugador de quinielas tiene la corazonada de que esta jornada va a haber 7 unos, 4 equis y 3 doses. ¿Cuántas quinielas deberá rellenar para acertar con seguridad si se cumple su corazonada?

$P_{14}^{7,\,4,\,3} = \dfrac{14!}{7!\ 4!\ 3!} = 120\ 120$ quinielas diferentes.

10.48. Doce amigos se van de viaje. Para ello utilizarán dos coches y una moto. En cada coche irán 5 amigos, y en la moto, 2. Si cada vehículo lo tiene que conducir su dueño, ¿de cuántas formas pueden distribuirse los 9 amigos restantes?

Pueden distribuirse de $P_9^{4,\,4,\,1} = \dfrac{9!}{4!\ 4!\ 1!} = 630$ formas diferentes.

10.49. Con las letras de la palabra MERMELADA, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?

Pueden hacerse $P_9^{2,\,2,\,2,\,1,\,1,\,1} = \dfrac{9!}{2!\;2!\;2!\;1!\;1!\;1!}$ = 45 360 ordenaciones diferentes.

10.50. Los 11 interruptores de un cuadro eléctrico pueden estar en dos posiciones: ON y OFF. ¿De cuántas formas diferentes podrán estar los interruptores, sabiendo que exactamente cuatro de ellos están en la posición OFF?

Los interruptores pueden estar de $P_{11}^{7,\,4} = \dfrac{11!}{7!\;4!}$ = 330 formas diferentes.

10.51. Catorce montañeros deciden acampar, para lo cual disponen de tres tiendas de campaña de diferentes capacidades. En una pueden dormir ocho personas; en otra, cuatro, y en otra, dos. ¿De cuántas formas diferentes se pueden organizar para dormir en las tres tiendas?

Pueden organizarse de $P_{14}^{8,\,4,\,2} = \dfrac{14!}{8!\;4!\;2!}$ = 45 045 formas diferentes.

10.52. ¿Cuántos números mayores que un millón pueden escribirse con las cifras 0, 2, 2, 3, 3, 3, 3?

Con esas cifras se pueden formar $P_7^{4,\,2,\,1} = \dfrac{7!}{4!\;2!\;1!}$ = 105 números distintos. De estos, son mayores que un millón los que no empiezan por 0.

Por 0 empiezan $P_6^{4,\,2} = \dfrac{6!}{4!2!}$ = 15 números. Por tanto, habrá 105 – 15 = 90 números mayores que un millón.

Combinaciones ordinarias

10.53. A una reunión acudieron 20 personas. Para saludarse dos personas se daban la mano. Si todo el mundo se saludó, ¿cuántos estrechamientos de manos hubo?

Hubo $C_{20,2}$ = 190 estrechamientos de manos.

10.54. Con 10 puntos del espacio, de los que 3 no están nunca alineados, ¿cuántos triángulos distintos se pueden formar?

Se pueden formar $C_{10,3}$ = 120 triángulos diferentes.

10.55. Una persona quiere comprar una pizza de cuatro ingredientes. Si el establecimiento le ofrece 25 ingredientes y el cliente elige todos distintos, ¿cuántas posibilidades tiene para realizar la pizza?

Se pueden realizar $C_{25,4}$ = 12 650 pizzas diferentes.

10.56. Las materias troncales y optativas que oferta un centro para cuarto de ESO son:
Troncales: Matemáticas, Física y Química, Latín, Francés, Informática, Biología y Geología, Tecnología, Educación Plástica y Música.
Optativas: Botánica aplicada, Energías renovables, Imagen y Expresión y Cultura clásica.
Un alumno debe matricularse de cuatro materias troncales y dos optativas. ¿Cuántas elecciones diferentes puede hacer?

Un alumno puede realizar $C_{9,4} \cdot C_{4,2} =$ 126 · 6 = 756 elecciones diferentes.

10.57. En un examen de Matemáticas, Sara tiene que elegir 8 ejercicios de los 10 que le ha puesto el profesor. ¿Cuántas posibilidades de elección tiene?

Sara tiene $C_{10,8}$ = 45 formas diferentes de hacer el examen.

10.58. En una liga de balonmano de 20 equipos, el campeón asciende una categoría, y los dos últimos descienden a una categoría inferior. ¿De cuántas formas se puede elegir a estos equipos?

Se los puede elegir de $20 \cdot C_{19,2} = 20 \cdot 171 = 3420$ formas diferentes.

10.59. La diferencia entre el número de variaciones de *m* objetos formados de 2 en 2 y el de combinaciones de *m* objetos tomados de 2 en 2 es 28. Halla el número de objetos.

Se trata de resolver la ecuación $V_{m,2} - C_{m,2} = 28$.

$$m(m-1) - \frac{m!}{(m-2)!\,2!} = 28 \Rightarrow m(m-1) - \frac{m\,(m-1)}{2} = 28 \Rightarrow m(m-1) = 56 \Rightarrow m^2 - m - 56 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ m = -7 \rightarrow \text{no vale} \end{cases} \Rightarrow m = 8$$

Combinaciones con repetición

10.60. Resuelve la ecuación $CR_{x,2} - C_{x,2} = x$.

$$CR_{x,2} - C_{x,2} = x \Rightarrow C_{x+1,2} - C_{x,2} = x \Rightarrow \binom{x+1}{2} - \binom{x}{2} = x$$

Aplicando las propiedades de los números combinatorios, se puede expresar $\binom{x+1}{2} - \binom{x}{2} = \binom{x}{1} = x$

Por tanto, esta ecuación se verifica para cualquier número natural positivo.

10.61. Una célebre marca de helados ofrece a sus clientes 20 sabores distintos. Si un cliente quiere que le preparen una copa con tres bolas:

a) ¿Cuántas copas de helado distintas le pueden ofrecer si los tres sabores son distintos?

b) ¿Y si se pueden repetir sabores?

a) $C_{20,3}$ = 1140 copas diferentes

b) $CR_{20,3} = C_{22,3}$ = 1540 copas diferentes

10.62. Si tenemos 50 clips iguales y los queremos guardar en cuatro recipientes, ¿de cuántas formas distintas lo podemos hacer?

De $CR_{4,50} = C_{53,50}$ = 23 426 formas diferentes

10.63. Si se lanzan simultáneamente 12 monedas de 1 €, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?

Se pueden obtener $CR_{2,12} = C_{13,12}$ = 13 resultados distintos.

10.64. Una frutería hace centros de frutas compuestos por peras, mangos y plátanos. Si en cada centro se ponen 12 piezas de fruta, ¿cuántos centros diferentes pueden hacerse?

Pueden hacerse $CR_{3,12} = C_{14,12}$ = 91 centros diferentes.

10.65. ¿Cuántas fichas tendrá un dominó en el que también intervienen el 7 y el 8?

El dominó tendrá $CR_{9,2} = C_{10,2} = 45$ fichas.

10.66. En un restaurante ofrecen cinco ingredientes diferentes para añadir a una ensalada. Si la oferta del momento es elegir dos ingredientes, ¿cuántas ensaladas diferentes se pueden elaborar?

Se podrán elaborar $CR_{5,2} = C_{6,2} = 15$ ensaladas diferentes.

10.67. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas hay de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 5$? (Idea: relaciona este problema con el ejercicio 96a.)

Es un problema análogo al de guardar 5 bolas iguales en 8 urnas distintas, ya que no tenemos más que definir x_1 como el número de bolas que van a parar a la urna uno, x_2 como el número de bolas que van a parar a la urna dos, y así sucesivamente.

Como en total introducimos 5 bolas, entonces $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 5$.

Habrá, por tanto, $CR_{8,5} = C_{12,5} = 792$ soluciones posibles.

Números combinatorios y binomio de Newton

10.68. Simplifica $\binom{2010}{1591} + \binom{2010}{1592}$.

Basta con aplicar la propiedad 3 de los números combinatorios.

$$\binom{2010}{1591} + \binom{2010}{1592} = \binom{2011}{1592}$$

10.69. Calcula la suma: $\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \cdots + \binom{12}{11} + \binom{12}{12}$.

Aplicando la propiedad 4 de los números combinatorios se tiene:

$$\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \cdots + \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = 2^{12} = 4096$$

10.70. Desarrolla $(2x - y)^6$.

$$(2x - y)^6 = \binom{6}{0}(2x)^6 - \binom{6}{1}(2x)^5 y + \binom{6}{2}(2x)^4 y^2 - \binom{6}{3}(2x)^3 y^3 + \binom{6}{4}(2x)^2 y^4 - \binom{6}{5} 2xy^5 + \binom{6}{6} y^6 =$$

$$= 64x^6 - 6 \cdot 32x^5 y + 15 \cdot 16x^4 y^2 - 20 \cdot 8x^3 y^3 + 15 \cdot 4x^2 y^4 - 6 \cdot 2xy^5 + y^6 =$$

$$= 64x^6 - 192x^5 y + 240x^4 y^2 - 160x^3 y^3 + 60x^2 y^4 - 12xy^5 + y^6$$

10.71. Encuentra el término independiente del desarrollo $\left(\frac{5}{x^2} - x^5\right)^{14}$.

Los términos de este desarrollo serán de la forma $(-1)^k \binom{14}{k} \left(\frac{5}{x^2}\right)^{14-k} x^{5k}$, con $k = 0, 1, \ldots, 14$.

Calculemos para qué valor de k se obtiene el término independiente.

$$\frac{x^{5k}}{x^{2(14-k)}} = x^{5k - 28 + 2k} = x^0 = 1 \Leftrightarrow 5k + 2k = 28 \Rightarrow k = 4$$

El término independiente será $(-1)^4 \binom{14}{4} \frac{5^{10}}{x^{20}} x^{20} = \binom{14}{4} 5^{10} = 9\,775\,390\,625$.

PROBLEMAS

10.72. Calcula cuántos números capicúas hay de:

a) Dos cifras.

b) Tres cifras.

c) Cuatro cifras.

d) Cinco cifras.

e) *n* cifras, con *n* par.

Se trata de aplicar el principio de multiplicación:

a) De dos cifras hay 9.

b) De tres cifras hay $9 \cdot 10 = 90$.

c) De cuatro cifras hay $9 \cdot 10 = 90$.

d) De cinco cifras hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

e) De n cifras, con n par, hay $9 \cdot 10^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}$.

10.73. Una máquina de un casino tiene una pantalla donde se ven tres ruedas, cada una de las cuales tiene 6 figuras diferentes. ¿Cuántas pantallas diferentes pueden aparecer?

Pueden aparecer $VR_{6,3} = 6^3 = 216$ pantallas diferentes.

10.74. IATA son las siglas de International Airline Transportation Association. Para localizar los distintos aeropuertos de todo el mundo, la IATA asigna a cada uno un código de tres letras, repetidas o no. Así, por ejemplo, el código del aeropuerto de Barcelona es BCN, y el del aeropuerto Kennedy de Nueva York es JFK. ¿Cuántos códigos distintos se pueden asignar con las 26 letras del alfabeto?

Se podrán formar $VR_{26,3} = 17\,576$ códigos distintos.

10.75. Un director de teatro está haciendo un *casting* para cubrir 10 personajes distintos, 4 de hombres y 6 de mujeres. Si a las pruebas asisten 20 hombres y 23 mujeres, ¿de cuántas formas distintas se pueden asignar los personajes?

Los papeles de los hombres se pueden asignar de $V_{20,4} = 116\,280$ formas.

Y los de las mujeres, de $V_{23,6} = 72\,681\,840$ formas.

En total, los papeles se pueden asignar de $116\,280 \cdot 72\,681\,840 \approx 8{,}45 \cdot 10^{12}$ formas diferentes.

10.76. Permutando de todos los modos posibles las cifras del número 555 677 se forman distintos números que ordenaremos de menor a mayor.

a) ¿Cuántos números se obtienen?

b) ¿Qué número ocupa el lugar 20 en esta ordenación?

a) $P_6^{3,\,1,\,2} = \dfrac{6!}{3!\,1!\,2!} = 60$ números

b) Por 5 empiezan $P_5^{2,\,1,\,2} = \dfrac{5!}{2!\,1!\,2!} = 30$ números.

Por 55 empiezan $P_4^{1,\,1,\,2} = \dfrac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$ números.

Por 56 empiezan $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$ números.

Por 565 empiezan $P_3^{2} = \dfrac{3!}{2!} = 3$ números.

Por tanto, la ordenación que ocupa el lugar 20 es 565 757.

10.77. Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones de las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, se desea saber qué lugar ocupa la permutación *CADFEB*.

En total hay $P_6 = 6! = 720$ permutaciones.

Empiezan por $A \rightarrow P_5 = 5! = 120$.

Empiezan por $B \rightarrow P_5 = 5! = 120$.

Empiezan por $CAB \rightarrow P_3 = 3! = 6$.

Empiezan por $CADB \rightarrow P_2 = 2! = 2$.

Empiezan por $CADE \rightarrow P_2 = 2! = 2$.

Luego la permutación *CADFBE* ocupa el puesto 251.º, y la que se nos pide, *CADFEB*, el 252.º

10.78. En el departamento de Matemáticas de un instituto hay 8 profesores, en el de Física y Química hay 3 y en el de Biología hay 4. Se quiere crear un tribunal de 6 profesores que juzgue los trabajos científicos de varios alumnos. ¿De cuántas formas se pueden agrupar en los siguientes casos?
a) Puede pertenecer al comité cualquier profesor de estos departamentos.
b) El tribunal estará compuesto por 3 profesores de Matemáticas, 2 de Biología y 1 de Física y Química.
c) En el tribunal estarán los respectivos jefes de departamento y un profesor más de cada departamento.

a) $C_{15,6} = 5005$ tribunales distintos

b) $C_{8,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{3,1} = 1008$ tribunales distintos

c) $C_{7,1} \cdot C_{3,1} \cdot C_{2,1} = 42$ tribunales distintos

10.79. Halla el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. (Nota: supondremos que el alfabeto está formado por 26 letras.)

El total de grupos de siglas que se pueden formar con las iniciales es $VR_{26,3} = 26^3 = 17\,576$. Por tanto, el número mínimo de habitantes será de 17 577.

10.80. Para guardar 7 balones iguales de voleibol, el profesor de educación física dispone de cinco armarios. ¿De cuántas formas distintas puede guardar los balones?

De $CR_{5,7} = C_{11,7} = 330$ formas diferentes

10.81. En una urna hay 10 bolas de distintos colores. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Repetimos la operación cinco veces:

a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

b) ¿Cuántos habría si no se devolviese la bola a la urna?

a) $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ resultados

b) $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ resultados

10.82. Se quieren entregar 3 premios entre los 14 participantes de un concurso. Calcula de cuántas formas se pueden repartir si:

a) Los premios son distintos y se puede dar más de un premio a una misma persona.

b) Los premios son distintos y no se puede dar más de un premio a una misma persona.

c) Los premios son iguales y no se puede dar más de un premio a una misma persona.

d) Los premios son iguales y se puede dar más de un premio a una misma persona.

a) De $VR_{14,3} = 14^3 = 2744$ formas diferentes

b) De $V_{14,3} = 2184$ formas diferentes

c) De $C_{14,3} = 364$ formas diferentes

d) De $CR_{14,3} = C_{16,3} = 560$ formas diferentes

10.83. En una clase hay 20 alumnos. Se quieren hacer 4 grupos de 5 alumnos cada uno. ¿De cuántas formas distintas se pueden hacer estos grupos?

De $C_{20,5} \cdot C_{15,5} \cdot C_{10,5} \cdot C_{5,5} \approx 1{,}17 \cdot 10^{10}$ formas diferentes pueden hacerse los grupos.

10.84. En un partido de baloncesto, un jugador ha lanzado 15 tiros libres y ha obtenido un porcentaje de aciertos del 80%. ¿De cuántas formas distintas ha podido lanzar los tiros libres?

Si ha obtenido un 80% de aciertos, significa que ha encestado 12 y fallado 3. Por tanto, habrá podido tirar de $C_{15,12} = 455$ formas diferentes, o bien $PR_{15}^{12,3} = \frac{15!}{12!3!} = 455$.

10.85. Los códigos de identificación de algunos motores están formados por cinco dígitos, repetidos o no, seguidos de tres letras que no se pueden repetir. ¿Cuántos códigos diferentes se pueden formar si el alfabeto tiene 26 letras?

Habrá un total de $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ formas diferentes de códigos con cinco dígitos.

Las tres letras se pueden combinar de $V_{26,3} = 15\,600$ formas diferentes.

En total habrá $100\,000 \cdot 15\,600 = 1\,560\,000\,000$ códigos distintos.

10.86. Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar que sean divisibles por 3?

Para que un número sea divisible por tres, la suma de sus cifras tiene que ser múltiplo de tres. Distinguimos varios casos:

Cifras utilizadas	Suma	¿Múltiplo de tres?
1, 2, 3, 4	10	No
1, 2, 3, 5	11	No
1, 2, 4, 5	12	Sí
1, 3, 4, 5	13	No
2, 3, 4, 5	14	No

Luego para que el número sea múltiplo de tres debe estar formado por las cifras 1, 2, 4 y 5. Con esas cifras se pueden formar $P_4 = 4! = 24$ números.

10.87. A un alumno le han tocado 5 entradas para el teatro. Si una es para él, ¿de cuántas formas puede repartir las 4 entradas restantes entre sus 23 compañeros de clase?

Si se entiende que no le va a dar más de una entrada a un compañero, de $C_{23,4} = 8855$ formas diferentes.

Si se entendiese que le puede dar más de una entrada a un compañero, de $CR_{23,4} = C_{26,4} = 14\,950$ formas diferentes.

10.88. Si hay 36 maneras diferentes de seleccionar dos personas de un determinado grupo, ¿cuántas personas forman ese grupo?

Sea x el número de personas de ese grupo. Como se verifica que $C_{x,2} = 36$, entonces:

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} = 36 \Rightarrow x(x-1) = 72 \Rightarrow x^2 - x = 72 \Rightarrow x = -8,\ x = 9$$

La única solución válida es $x = 9$.

10.89. En una tienda de informática disponen de monitores de cuatro marcas diferentes, de teclados de tres marcas diferentes y de ratones de cinco marcas diferentes.
¿De cuántas maneras podemos seleccionar seis monitores, seis teclados y seis ratones?

Los monitores los elegimos de $CR_{4,6} = C_{9,6} = 84$ formas diferentes.

Los teclados los elegimos de $CR_{3,6} = C_{8,6} = 28$ formas diferentes.

Los ratones los elegimos de $CR_{5,6} = C_{10,6} = 210$ formas diferentes.

Podremos elegir los seis monitores, seis teclados y seis ratones de $84 \cdot 28 \cdot 210 = 493\,920$ formas diferentes.

10.90. Un instituto ha comprado libros para realizar préstamos. Los libros que ha adquirido son 7 de Lengua, 7 de Matemáticas, 5 de Inglés y 4 diccionarios.
¿De cuántas formas pueden colocarse los libros en un estante de tal manera que vayan juntos los de la misma materia?

Se pueden colocar de $4! \cdot P_7 \cdot P_7 \cdot P_5 \cdot P_4 = 4! \cdot 7! \cdot 7! \cdot 5! \cdot 4! \approx 1{,}75 \cdot 10^{12}$ formas diferentes.

10.91. Ocho estudiantes de medicina van a asistir a unas jornadas de atención primaria. A la misma hora hay programadas cuatro ponencias en salas distintas.
¿De cuántas formas pueden distribuirse en las diferentes ponencias?

Pueden distribuirse en las diferentes ponencias de $CR_{4,8} = C_{11,8} = 165$ formas.

10.92. La cafetería de un instituto ofrece a sus alumnos 7 tipos de bocadillos.

a) ¿De cuántas formas se pueden elegir 12 bocadillos?

b) ¿De cuántas formas se pueden elegir 12 bocadillos si al menos tiene que haber uno de cada tipo?

a) Se pueden elegir de $CR_{7,12} = C_{18,12} = 18\,564$ formas.

b) En este caso habrá uno de cada tipo y solo hay que elegir los cinco restantes; por tanto, se elegirán de $CR_{7,5} = C_{11,5} = 462$ formas.

10.93. Una persona ha escrito 12 cartas dirigidas a 12 personas distintas, con sus correspondientes sobres. A la hora de meter las cartas en los sobres le llaman por teléfono y, sin fijarse, va introduciendo al azar las cartas en los sobres.

a) ¿De cuántas formas distintas podrá rellenar los sobres?

b) ¿En cuántas de las formas anteriores ocurriría que la carta dirigida a una persona concreta esté en su sobre correspondiente?

c) ¿En cuántas de las formas anteriores las cartas dirigidas a cuatro personas concretas estarían en su sobre?

a) Podrá rellenar los sobres de $P_{12} = 479\,001\,600$ formas diferentes.

b) En $P_{11} = 39\,916\,800$ de las formas anteriores habrá una carta correcta.

c) En $P_8 = 40\,320$ formas habrá cuatro cartas dirigidas a las personas adecuadas.

10.94. En el código Morse, cada símbolo es una sucesión de puntos (·) y rayas (–).

a) ¿Cuántos símbolos diferentes se pueden formar con 3 rayas y 5 puntos?

b) ¿Cuántos símbolos se pueden representar con sucesiones de puntos y rayas de longitud como mucho 4?

c) ¿Hasta qué longitud de sucesiones de puntos y rayas hay que llegar si se quieren representar las 27 letras del alfabeto castellano y las 10 cifras significativas?

a) Se pueden formar $P_8^{3,5} = \dfrac{8!}{3!5!}$ = 56 símbolos diferentes.

b) Los símbolos que se pueden representar con *n* puntos y rayas, de los que *m* son puntos y *m* – *n* son rayas, coinciden con las formas de elegir las *m* posiciones de los puntos de entre las *n* posiciones totales. De esta manera:

Con 1 punto o raya: $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2$. Con 3 puntos o rayas: $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$ = 2^3 = 8.

Con 2 puntos o rayas: $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ = 2^2 = 4. Con 4 puntos o rayas: $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ = 2^4 = 16.

En total son 2 + 4 + 8 + 16 = 30 sucesiones distintas.

c) Si se llega solo hasta longitud 4, se tienen 30 sucesiones distintas, lo que no basta para representar 37 símbolos. Las posibles sucesiones de longitud 5 son:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5 = 32$$

que unidas a las 30 anteriores dan 62 símbolos. Por tanto, basta con utilizar sucesiones de longitud como mucho 5.

PROFUNDIZACIÓN

10.95. Si $n \le m$, demuestra que $n!$ es un divisor de $m!$.

Como $n \le m$, tendremos: $m! = m(m-1)(m-2)\ldots n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = m(m-1)\ldots(n+1)\,n!$
Por tanto, $n!$ es el divisor de $m!$

10.96. Introducimos 8 bolas en 5 urnas.

a) ¿De cuántas maneras podemos hacerlo si las bolas son del mismo color?

b) ¿Y si cada bola es de un color diferente?

c) ¿Y si las bolas son del mismo color y exigimos que ninguna urna pueda quedar vacía?

d) ¿Y si cada bola es de un color diferente y exigimos que ninguna urna pueda quedar vacía?

a) Como las bolas son indistinguibles, podremos introducirlas en las urnas de $CR_{5,8} = C_{12,8}$ = 495 formas diferentes.

b) En este caso, las bolas son distinguibles y se podrán introducir de $VR_{5,8} = 5^8$ = 390 625 formas diferentes.

c) Si ninguna urna puede quedar vacía, introducimos una bola en cada urna, de manera que solo tenemos que distribuir las tres bolas restantes en las cinco urnas, lo que podremos hacer de $CR_{5,3} = C_{7,3}$ = 35 formas.

d) Primero introducimos una bola en cada urna, que en este caso puede hacerse de $V_{8,5}$ = 6720 formas. A continuación se distribuyen las tres bolas restantes en las cinco urnas, lo que puede hacerse de

$VR_{5,3}$ = 125 formas.

Aplicando el principio de multiplicación obtenemos el número de formas de introducir las 8 bolas en las 5 urnas: 6720 · 125 = 840 000.

10.97. Demuestra que si $n \geq 5$, 10 es un divisor de $n!$.

Si $n \geq 5$, entonces $n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$, que es múltiplo de 10.

10.98. ¿En cuántos ceros acaba 100!?

$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

El número de ceros en el que acaba este número es el número de veces que aparece el factor 10 en su factorización.

Como $10 = 2 \cdot 5$, el número de veces que aparece el factor 10 será el mínimo de los exponentes de 2 y 5 en su factorización en factores primos. Este mínimo se alcanzará, obviamente, en el exponente de 5.

Entre 1 y 100 hay 20 múltiplos de 5 y cuatro múltiplos de 25, con lo cual el exponente de 5 será 24, que será el número de ceros en el que acaba 100!

10.99. Hemos construido un cubo y disponemos de 6 colores diferentes para pintar sus caras. ¿De cuántas formas distintas lo podemos hacer?

Pintamos una cara de un color. Para pintar su opuesto disponemos de cinco colores posibles. Para pintar sus caras laterales disponemos de cuatro colores, pero se trata de permutaciones circulares.

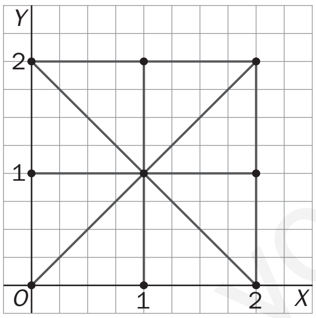
Por tanto, habrá un total de $5 \cdot PC_4 = 5 \cdot 3! = 30$ formas distintas.

10.100. Consideremos los nueve siguientes puntos del plano:
(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1) y (2, 2)

a) ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con ellos?

b) ¿Cuántos cuadrados?

c) ¿Cuántos rectángulos?



a) Entre estos puntos hay ocho ternas de tres puntos alineados. Por tanto, se pueden formar:

$$C_{9,3} - 8 = 84 - 8 = 76 \text{ triángulos}$$

b) De tamaño 1·1 se pueden formar cuatro cuadrados, y de tamaño 2·2 se puede formar solo uno. Por tanto, se pueden formar un total de cinco cuadrados.

c) De tamaño 1·1 se pueden formar cuatro; de tamaño 1·2, dos; de tamaño 2·1, dos, y de tamaño 2·2 se puede formar un rectángulo. En total, nueve rectángulos.

10.101. Dado un polígono regular de n lados:
a) Calcula el número de sus diagonales.
b) Calcula el número n de lados del polígono para que el número de diagonales coincida con el número de lados.
c) Calcula el número n de lados del polígono para que el número de diagonales sea el triple que el número de lados.

a) Habrá en total $C_{n,2} - n = \dfrac{n!}{(n-2)!\ 2!} - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1)-2n}{2} = \dfrac{n^2-3n}{2}$ diagonales.

b) $\dfrac{n^2-3n}{2} = n \Rightarrow n^2 - 3n = 2n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n = 0,\ n = 5$. La única solución válida es $n = 5$.

c) $\dfrac{n^2-3n}{2} = 3n \Rightarrow n^2 - 3n = 6n \Rightarrow n^2 - 9n = 0 \Rightarrow n = 0,\ n = 9$. La única solución válida es $n = 9$.

10.102. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6:

a) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántos números de cuatro cifras con alguna repetida se pueden formar?

c) Halla la suma de todos los números del apartado a.

a) Se pueden formar $V_{7,4}$ = 840. De ellos hay que quitar los que empiecen por 0, que son $V_{6,3}$ = 120. En total habrá 840 – 120 = 720 números.

b) Se pueden formar $VR_{7,4} - VR_{7,3} = 7^4 - 7^3$ = 2058 números de cuatro cifras, repetidas o no. Así que el total de números con alguna cifra repetida lo obtendremos quitando los números que no repitan ninguna cifra, es decir, los calculados en el apartado anterior; por tanto, 2058 – 720 = 1338 números.

c) De estos números acaban en 0 un total de $V_{6,3}$ = 120. Para ver los que acaban en 1, observemos que para la primera cifra tenemos 5 posibilidades, y para las dos restantes, $V_{5,2}$ = 20 posibilidades. En total hay 5 · 20 = 100 números que acaban en 1. Lo mismo ocurre con los que acaban en 2, 3, 4, 5 y 6, y con las cifras de las decenas y centenas. Para las unidades de millar, como no se puede utilizar el 0, hay 120 números que empiezan por 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

La suma de todos los números será:

Unidades $\rightarrow$ 120 · 0 + 100(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2100

Decenas $\rightarrow$ 120 · 0 + 100(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2100

Centenas $\rightarrow$ 120 · 0 + 100(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2100

Unidades de millar $\rightarrow$ 120(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2520

Total = 2100 + 2100 · 10 + 2100 · 100 + 2520 · 1000 = 2 753 100

10.103. En un torneo de tenis participan 223 jugadores. El sistema del torneo es de “muerte súbita”, es decir, que cada partido que se juega, el que pierde queda eliminado. ¿Cuántos partidos serán necesarios jugar para decidir al jugador ganador?

En cada partida se elimina un jugador. Como tienen que eliminarse 222 jugadores, este será el número de partidos a jugar.

10.104. ¿Cuántos números naturales de más de una cifra tienen sus cifras en orden estrictamente decreciente?

El número mayor que podemos formar es N = 9 876 543 210. Si eliminamos alguna cifra de ese número, obtenemos otro que también cumple la propiedad de tener sus cifras en orden estrictamente decreciente, así que la cantidad de números naturales de k cifras que verifican esta propiedad coincidirá con el número de formas de eliminar 10 – k cifras del número N; por tanto, $C_{10,10-k} = \binom{10}{10-k} = \binom{10}{k}$, donde k puede ser 2, 3, …, 9, 10.

El total de números naturales con sus cifras en orden estrictamente creciente será:

$$\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\cdots+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}=\left[\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\cdots\binom{10}{10}\right]-\binom{10}{0}-\binom{10}{1} = 2^{10} - 1 - 10 = 1013 \text{ números.}$$

10.105. ¿De cuántas formas se podrían colocar 8 torres sobre un tablero de ajedrez de forma que, según las reglas del ajedrez, no se amenacen entre sí?

Para que las torres no se amenacen no puede haber dos en la misma fila ni en la misma columna. Colocando una torre en cada fila, solo tenemos que elegir la columna donde colocarla. Como a cada torre le tenemos que asignar una columna diferente, el número de colocaciones diferentes coincide con el número de formas diferentes de seleccionar las 8 columnas, es decir, P_8 = 8! = 40 320.

10.106. Un examen que consta de siete preguntas se evalúa sobre 10. Si el valor de cada pregunta debe ser un número entero y cada una debe valer como mínimo un punto, ¿de cuántas maneras se puede asignar el valor de cada pregunta?

Se tienen que repartir 10 − 7 = 3 puntos entre las 7 preguntas. Estos puntos se pueden repartir de $CR_{7,3} = C_{9,3} = 84$ formas diferentes.

10.107. En la feria de numismática del barrio hay un puesto en el que se venden sellos de la década de los cuarenta a 10 euros cada uno y sellos de la década de los ochenta a 2 euros cada uno. Un coleccionista de sellos ha salido de casa con 50 euros.

¿Cuántas posibilidades de elección de sellos tiene si en el puesto hay 100 sellos de cada década?

Primero calculamos el número de sellos que puede comprar de cada época. Llamando x al número de sellos de la década de los cuarenta e y al número de sellos de la década de los ochenta, el problema se reduce a calcular el número de soluciones enteras y positivas de la ecuación $10x + 2y = 50$, que equivale a la ecuación $5x + y = 25$.

Década de los 40 (x)	Década de los 80 (y)	Posibilidades de elección
0	25	$C_{100,25}$
1	20	$C_{100,1} \cdot C_{100,20}$
2	15	$C_{100,2} \cdot C_{100,15}$
3	10	$C_{100,3} \cdot C_{100,10}$
4	5	$C_{100,4} \cdot C_{100,5}$
5	0	$C_{100,5}$

El número total de elecciones será la suma de los elementos de la última columna.

10.108. ¿De cuántas formas pueden sentarse *n* chicos y *n* chicas en una mesa redonda si dos chicos o dos chicas no pueden sentarse juntos?

El número de formas de sentar a los chicos en n sillas sería $PC_n = (n - 1)!$

Una vez colocados los chicos, el número de formas de sentar a las n chicas es $P_n = n!$

El resultado final será: $n!\,(n - 1)!$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

10.1. ¿Con los dígitos 1, 2, 3 y 4, ¿cuántos números de tres cifras (diferentes o iguales) se pueden formar?

A) 4　B) 24　C) 30　D) 81　E) 64

Se trata de $VR_{4,3} = 64$, ya que importa el orden y se pueden repetir los elementos.

10.2. Si tenemos dos premios distintos a repartir entre 30 concursantes, ¿de cuántas formas diferentes los podemos otorgar para que a un mismo concursante no le toquen los dos premios?

A) 30　B) 120　C) 870　D) 435　E) 900

Como importa el orden y no se puede repetir, son $V_{30,2} = 870$.

10.3. En una urna hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Extraigo simultáneamente tres bolas de la urna. ¿Cuántos resultados puede haber?

A) 130　B) 3　C) 120　D) 720　E) 520

En esta ocasión no importa el orden y no se pude repetir, por lo que son $C_{10,3} = 120$.

10.4. La solución de la ecuación $V_{x,3} = 105P_2$ es:

A) $x = 1$
B) $x = 3$
C) $x = 5$
D) $x = 7$
E) No tiene solución.

De las opciones que tenemos, la única que se verifica cuando la sustituimos es $x = 7$.

10.5. El tercer término del desarrollo de $(a + 2b)^5$ es:

A) $10a^3b^2$
B) $10a^2b^3$
C) a^2b^3
D) $20a^3b^2$
E) $40a^3b^2$

El tercer término será: $\binom{5}{2}a^3(2b)^2 = 40a^3b^2$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

10.6. El número combinatorio $\binom{10}{4}$ es igual a:

A) 40
B) 120
C) 210
D) $\binom{10}{6}$
E) $\binom{11}{7}$

Por simetría en el triángulo de Pascal, $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$. Por otro lado, $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

10.7. Si se lanzan simultáneamente 10 monedas, el número de posibles resultados es:

A) $C_{10,2}$
B) $CR_{10,2}$
C) $CR_{2,10}$
D) $C_{2,10}$
E) $C_{11,10}$

Como no importa el orden y se pueden repetir resultados, se trata de $CR_{2,10} = C_{11,10}$.

Elige la relación correcta entre las afirmaciones dadas:

10.8. Decide cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

A) Todas las variaciones con repetición son permutaciones.
B) Todas las variaciones sin repetición son permutaciones.
C) Todas las permutaciones son variaciones con repetición.
D) Todas las permutaciones son variaciones sin repetición.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Las permutaciones son un caso particular de variaciones sin repetición en donde coinciden el número de elementos y los elementos tomados.

Señala el dato innecesario para contestar:

10.9. Una clase de 24 alumnos se ha divido en 6 grupos de 4 personas cada uno. La profesora sorteará el orden en que deben exponer sus trabajos cada grupo. Para hallar el número de posibles órdenes que se pueden establecer, ¿cuáles de los siguientes datos no hay que tener en cuenta?

a) La clase tiene 24 alumnos.

b) Cada grupo está formado por 4 alumnos.

c) Se forman 6 grupos

A) Pueden eliminarse los datos a y b
B) Pueden eliminarse los datos a y c.
C) Pueden eliminarse los datos b y c.
D) Solo puede eliminarse el dato b.
E) No puede eliminarse ninguno.

El único dato necesario para este problema es saber que hay 6 grupos en la clase.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

10.10. Para que en un problema de combinatoria, el modelo adecuado sea las combinaciones con repetición:

a) No tiene que importar el orden.

b) Se pueden repetir elementos.

c) Tiene que haber elementos iguales.

d) No pueden intervenir todos los elementos.

A) Tienen que darse a, b, c y d.
B) Tienen que darse b y d.
C) Tienen que darse a, b y d.
D) Tienen que darse a y b.
E) Tienen que darse a y c.

En las combinaciones con repetición no importa el orden y se pueden repetir elementos. No pueden tener elementos iguales y sí que pueden intervenir todos los elementos.

11 Cálculo de probabilidades

ACTIVIDADES INICIALES

11.I. Define por extensión o comprensión, según el caso, los siguientes conjuntos.

a) A = {divisores de 12}

b) B = {soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$}

c) C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37…}

d) D = {5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38…}

a) A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

b) B = {1, 2}

c) C = {números primos}

d) D = {términos de la progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 3$}

11.II. En el conjunto de los números naturales menores de 10 (excluido el 0) se definen los subconjuntos A = {números menores de 5} y B = {números primos menores de 10}. Determina los elementos que forman los siguientes conjuntos.

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $\overline{A}$

d) $\overline{B}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B}$

f) $\overline{A \cup B}$

g) $\overline{A} \cup \overline{B}$

h) $\overline{A \cap B}$

A = {1, 2, 3, 4}; B = {2, 3, 5, 7}

a) $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 7}

b) $A \cap B$ = {2, 3}

c) $\overline{A}$ = {5, 6, 7, 8, 9}

d) $\overline{B}$ = {1, 4, 6, 8, 9}

e) $\overline{A} \cap \overline{B}$ = {6, 8, 9}

f) $\overline{A \cup B}$ = {6, 8, 9}

g) $\overline{A} \cup \overline{B}$ = {1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

h) $\overline{A \cap B}$ = {1, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1. Decide si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:

a) Medir distintas apotemas de un pentágono regular de perímetro 30 cm.

b) Predecir las personas que acuden a un centro comercial en un día concreto.

c) Tiempo que hará el ganador de una maratón.

d) Calcular el coste de una llamada telefónica de 1 minuto de duración.

Aleatorios: b, c

Deterministas: a, d

11.2. Un experimento aleatorio consiste en extraer al azar una bola de una urna en la que hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y anotar el número de la bola que hemos extraído. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a este experimento?

E = {1, 2, 3, 4, 5}

11.3. De una baraja española se han tomado las 12 figuras. Se considera el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de ese grupo de cartas. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a este experimento?

$E = \{S_O, S_C, S_E, S_B, C_O, C_C, C_E, C_B, R_O, R_C, R_E, R_B\}$

11.4. De una baraja española extraemos una carta. Obtén los elementos que forman los siguientes sucesos.

a) Extraer una carta del palo de bastos.

b) Extraer una figura de oros.

c) Extraer un 5 o una carta del palo de copas.

d) Extraer un as.

e) ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos de este experimento?

a) "Sacar palo de bastos" = $\{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$

b) "Extraer figura de oros" = $\{S_O, C_O, R_O\}$

c)"Extraer un 5 o un palo de copas" = $\{5_O, 5_C, 5_E, 5_B, 1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C\}$

d) "Extraer un as" = $\{1_O, 1_C, 1_E, 1_B\}$

e) Como el espacio muestral tiene 40 puntos muestrales, el espacio de sucesos tiene 2^{40} elementos.

11.5. Se tiene una urna con una bola blanca, otra roja y otra verde. Se van extrayendo bolas de la urna hasta que aparece la bola verde.

a) Determina el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Obtén los elementos del suceso "no aparecer la bola verde hasta la tercera extracción".

c)Obtén los elementos del suceso "aparece bola verde en la segunda extracción".

a) $E = \{(V), (B, V), (R, V), (B, R, V), (R, B, V)\}$

b) $E = \{(B, R, V), (R, B, V)\}$

c) $E = \{(B, V), (R, V)\}$

11.6. Se lanza un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6 y se observa la puntuación de su cara superior. Se consideran los sucesos *A* = "salir un número par" y *B* = "salir un múltiplo de 3":

a) Obtén los sucesos A^C, $A \cup B$ y $A \cap B$.
b) ¿Forman *A* y *B* un sistema completo de sucesos?

a) $A^c = \{1, 3, 5\}$ $\quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ $\quad A \cap B = \{6\}$

b) Como $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \neq E$ y $A \cap B = \{6\} \neq 0$, se concluye que A y B no forman un sistema completo de sucesos.

11.7. Del experimento consistente en extraer una carta de una baraja española se consideran los siguientes sucesos:

***A* = "extraer un rey"**

***B* = "extraer un oro"**

***C* = "extraer un 5 o un 6"**

Indica si hay alguna pareja de sucesos incompatibles.

$A \cap B = \{R_O\}$

$A \cap C = \varnothing$

$B \cap C = \{5_O, 6_O\}$

La única pareja de sucesos incompatibles es la formada por A y C.

11.8. En la tabla se recoge el número de veces que ha ocurrido el suceso *I* = "obtener impar" al lanzar un dado numerado del 1 al 6 un número creciente de veces. Estima un valor para la probabilidad de *I* y razona si el dado está equilibrado.

n	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	4	21	38	199	402	2000	3998

Las frecuencias relativas correspondientes son:

$h_{10}(I) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\quad h_{100}(I) = \frac{38}{100} = 0{,}38$ $\quad h_{1000}(I) = \frac{402}{1000} = 0{,}402$ $\quad h_{10\,000}(I) = \frac{3998}{10000} = 0{,}3998$

$h_{50}(I) = \frac{21}{50} = 0{,}42$ $\quad h_{500}(I) = \frac{199}{500} = 0{,}398$ $\quad h_{5000}(I) = \frac{2000}{5000} = 0{,}4$

Parece que $P(I) = 0{,}4$. Por tanto, el dado no está equilibrado.

11.9. Se elige al azar una ficha de dominó.

a) Obtén la probabilidad de haber elegido la blanca doble.

b) Obtén la probabilidad de haber elegido una ficha doble.

c) Obtén la probabilidad de que los puntos de la ficha sumen 4.

(Se recuerda que el juego del dominó está formado por 28 fichas.)

a) A = "haber elegido una blanca doble" = $\{(0, 0)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{28}$

b) B = "haber elegido una ficha doble" = $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

c) C = "la puntuación suma 4" = $\{(0, 4), (1, 3), (2, 2)\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{28}$

11.10. Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

***A* = "obtener tres caras"   *B* = "obtener dos caras y una cruz"   C = "obtener una cara y dos cruces"**

$A = \{(CCC)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{8}$

$B = \{(CCX), (CXC), (XCC)\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$

$C = \{(CXX), (XCX), (XXC)\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$

11.11. Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Obtener suma igual a 3.

b) Obtener suma mayor que 9.

c) Obtener suma menor o igual que 5.

a) A = "obtener suma 3" = $\{(1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) B = "obtener suma mayor que 9" = $\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) C = "obtener suma menor o igual que 5" = $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

$\Rightarrow P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

11.12. Dos personas escriben al azar una vocal, cada una en un papel.

a) Obtén la probabilidad de que ambas escriban la misma vocal.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de que tres personas escribiesen, al azar, cada uno la misma vocal en un papel?

a) Casos posibles: $VR_{5,2} = 5^2 = 25$
Casos favorables: 5

$P(\text{misma vocal}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

b) Casos posibles: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$
Casos favorables: 5

$P(\text{misma vocal}) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$

11.13. Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcula:

a) La probabilidad de obtener algún 6.

b) La probabilidad de no obtener ningún 6.

a) A = "obtener algún 6" = {(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)},

$P(A) = \frac{11}{36}$

b) B = "no obtener ningún 6" es el suceso contrario de $A \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$.

11.14. Sean A, B y C tres sucesos que forman un sistema completo de sucesos, y donde $P(A) = 0{,}1$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$. Calcula $P(C)$.

Al formar los sucesos A, B y C un sistema completo de sucesos, $E = A \cup B \cup C$, y los sucesos son incompatibles dos a dos; por tanto:

$1 = P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \Rightarrow 1 = 0{,}1 + 0{,}3 + P(C) \Rightarrow P(C) = 0{,}6$

11.15. Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los siguientes sucesos:

A = "salir una figura", B = "salir un as", C = "salir una carta del palo de espadas"

a) ¿Son A y B incompatibles? Calcula $P(A \cup B)$.

b) ¿Son A y C compatibles? Calcula $P(A \cup C)$.

a) Son incompatibles, ya que $A \cap B = \varnothing$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{40} + \frac{4}{40} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$

b) No, ya que $A \cap C = \{S_E, C_E, R_E\}$. $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{12}{40} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$

11.16. Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6, y se anota su puntuación. Se consideran los sucesos:

A = "salir un número par", B = "salir un número que es un divisor de 12"

a) ¿Son A y B sucesos incompatibles?

b) Calcula la probabilidad de $A \cup B$.

a) $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4, 6\} \neq 0 \Rightarrow$ No son incompatibles.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

11.17. En un pueblo se somete a sus vecinos a votación sobre la instalación de una antena de telefonía. Los resultados vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A: Varones	$\bar{A}$: Mujeres	
B: Sí	317	303	620
$\bar{B}$: No	223	314	537
	540	617	1157

Seleccionamos al azar un vecino. Halla $P(A)$, $P(A/B)$, $P(\bar{B})$ y $P(\bar{B}/A)$.

$P(A) = \frac{540}{1157} = 0,467$ $P(A/B) = \frac{317}{620} = 0,511$ $P(\bar{B}) = \frac{537}{1157} = 0,464$ $P(\bar{B}/A) = \frac{223}{540} = 0,413$

11.18. En un experimento aleatorio se sabe que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ **c) $P(B/A)$**

b) $P(A/B)$ **d) $P(A/(A \cap B))$**

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,7 - 0,85 = 0,35$

b) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,7} = 0,5$

c) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,5} = 0,7$

d) $P(A/(A \cap B)) = \frac{P(A \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$

11.19. (PAU) El 60% de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía, y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

Sean los sucesos M = "aprobar Matemáticas" y F = "aprobar Filosofía".

Del enunciado se deduce: $P(M) = 0,7$ $P(F) = 0,6$ $P(F/M) = 0,8$

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,6} = 0,93$$

11.20. Se extraen dos cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que sean dos figuras (sota, caballo o rey) en los siguientes casos:

a) Con devolución.

b) Sin devolución.

Sean los sucesos A_1 = "sacar figura en la primera extracción" y A_2 = "sacar figura en la segunda extracción".

La probabilidad a calcular es la del suceso $A_1 \cap A_2$:

a) En este caso, los sucesos A_1 y A_2 son independientes; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$$

b) Si la extracción es sin devolución, los sucesos A_1 y A_2 son dependientes; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$$

11.21. Se lanza dos veces una moneda equilibrada. Se llama *A* al suceso “salir cara en el primer lanzamiento”; *B*, al suceso “salir cara en el segundo lanzamiento”, y *C*, al suceso “en total aparecen una cara y una cruz”. ¿Son *A*, *B* y *C* independientes dos a dos? ¿Son independientes los tres sucesos?

Primero se calculan las probabilidades de cada uno de los sucesos dados.

$A = \{CC, CX\}$ $\qquad$ $B = \{CC, XC\}$ $\qquad$ $C = \{CX, XC\}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{CC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap C = \{CX\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$

$B \cap C = \{XC\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$

A, *B* y *C* son independientes dos a dos.

Como $A \cap B \cap C = \varnothing$, los sucesos no son independientes, ya que: $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

11.22. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar dos veces un dado.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?

b) Calcula la probabilidad de obtener primero un 2 y luego un 5.

a) $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

b) $P(2, 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

11.23. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en extraer dos cartas de una baraja sin reemplazamiento.

a) ¿Cuántos elementos tiene este experimento? **b) Calcula la probabilidad de extraer dos reyes.**

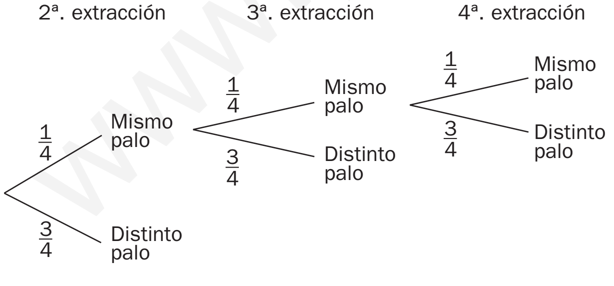
a) $V_{40,2} = 40 \cdot 39 = 1560$ elementos

b) $P(\text{dos reyes}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130} = 0{,}0077$

11.24. (PAU) Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que las cuatro cartas sean del mismo palo en los siguientes casos:

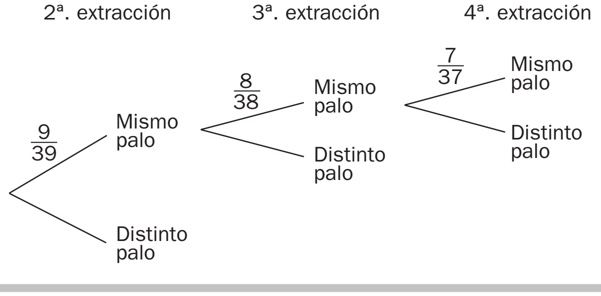
a) Con devolución de la carta a la baraja.
b) Sin devolución.

a)



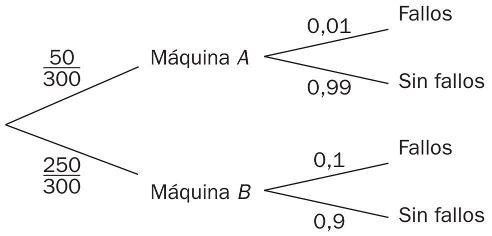
$P(\text{cuatro del mismo palo}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0{,}016$

b)



$P(\text{cuatro del mismo palo}) = \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} \cdot \frac{7}{37} = \frac{504}{54\,834} = 0{,}0092$

11.25. (PAU) Las máquinas *A* y *B* producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas que se han fabricado en una hora y elegimos una al azar. Halla la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina *B* y no sea defectuosa.



$$P(\text{máquina } B \text{ y válida}) = \frac{250}{300} \cdot 0{,}9 = 0{,}75$$

11.26. (PAU) La ciudad *A* tiene el triple de habitantes que la ciudad *B*, pero la proporción de universitarios en la ciudad *B* es el doble que en la *A*.

a) ¿En qué ciudad hay más universitarios?

b) Se elige un habitante al azar. Averigua la probabilidad de que sea universitario, sabiendo que la proporción de estos en la ciudad *A* es del 10%.

a) Habitantes de *B*: x

Habitantes de *A*: $3x$.

Proporción de universitarios de *A*: p

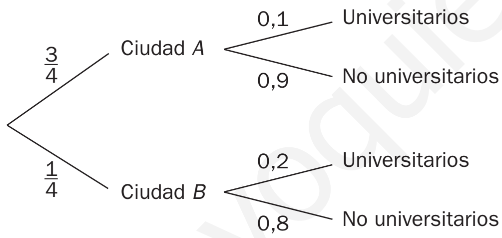
Proporción de universitarios de *B*: $2p$

Universitarios de *B*: $2px$

Universitarios de *A*: $3px$

Hay más universitarios en *A*.

b)



$$P(\text{ser universitario}) = \frac{3}{4}\cdot 0{,}1 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}2 = 0{,}125$$

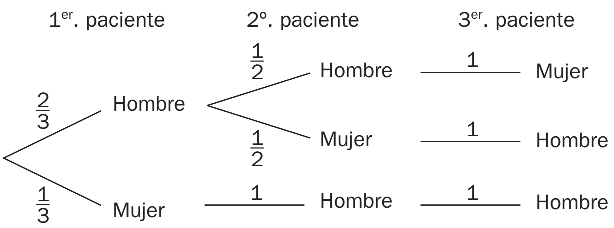
11.27. (PAU) Ana, Juan y Raúl están esperando para realizar una consulta médica y sortean el orden en que van a entrar.

a) Halla la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) Determina si son independientes los sucesos:

S_1 = "la mujer entra antes que alguno de los hombres".

S_2 = "los dos hombres entran consecutivamente".



a) $P(MHH) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{3}$

b) $P(S_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(S_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$S_1 \cap S_2 = (MHH)$

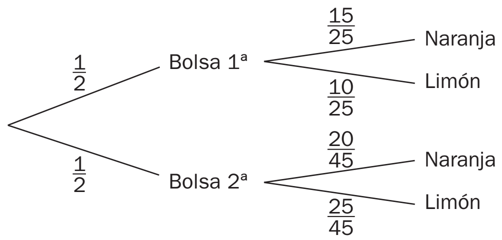
$P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3} \neq P(S_1)\cdot P(S_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

No son independientes.

11.28. (PAU) Tenemos dos bolsas de caramelos. La primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón, y la segunda, 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo.

a) Halla la probabilidad de que el caramelo sea de naranja.

b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la segunda bolsa?

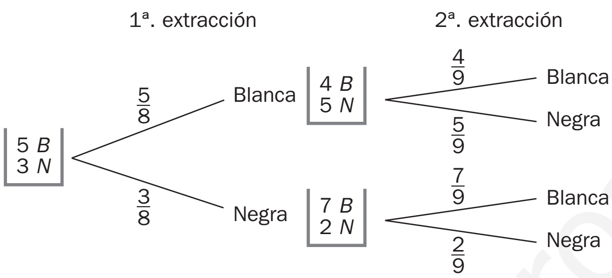


a) $P(\text{naranja}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{45}=\frac{47}{90}$

b) $P(2.^{a}\ \text{bolsa/limón}) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25}}=\frac{25}{43}$

11.29. (PAU) Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color, se descarta y se introducen dos bolas del otro color en la urna. Luego se extrae otra bola al azar.

Sabiendo que la segunda bola extraída ha sido blanca, calcula la probabilidad de que la primera haya sido negra.



$P(N_1/B_2) = \dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}}=\frac{21}{41}$

EJERCICIOS

Operaciones con sucesos

11.30. En el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española consideramos los siguientes sucesos:

***A* = "salir copas"** ***B* = "salir un caballo"** ***C* = "salir caballo de copas o tres de oros"**

Interpreta los siguientes sucesos.

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cap B$

e) $A \cap C$

f) $B \cap C$

a) $A \cup B = \{1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 5_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C, C_O, C_E, C_B\}$

b) $A \cup C = \{1_C, 2_C, 3_C, 4_C, 5_C, 6_C, 7_C, S_C, C_C, R_C, 3_O\}$

c) $B \cup C = \{C_O, C_C, C_E, C_B, 3_O\}$

d) $A \cap B = \{C_C\}$

e) $A \cap C = \{C_C\}$

f) $B \cap C = \{C_C\}$

11.31. Se lanzan dos dados cúbicos distinguibles con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Forma los sucesos *A* = "la suma de sus puntuaciones es 10", *B* = "el producto de sus puntuaciones es un múltiplo de 3", *C* = "el producto de sus puntuaciones es un número primo", *D* = "la suma de sus puntuaciones es un múltiplo de 5", *E* = "la suma de sus puntuaciones es superior a 1", *F* = "la suma de sus puntuaciones es inferior a 2".

b) Forma los siguientes sucesos: $(A \cup B) \cap F$ y $(B \cap E) \cup F$.

a) $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

$B = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 3), (5, 6), (6, 1),$
$(6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (5, 1)\}$

$D = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$

E es un suceso seguro y coincide con el espacio muestral.

$F = \varnothing$

b) $(A \cup B) \cap F = (A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$

$(B \cap E) \cup F = (B \cap E) \cup \varnothing = B \cap E = B$

Concepto de probabilidad

11.32. Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.

Sea *A* = "obtener al menos dos caras" = {*XXC*, *XCX*, *CXX*, *XXX*}

$P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

11.33. Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?

a) Que salga la sota de bastos o el rey de espadas.

b) Que salga un oro o una figura.

c) Que salga un oro o un no oro.

d) Que salga una figura o que no salga una figura.

a) *A* = "sacar sota de bastos"; *B* = "sacar rey de espadas"

$P(A) = \dfrac{1}{40}$; $P(B) = \dfrac{1}{40}$. Son igual de probables.

b) *A* = "sacar oro"; *B* = "sacar figura"

$P(A) = \dfrac{10}{40}$; $P(B) = \dfrac{12}{40}$. Es más probable sacar figura.

c) *A* = "sacar oro"; *B* = "sacar no oro"

$P(A) = \dfrac{10}{40}$; $P(B) = \dfrac{30}{40}$. Es más probable sacar no oro.

d) *A* = "sacar figura"; *B* = "sacar no figura"

$P(A) = \dfrac{12}{40}$; $P(B) = \dfrac{28}{40}$. Es más probable sacar no figura.

11.34. De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve alumnos eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

a) Escogió francés.

b) Escogió inglés.

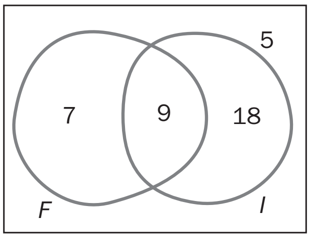
c) Escogió ambos idiomas.

d) Escogió francés o inglés.

e) Escogió francés, pero no inglés.

f) No escogió ni inglés ni francés.

Se consideran los sucesos F = "estudiar francés" e I = "estudiar inglés".



Se utiliza el diagrama de Venn para calcular el número de alumnos que estudian solo ingles y solo francés.

Como hay 9 alumnos que estudian los dos idiomas y 16 alumnos que estudian francés, se deduce que 7 estudian solo francés. De modo análogo se deduce que 18 alumnos estudian solo inglés.

El número de alumnos que estudian idiomas es 34, y, por tanto, habrá 5 alumnos que no estudian ningún idioma.

a) $P(F) = \frac{16}{39}$ c) $P(F \cap I) = \frac{9}{39}$ e) $P(F \cap \bar{I}) = \frac{7}{39}$

b) $P(I) = \frac{27}{39}$ d) $P(F \cup I) = \frac{34}{39}$ f) $P(\bar{F} \cap \bar{I}) = \frac{5}{39}$

11.35. Se elige al azar un número entero entre 0 y 999. Halla la probabilidad de que el número elegido:

a) No tenga ninguna cifra repetida.

b) Sea capicúa.

El espacio muestral de este experimento consta de 1000 elementos; por tanto:

a) El número de casos favorables a este suceso coincide con $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. De este modo,

P(el número no tenga ninguna cifra repetida) = $\frac{720}{1000}$

b) El número de capicúas de una cifra es 10, el de capicúas de dos cifras es 9, y de tres cifras hay $V_{10,9} = 90$ capicúas. En total tenemos 109 números capicúas entre 0 y 999; por tanto:

P(número capicúa) = $\frac{109}{1000}$

11.36. Los números 1, 2, 3…, *n* se alinean al azar.

a) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan seguidos y en ese orden.

b) Halla la probabilidad de que los números 2 y 3 aparezcan juntos.

El espacio muestral de este experimento consta de $n!$ elementos.

a) Casos favorables: $(n - 1) \cdot P_{n-2} \Rightarrow P$(2 y 3 seguidos y en ese orden) = $\frac{(n-1)P_{n-2}}{P_n} = \frac{1}{n}$

b) Casos favorables: $2 \cdot (n - 1) \cdot P_{n-2} \Rightarrow P$(2 y 3 seguidos y en ese orden) = $\frac{2 \cdot (n-1)P_{n-2}}{P_n} = \frac{2}{n}$

Dependencia e independencia de sucesos

Probabilidad compuesta

11.37. (PAU) Se sabe que dado el suceso *A*, la probabilidad de que suceda *B* es de 0,3, es decir, que *P*(*B*/*A*) = 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado *A*, no ocurra *B*?

$P(B/A) = 0{,}3 \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

11.38. (PAU) Calcula la probabilidad *P*(*A* ∪ *B*) y *P*(*A* ∩ *B*), sabiendo que *P*(*A* ∪ *B*) – *P*(*A* ∩ *B*) = 0,4, que *P*(*A*) = 0,6 y que *P*(*B*) = 0,8.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}4 + P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = 0{,}5 \\ P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9 \end{cases}$$

11.39. (PAU) Sean *A* y *B* dos sucesos con *P*(*A*) = 0,5, *P*(*B*) = 0,3 y *P*(*A* ∩ *B*) = 0,1. Calcula las siguientes probabilidades.

a) *P*(*A* ∪ *B*)

b) *P*(*A*/*B*)

c) *P*(*A*/*A* ∩ *B*)

d) *P*(*A*/*A* ∪ *B*)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}7$

b) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

c) $P(A/A \cap B) = \dfrac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$

d) $P(A/A \cup B) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}7} = \dfrac{5}{7}$

11.40. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que *P*(*A*) = $\dfrac{1}{3}$ y *P*(*B*) = $\dfrac{2}{5}$. Calcula, razonadamente, para qué valor de *P*(*A* ∪ *B*) los sucesos *A* y *B* son independientes.

A y *B* son independientes si *P*(*A*/*B*) = *P*(*A*).

$P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} - P(A \cup B) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow \dfrac{11}{15} - P(A \cup B) = \dfrac{2}{15} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \dfrac{11}{15} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$

11.41. Los ciudadanos de una localidad votaron Sí o No a una determinada propuesta que realizó su Ayuntamiento. Los resultados por porcentajes vienen reflejados en la tabla que mostramos a continuación. ¿Son los sucesos *A* = "ser varón" y *B* = "votar Sí" independientes?

	Varones	Mujeres	
SÍ	25%	40%	65%
NO	30%	5%	35%
	55%	45%	

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}65} = 0{,}385$. $P(A) = 0{,}55$.

Como $P(A) \neq P(A/B)$, *A* y *B* no son independientes.

11.42. (PAU) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla la probabilidad de que:

a) Ambos acierten. **c) Ninguno de los dos acierte.**

b) Uno acierte y el otro no. **D)Alguno acierte.**

a) T_1 = "el primer tirador acierta", T_2 = "el segundo tirador acierta". $P(T_1 \cap T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P(T_1 \cap \overline{T}_2) + P(\overline{T}_1 \cap T_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P(T_1 \cup T_2) = 1 - P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) = \frac{11}{12}$

11.43. (PAU) Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas, y 4 suspenden inglés y matemáticas.

a) Realiza una tabla de contingencia con los resultados de esta clase.

b) Calcula la probabilidad de que, al elegir un alumno de esta clase al azar, resulte que aprueba matemáticas y suspende inglés.

c) En esta clase, ¿son independientes los sucesos "aprobar inglés" y "aprobar matemáticas"?

a) Organizamos los datos en una tabla:

	Aprueba inglés	Suspende inglés	
Aprueba matemáticas	8	8	16
Suspende matemáticas	4	4	8
	12	12	24

b) $P(M \cap \overline{I}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

c) $P(I / M) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$. Sí son independientes.

11.44. (PAU) Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:

a) Los cuatro huevos en buen estado. **b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.**

a) P(los cuatro huevos en buen estado) = $\frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{14}{33}$

b) P(1 huevo roto) = $\frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot 4 = \frac{16}{33}$

11.45. (PAU) En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras se pide calcular la probabilidad de obtener:

a) Tres unos.

b) Al menos un dos.

c) Tres números distintos.

d) Una suma de 4.

a) P(tres unos) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

b) P(al menos un dos) = 1 – P(ningún dos) = $1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{91}{216}$

c) P(tres números distintos) = $1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

d)Para obtener una suma de cuatro, hay que sacar dos unos y un dos.

P(suma cuatro) = $3\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

11.46. (PAU). Sea *A* un suceso con 0 < *P*(*A*) < 1.

a) ¿Puede ser *A* independiente de su contrario, $\overline{A}$?

b) Sea *B* otro suceso tal que $A \supset B$. ¿Serán *A* y *B* independientes?

c) Sea *C* un suceso independiente de *A*. ¿Serán *A* y $\overline{C}$ independientes?

Justifica las respuestas.

a) *A* y $\overline{A}$ son independientes si $P\left(A \cap \overline{A}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{A}\right)$. Como $P\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$, para que se cumpla la igualdad tiene que ocurrir:

- O bien que $P(A)$ = 0, que no puede ser por hipótesis.
- O bien que $P\left(\overline{A}\right) = 0$, que implicaría que $P(A)$ = 1, que no puede ser por hipótesis.

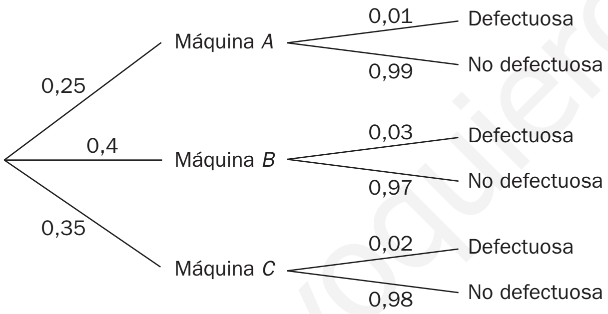
b) Como $A \supset B$, se tiene que $P(A \cap B) = P(B)$ y, por tanto, $P(B/A) = 1 = P(B)$, que no puede ser, ya que al estar *B* contenido en *A*, se verifica que $P(B) < P(A) < 1$.

c) $P\left(\overline{C} / A\right) = \dfrac{P\left(\overline{C} \cap A\right)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - P(C / A) = 1 - P(C) = P\left(\overline{C}\right)$

Probabilidad total y teorema de Bayes

11.47. (PAU) Una fábrica dispone de tres máquinas *A*, *B* y *C* que fabrican arandelas. Se sabe que la máquina *A* produce un 1% de arandelas defectuosas; la *B*, un 3%, y la *C*, un 2%. La máquina *A* produce el 25% del total de las arandelas; la *B*, el 40%, y la *C*, el 35% restante. Al cabo de un día se toma una arandela al azar de la producción total.

Si la arandela elegida es defectuosa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina *A*.



$$P(A/D) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}01}{0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}35 \cdot 0{,}02} = 0{,}1163$$

11.48. (PAU) En una caja hay 10 bombillas, 2 de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas, vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

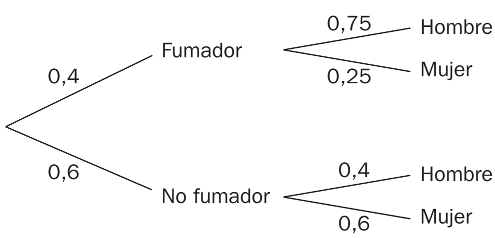
$$P\left(\overline{D}D\overline{D}\right) + P\left(D\overline{D}\,\overline{D}\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45}$$

11.49. (PAU) Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma, y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula la probabilidad de que:

a) Un paciente no fumador sea hombre.

b) Un paciente sea hombre fumador.

c) Un paciente sea mujer.



a) *P*(hombre/no fumador) = 0,4

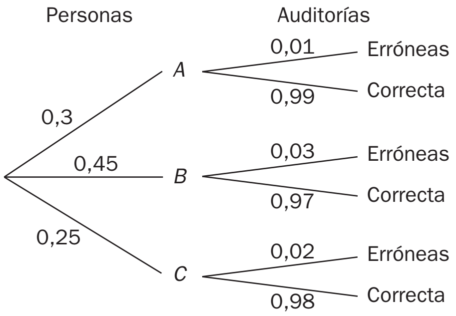
b) *P*(hombre y fumador) = 0,4 · 0,75 = 0,3

c) *P*(mujer) = 0,4 · 0,25 + 0,6 · 0,6 = 0,46

11.50. (PAU) En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%; la segunda, el 45%, y la tercera, el 25% restante. Se ha comprobado que el 1% de las inspecciones que realiza la primera persona son erróneas, la segunda persona comete un 3% de errores, y la tercera, un 2%.

a) Halla la probabilidad de realizar una auditoría correctamente.

b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?



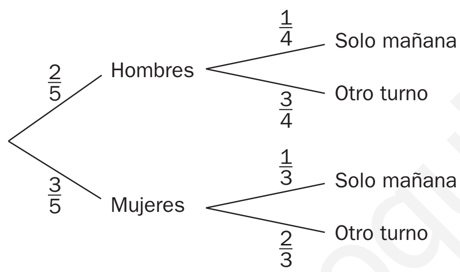
a) $P(\text{correcta}) = 0,3 \cdot 0,99 + 0,45 \cdot 0,97 + 0,25 \cdot 0,98 = 0,9785$

b) $P(B/\text{correcta}) = \dfrac{0,97 \cdot 0,45}{0,9785} = 0,4461$

11.51. (PAU) La plantilla de empleados de unos grandes almacenes está formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana. Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana?

b) Sabiendo que el empleado elegido no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?



a) $P(\text{hombre} \cup \text{mañana}) = \dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{5}$

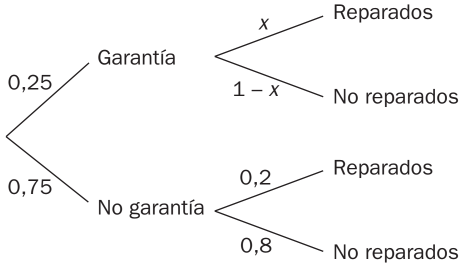
b) $P(\text{mujer/otro turno}) = \dfrac{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4}{7}$

11.52. (PAU) El 25% de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.

a) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio ya fueron reparados en otra ocasión?

b) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?

c) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?



$P(\text{reparados} \cap \text{garantía}) = 0,05 \Rightarrow 0,05 = 0,25 \cdot x \Rightarrow x = 0,2$

a) $P(\text{reparados}) = 0,25 \cdot 0,2 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,2 \Rightarrow 20\%$

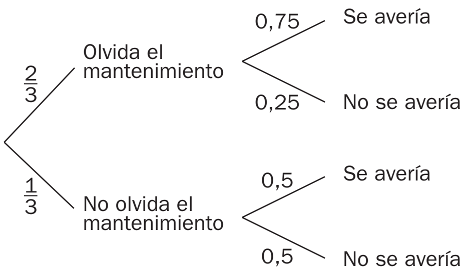
b) $P(\text{no reparados y no garantía}) = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6 \Rightarrow 60\%$

c) $P(\text{garantía/reparado}) = \dfrac{P(\text{garantía y reparado})}{P(\text{reparado})} = \dfrac{0,05}{0,2} = 0,25$

11.53. (PAU) Juan es el responsable del aula de informática de una empresa y no se puede confiar en él, pues la probabilidad de que se olvide de hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia de su jefe es de $\frac{2}{3}$. Si Juan le hace el mantenimiento a un ordenador, este tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento, solo hay una probabilidad de 0,25 de que funcione correctamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe?

b) A su vuelta, el jefe se encuentra un ordenador averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?

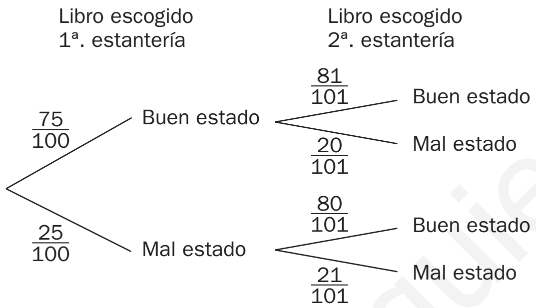


a) $P(\text{funciona}) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}25 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{se olvida/averiado}) = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}75}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

11.54. (PAU) En una biblioteca hay dos estanterías con 100 libros en cada una. En la primera hay 25 libros en mal estado, y en la segunda, 20. Un estudiante coge al azar un libro de la primera estantería y lo deja en la segunda.

¿Cuál es la probabilidad de que otro estudiante coja al azar un libro en buen estado de la segunda estantería?



$P(\text{buen estado}) = \frac{75}{100} \cdot \frac{81}{101} + \frac{25}{100} \cdot \frac{80}{101} = 0{,}7995$

PROBLEMAS

11.55. (PAU) Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}2$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}7$.

a) Calcula $P(A \cap B)$ y razona si *A* y *B* son independientes.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

a) Recordando las leyes de Morgan: $P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \neq P(A) \cdot P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}2 - 0{,}3 = 0{,}5$

11.56. (PAU) Sean *A* y *B* dos sucesos del mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}9$.

a) Justifica si *A* y *B* son independientes. **b) Calcula $P(A/\bar{B})$ y $P(B/\bar{A})$.**

a) Para que *A* y *B* sean independientes, se tiene que verificar que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}9 = 0{,}7 + 0{,}6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}4$

Como $P(A \cap B) = 0{,}4 \neq P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$, los sucesos son dependientes.

b) $P(A/\bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$, $P(B/\bar{A}) = \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{0{,}2}{0{,}3} = \dfrac{2}{3}$

11.57. (PAU) En un experimento aleatorio, la probabilidad del suceso *A* es el doble que la del suceso *B*, y la suma de la probabilidad del suceso *A* y la del suceso contrario a *B* es 1,3. Se sabe además que la probabilidad del suceso intersección de *A* y *B* es de 0,18. Calcula la probabilidad de que:

a) Se verifique el suceso *A* o el *B*.

b) Se verifique el suceso contrario de *A* o el contrario de *B*.

c) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

$P(A) = 2x$ y $P(B) = x$. $P(A) + P(\overline{B}) = 1{,}3 \Rightarrow 2x + 1 - x = 1{,}3 \Rightarrow x = 0{,}3$. Por tanto, $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}3$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}72$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

c) $P(A \cap B) = 0{,}18$ y $P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. Por tanto, *A* y *B* son independientes.

11.58. (PAU) Un dominó consta de 28 fichas, de las cuales 7 son dobles. Escogidas tres fichas al azar, calcula la probabilidad de que alguna sea doble si:

a) Se extraen las tres simultáneamente.

b) Se extraen de una en una con reemplazamiento.

a) $P(\text{alguna doble}) = 1 - P(\text{ninguna doble}) = 1 - \frac{21}{28} \cdot \frac{20}{27} \cdot \frac{19}{26} = \frac{139}{234} = 0{,}5940$

b) $P(\text{alguna doble}) = 1 - P(\text{ninguna doble}) = 1 - \left(\frac{21}{28}\right)^3 = \frac{37}{64} = 0{,}5781$

11.59. (PAU) Se hacen dos lanzamientos de un dado. Si en el primer lanzamiento sale un 2, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

Sean los sucesos *A* = "la suma de los resultados es par" y *B* = "en el primer lanzamiento se obtiene un 2".

Las probabilidades a comparar son $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}; \quad P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Son igual de probables ambos sucesos.}$$

11.60. (PAU) Se lanza un dado de seis caras numeradas del 1 al 6 dos veces consecutivas.
Calcula la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1 sabiendo que la suma es 4.

Para que la suma sea 4, los únicos casos posibles son: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}. Por tanto, la probabilidad pedida es de $\frac{1}{3}$.

11.61. (PAU) Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

$P(\text{al menos uno bien guardado}) = 1 - P(\text{ninguno en su envoltorio})$

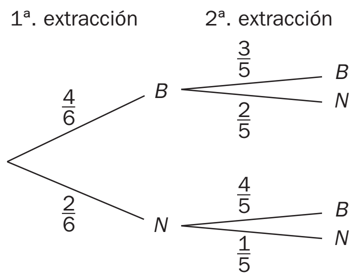
Los discos pueden guardarse de 3! = 6 formas posibles, de las cuales hay solo dos en las que ninguno está en su envoltorio. Por tanto:

$P(\text{al menos uno bien guardado}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

11.62. (PAU) De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

b) Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?



a) $P(\text{dos blancas}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P(1.^{\text{a}}\, N/2.^{\text{a}}\, N) = \dfrac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

11.63. (PAU) El 45% del censo de una cierta ciudad vota al candidato *A*; el 35%, al candidato *B*, y el resto se abstiene. Se eligen al azar tres personas del censo. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas votan al candidato *A*.

b) Dos personas votan al candidato *A*, y otra, al *B*.

c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

a) P(las tres personas votan al candidato A) = $0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}45 = 0{,}0911$

b) P(dos personas votan al candidato A, y otra, al B) = $3(0{,}45 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}35) = 0{,}2126$

c) P(al menos uno se abstiene) = $1 - P$(ninguno se abstiene) = $1 - (0{,}8)^3 = 0{,}488$

11.64. (PAU) De una baraja española se extraen sucesivamente tres cartas al azar sin reemplazamiento. Determina la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.

c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

a) $P(\text{tres reyes}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0{,}0004$

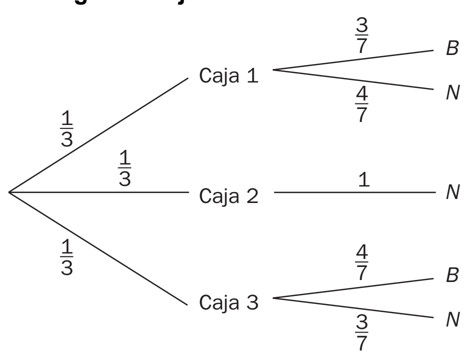
b) $P(1.^{\text{a}}\text{, figura; } 2.^{\text{a}}\text{, cinco; } 3.^{\text{a}}\text{, seis}) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0{,}0032$

c) $P(\text{un as, un tres y un seis}) = 6\left(\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38}\right) = 0{,}0065$

11.65. (PAU) Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene tres bolas blancas y cuatro negras; la segunda, cinco negras, y la tercera, cuatro blancas y tres negras.

a) Si se elige una caja al azar y luego se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

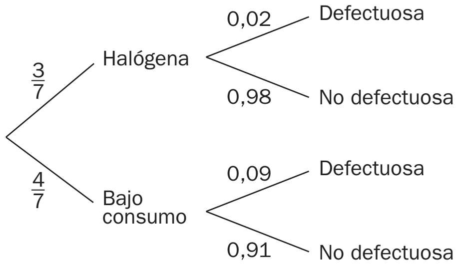


a) $P(N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{3}$

b) $P(2.^{\text{a}}\text{ caja}/N) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

11.66. (PAU) En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de 0,02, y de que lo sea una bombilla de bajo consumo es de 0,09.

Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que sea halógena?



$$P(\text{halógena/ no defectuosa}) = \frac{\frac{3}{7}\cdot 0,98}{\frac{3}{7}\cdot 0,98 + \frac{4}{7}\cdot 0,91} = 0,4668$$

11.67. (PAU) En una competición de tiro con arco, cada tirador dispone cómo máximo de tres intentos para hacer diana. En el momento en que lo consigue, deja de tirar y supera la prueba, y si no lo consigue en ninguno de los tres intentos, queda eliminado. Si la probabilidad de hacer blanco con cada flecha es de 0,8:

a) Calcula la probabilidad de que no quede eliminado.

b) Si sabemos que superó la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya conseguido en el segundo intento?

a) $P(\text{no quedar eliminado}) = 1 - P(\text{quedar eliminado}) = 1 - (0,2)^3 = 0,992$

b) $P(\text{acierto en el 2.º intento/no eliminado}) = \dfrac{0,2\cdot 0,8}{0,992} = 0,1613$

11.68. (PAU) En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

a) $P(\text{gane}) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{24}$

b) $P(\text{2 caras/ganar}) = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{3}{7}$

11.69. (PAU) Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes *A* y *B*. Se sabe que la probabilidad de que el componente *A* sea defectuoso es de 0,001, y que la de que *B* no lo sea es de 0,997. Se elige al azar un elemento. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Solamente el componente *A* es defectuoso.

b) Ninguno de los componentes es defectuoso.

c) Ambos componentes son defectuosos.

d) Solamente uno de los componentes es defectuoso.

Sean los sucesos A = “componente A defectuoso” y B = “componente B defectuoso”

a) $P(A \cap \overline{B}) = 0,001 \cdot 0,997 = 0,000997$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,999 \cdot 0,997 = 0,9960$

c) $P(A \cap B) = 0,001 \cdot 0,003 = 0,000003$

d) $P(\text{solo un componente defectuoso}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,001 \cdot 0,997 + 0,999 \cdot 0,003 = 0,003994$

11.70. (PAU) Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad $\frac{3}{7}$ y una raya con probabilidad $\frac{4}{7}$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad $\frac{1}{4}$ y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad $\frac{1}{3}$.

a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado realmente una raya?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se haya enviado raya-raya?

Sean los sucesos ER = "emite raya", EP = "emite punto", RR = "recibe raya" y RP = "recibe punto".

Las probabilidades que da el problema son $P(EP) = \frac{3}{7}$, $P(ER) = \frac{4}{7}$, $P(RR/EP) = \frac{1}{4}$ y $P(RP/ER) = \frac{1}{3}$.

a) $P(ER/RR) = \dfrac{P(ER \cap RR)}{P(RR)} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}} = \dfrac{32}{41} = 0{,}7805$

b) $[P(ER/RP)]^2 = \left[\dfrac{P(ER \cap RP)}{P(RP)}\right]^2 = \left[\dfrac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7}}\right]^2 = \left(\dfrac{16}{43}\right)^2 = 0{,}1385$

11.71. (PAU) La ruleta de un casino consta de 40 casillas, numeradas del 1 al 40. Los números acabados en 1, 2, 3, 4 ó 5 son rojos, y el resto, negros. Puesta en marcha la ruleta, se consideran los sucesos siguientes:

***A* = "el resultado es un número de la primera decena".**

***B* = "el resultado es un número par".**

***C* = "el resultado es un número rojo".**

a) Halla la probabilidad *P*(*C* – *A*).

b) Halla la probabilidad de que el número sea de la primera decena, sabiendo que es rojo.

c) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Y los sucesos *A* y *C*? ¿Son independientes los tres sucesos?

a) $P(C - A) = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

b) $P(A/C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{5}{40}}{\frac{20}{40}} = \dfrac{1}{4}$

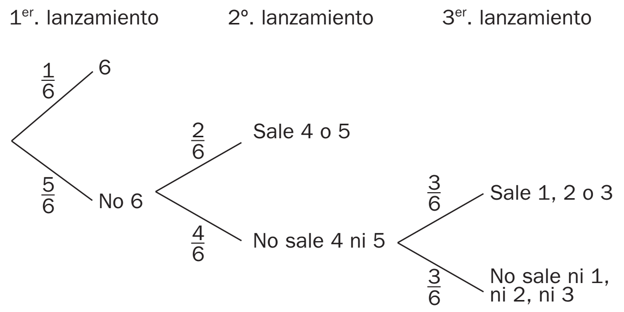
c) $P(A \cap B) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow$ Sí son independientes.

$P(A \cap C) = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$, $P(A) \cdot P(C) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow$ Sí son independientes.

$P(A \cap B \cap C) = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20}$, $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow$ No son independientes.

11.72. (PAU) Tres amigos juegan con un dado de la siguiente forma. Cada uno lanza el dado a lo sumo una vez. Si el primero en lanzar obtiene un 6, gana la partida. Si no, lanza el segundo, y si este saca un 4 o un 5, gana la partida. Si no lo consigue, lanza el tercero, y si saca 1, 2 ó 3, gana la partida. Si no lo consigue, la partida acaba empatada. Halla la probabilidad que tiene de ganar cada jugador y la probabilidad que hay de que la partida quede empatada.



a) $P(\text{gana el 1.º}) = \dfrac{1}{6}$

b) $P(\text{gana el 2.º}) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{18}$

c) $P(\text{gana el 3.º}) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{18}$

d) $P(\text{empate}) = 1 - \dfrac{13}{18} = \dfrac{5}{18}$

PROFUNDIZACIÓN

11.73. (PAU) De dos sucesos *A* y *B* se sabe que son independientes, que la probabilidad de que ocurra uno de ellos es $\dfrac{5}{6}$ y que la probabilidad de que ocurran ambos simultáneamente es $\dfrac{1}{3}$. Halla las probabilidades de *A* y *B*.

Como A y B son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Además, $P(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$ y $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \dfrac{5}{6} = P(A) + P(B) - \dfrac{1}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) = \dfrac{7}{6}$

Se trata de resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} P(A)\cdot P(B) &= \frac{1}{3} \\ P(A) + P(B) &= \frac{7}{6} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &P(A) = \frac{7}{6} - P(B) \\ &\left(\frac{7}{6} - P(B)\right)\cdot P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B)^2 - \frac{7}{6}P(B) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 6P(B)^2 - 7P(B) + 2 = 0 \end{aligned}$$

$P(B) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow P(A) = \dfrac{1}{2}$ o bien $P(B) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \dfrac{2}{3}$

11.74. (PAU) Pere, Juan y ocho amigos más se sientan al azar en torno a una mesa circular. Calcula la probabilidad de que Juan y Pere estén sentados juntos.

El número de formas de sentarse es $PC_{10} = P_9 = 9! = 362\,880$.

Si Pere y Juan se sientan juntos, se les considera a los dos como un único elemento, por tanto habrá:

$2 \cdot PC_9 = 2 \cdot P_8 = 8! = 80\,640$ formas de sentarse.

$P(\text{estén juntos}) = \dfrac{80\,640}{362\,880} = \dfrac{2}{9}$

11.75. (PAU) Un dado está trucado de manera que son iguales las probabilidades de obtener 2, 4 ó 6. También son iguales las probabilidades de obtener 1, 3 ó 5. La probabilidad de obtener un 2 es el doble que la de sacar un 1.

Deduce razonablemente cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado dos veces se obtenga una suma de sus puntuaciones igual a 7.

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=P(3)=P(5)=x \\ P(2)=P(4)=P(6)=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Los modos de obtener una suma de siete serán {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) y (6, 1)}.

$$P(\text{suma } 7) = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

11.76. (PAU) En un famoso concurso de televisión, al concursante se le da a elegir tres puertas. Detrás de una de ellas está el premio mayor, que es un coche, y detrás de las otras dos hay premios menores. Una vez que el concursante elige la puerta, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre siempre una de las puertas donde hay un premio irrisorio. En ese momento, cuando solo quedan dos puertas, siempre pregunta al concursante si desea cambiar de puerta.

¿Crees que el concursante tendrá más posibilidades de ganar si cambia de puerta o si se queda con la que eligió inicialmente?

Inicialmente, la opción que ha elegido el concursante tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de tener el premio mayor.

Como el presentador siempre abre una puerta sin el premio mayor (esto siempre lo puede hacer), de dos puertas que quedan, la que eligió el concursante tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$, y la otra, de $\frac{2}{3}$ de tener el premio mayor. Por tanto, conviene cambiar.

11.77. Se tiene un cubo y se pintan al azar tres caras de color rojo y otras tres de color amarillo. Calcula la probabilidad de que las tres caras de color rojo tengan un vértice en común.

El número de formas de pintar el cubo con tres caras amarillas y tres rojas es $P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

El número de formas de pintar el cubo con tres caras amarillas y tres rojas, de modo que las tres caras de color rojo tengan un vértice en común (consecuentemente, las tres caras de color rojo también lo tendrán), coincide con el número de vértices del cubo, que es 8 $\Rightarrow$ $P(\text{vértice en común}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

11.78. a) Halla la probabilidad de obtener al menos un seis doble en *n* tiradas de dos dados.

b) ¿Cuántas partidas habrá que jugar para que la probabilidad anterior sea $\frac{1}{2}$?

a) Sea A_i el suceso "sacar 6 doble en la tirada *i*-ésima".

La probabilidad pedida será:

$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) =$

$= 1 - P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2)\, P(\overline{A}_3) \ldots P(\overline{A}_n)$, ya que los sucesos son independientes.

$= 1 - [P(\overline{A}_1)]^n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$, ya que todos los sucesos tienen la misma probabilidad.

$P(\text{al menos un 6 doble en } n \text{ tiradas de dos dados}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$

b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{36}{35}\right)^n$. Tomando logaritmos resulta: $\log 2 = n(\log 36 - \log 35) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 25$ partidas

11.79. Demuestra la siguiente igualdad: $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P(A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

11.80. Sean *A*, *B* y *C* tal que *P*(*C*) > 0. Demuestra que *P*(*A* ∪ *B*/*C*) = *P*(*A*/*C*) + *P*(*B*/*C*) – *P*(*A* ∩ *B*/*C*).

$$P(A \cup B/C) = \frac{P\left((A\cup B)\cap C\right)}{P(C)} = \frac{P\left((A\cap C)\cup(B\cap C)\right)}{P(C)} = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} + \frac{P(B\cap C)}{P(C)} - \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} =$$

$= P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$

11.81. De una urna que contiene 6 bolas blancas y *n* negras se extraen *k* bolas. Calcula la probabilidad de que sean *r* blancas:

a) Devolviendo la bola a la urna después de cada extracción.

b) Sin devolverla.

a) $P(r \text{ blancas}) = \binom{k}{r}\cdot\left(\frac{6}{n+6}\right)^{r}\cdot\left(\frac{n}{n+6}\right)^{k-r}$

b) Supondremos las bolas distinguibles.

Casos posibles: $C_{6,r} \cdot C_{n,k-r} \cdot P_k$

Casos favorables: $V_{n+6,k}$

$P(r \text{ blancas}) = \dfrac{C_{6,r}\cdot C_{n,k-r}\cdot P_k}{V_{n+6,k}}$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

11.1. Si *A* y *B* son dos sucesos tales que *P*(*A*) = 0,4, *P*(*B*) = 0,2 y *P*(*A*∪*B*) = 0,5, la probabilidad de que sucedan *A* y *B* es de:

A) 0,1 B) 0,3 C) 0,5 D) 0,6 E) Faltan datos para averiguarlo.

Sabiendo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 0{,}4 + 02 - 0{,}5 = 0{,}1$.

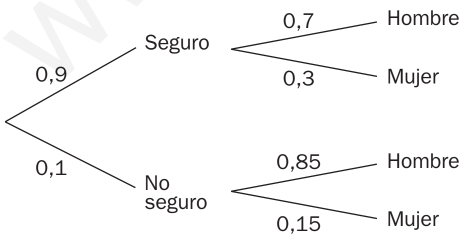
11.2. La probabilidad de que un atleta supere en el salto de longitud la distancia de 8,75 metros es de 0,3. Si realiza tres intentos, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 8,75 metros en los tres saltos?

A) 0,027 B) 0,09 C) 0,27 D) 0,5 E) 0,9

P(supere 8,75 en tres intentos) = $(0{,}9)^3 = 0{,}027$

11.3. El 90% de los coches que circulan llevan el seguro obligatorio. De los coches asegurados, el 70% son conducidos por hombres, y de los coches no asegurados, el 85% son conducidos por hombres. Si elegimos un coche al azar y el conductor es una mujer, la probabilidad de que tenga seguro es de aproximadamente:

A) 0,75 B) 0,83 C) 0,87 D) 0,91 E) 0,95



$$P(\text{seguro / mujer}) = \frac{0{,}9\cdot 0{,}3}{0{,}9\cdot 0{,}3 + 0{,}1\cdot 0{,}15} = 0{,}947$$

Sería la respuesta E.

11.4. De un experimento se sabe que *P*(*A*) = 0,25, *P*(*B*) = 0,6 y *P*(*A*/*B*) = 0,15. La probabilidad del suceso *A* ∪ *B* es de:

A) 0,09 B) 0,45 C) 0,7 D) 0,76 E) 0,8

$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 = 0{,}09$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}09 = 0{,}76$

11.5. Los sucesos *A* y *B* son independientes. Si *P*(*A*) = 0,8 y *P*(*B*) = 0,5, entonces $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ es:

A) 0,3 **B) 0,4** **C) 0,45** **D) 0,6** **E) 0,63**

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}4$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

11.6. De los siguientes experimentos, di cuáles no son aleatorios.

A) Elegir al azar un ángulo de un triángulo equilátero, medirlo y anotar su resultado.

B) Escoger al azar una diagonal de un rombo de área 20 cm^2 y anotar su resultado.

C) Escoger al azar una diagonal de un cuadrado de área 5 cm^2 y anotar su resultado.

D) Medir al azar un radio de una circunferencia de área π cm^2 y anotar su resultado.

E) Medir al azar una cuerda de una circunferencia de área π cm^2 y anotar su resultado.

Son aleatorios B y E.

En A, todos los ángulos miden 60º; en C, las dos diagonales del cuadrado miden lo mismo, $\sqrt{10}$, y en D, todos los radios miden 1 cm.

11.7. Si *P*(*A*) es la probabilidad de obtener al menos una cara cuando lanzamos cuatro monedas, entonces:

A) El número de casos favorables es 4.

B) $P(A^c) = \frac{1}{8}$

C) $P(A^c) = \frac{1}{16}$

D) $P(A) > \frac{5}{6}$

E) $P(A) + P(A^c) < 1$.

Como $P(A) = \frac{15}{16}$, los únicos casos ciertos son C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

11.8. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, entonces *P*(*A*) + *P*(*B*) = 1.

B) Si *A* y *B* son dos sucesos independientes, entonces son también incompatibles.

C) Si *A* y *B* son dos sucesos incompatibles, entonces son también independientes.

D) Si *A* es un suceso imposible, también es independiente con cualquier otro suceso.

E) Si *A* es un suceso seguro, también es independiente con cualquier otro suceso.

Son correctas D y E.

Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ y $P(A) \cdot P(B) = 0$

Si $P(A) = 1$, entonces $P(A \cap B) = P(B)$ y $P(A) \cdot P(B) = P(B)$

Señala los datos innecesarios para contestar:

11.9. Los 250 alumnos matriculados en una academia de idiomas solo pueden estudiar uno de los dos idiomas impartidos: inglés o francés.

Para hallar la probabilidad de que apruebe un alumno elegido al azar:

a) En inglés hay matriculados 200 alumnos.

b) En francés hay matriculados 50 alumnos.

c) En inglés aprueba el 56%.

d) En francés suspende el 26%.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) Puede eliminarse el dato a o el dato b.

E. Si se conoce el número de alumnos matriculados en una de las asignaturas, se conoce también el número de alumnos matriculados en la otra, ya que el total de alumnos es un dato del enunciado y cada alumno solo puede estudiar una de las asignaturas.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

11.10. Para saber si dos sucesos, *A* y *B*, son independientes:

A) Basta con saber las probabilidades de *A* y *B*.

B) Basta con saber si son incompatibles.

C) Basta con saber las probabilidades de la unión y la intersección de los sucesos.

D) Basta con saber la probabilidad de A^c y la de $P(A/B)$.

E) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Si se conoce $P(A^c)$, se conoce $P(A)$ y , en este caso sólo se tiene que ver si coincide con $P(A/B)$. Luego la respuesta correcta es la D