IES Fernando de Herrera **Curso 2013 / 14**
Primer examen Tercer trimestre – 2º Bach CCSS **4 de Abril de 2014**

NOMBRE: ____

1) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica
$$P(A \cap B) = 0.1, \quad P(A^C \cap B^C) = 0.6, \quad P(A/B) = 0.5.$$
   a) Calcule $P(B)$. *(0,7 puntos)*
   b) Calcule $P(A \cup B)$. *(0,8 puntos)*
   c) ¿Son A y B independientes? *(1 punto)*

2) Los alumnos de Bachillerato de un IES proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 50% de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.
   a) Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º? *(1 punto)*
   b) Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B? *(1,5 puntos)*

3) El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0.9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos:
$$9.5, \quad 10, \quad 8.5, \quad 10.5, \quad 12.5, \quad 10.5, \quad 12.5, \quad 13, \quad 12.$$
   a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa. *(1 punto)*
   b) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior? *(0,5 puntos)*
   c) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0.3 kg, con un nivel de confianza del 90%. *(1 punto)*

4) Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.
   a) Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población. *(1,2 puntos)*
   b) Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0.2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra. *(1,3 puntos)*

SOLUCIONES

1) (Selectividad 2007) En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$$P(A\cap B) = 0.1, \quad P(A^C\cap B^C)= 0.6, \quad P(A/B) = 0.5.$$

a) Calcule $P(B)$. *(0,7 puntos)*

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = \boxed{0.2}$$

b) Calcule $P(A\cup B)$. *(0,8 puntos)*

No podemos usar la fórmula $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ porque desconocemos $P(A)$. Pero, según las leyes de Morgan:

$$P[(A\cup B)^C] = P(A^C\cap B^C) = 0.6 \quad \Rightarrow \quad P(A\cup B) = 1 - P[(A\cup B)^C] = 1 - 0.6 = \boxed{0.4}$$

c) ¿Son A y B independientes? *(1 punto)*

Calculemos $P(A)$. Como $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow$

$$P(A) = P(A\cup B) - P(B) + P(A\cap B) = 0.4 - 0.2 + 0.1 = 0.3.$$

Como $P(A) \neq P(A/B) = 0.5$, $\boxed{\text{los sucesos } A \text{ y } B \text{ no son independientes}}$.

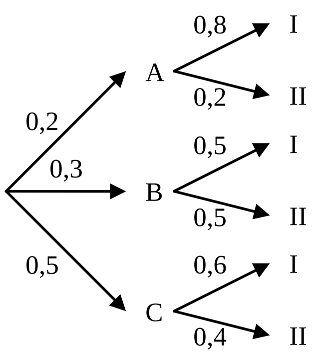
2) Los alumnos de Bachillerato de un IES proceden de 3 localidades A, B y C, siendo un 20% de A, un 30% de B y el resto de C. El 80% de los alumnos de A cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 50% de los alumnos de B cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º. El 60% de los alumnos de C cursa 1º de Bachillerato y el resto 2º.

a) Seleccionado, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º? *(1 punto)*

Con los datos del problema, construimos el árbol que lo describe, resultando el adjunto. Por el *Teorema de la Probabilidad Total*, tendremos:

$$P(\text{II}) = P(A)\cdot P(\text{II}/A) + P(B)\cdot P(\text{II}/B) + P(C)\cdot P(\text{II}/C) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{0.39}$$



b) Si elegimos, al azar, un alumno de Bachillerato de ese IES y éste es un alumno de 1º, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la localidad B? *(1,5 ptos)*

Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada* o por la *Fórmula de Bayes*, se tendrá:

$$P(B/\text{I}) = \frac{P(B\cap I)}{P(I)} = \frac{P(B)\cdot P(I/B)}{1-P(II)} = \frac{0.3\cdot 0.5}{1-0.39} = \boxed{0.2459}$$

3) El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0.9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos:

9.5, 10, 8.5, 10.5, 12.5, 10.5, 12.5, 13, 12.

a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa. *(1 punto)*

La variable aleatoria poblacional mide: X = *peso de un paquete, al azar*.

Podemos construir el intervalo de confianza porque la muestra procede de una población Normal: $X \sim N(\mu; 0.9)$, y entonces $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Sabemos que $\sigma = 0.9$ y que $n = 9$.
De la muestra, obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{9.5+10+8.5+10.5+12.5+10.5+12.5+13+12}{9} = 11$$

Como el *nivel de confianza* es $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \Rightarrow$ Siendo $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.995$, de las tablas de la N(0;1) obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.575$. Por tanto, el *intervalo de confianza al 99% para la media poblacional* es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(11 - 2.575\frac{0.9}{\sqrt{9}},\ 11 + 2.575\frac{0.9}{\sqrt{9}}\right) =$$
$$= \boxed{(10.2275,\ 11.7725)}$$

b) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior? *(0,5 puntos)*
La amplitud del intervalo es: $11.7725 - 10.2275 = 1.545$. El error máximo es la mitad de dicha amplitud: $E = 1.545/2 = \boxed{0.7725}$.

c) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0.3 kg, con un nivel de confianza del 90%. *(1 punto)*

$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Como queremos que $E \le 0.3 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0.3 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3} \le \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3} \Rightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3}\right)^2$$

Siendo el *nivel de confianza* es $1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \Rightarrow$ Siendo $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.95$, de las tablas de la N(0;1) obtenemos que $z_{\alpha/2} = 1.645$. Así:

$$n \ge \left(\frac{1.645 \cdot 0.9}{0.3}\right)^2 = 24.35$$

Como el tamaño muestral no puede tener decimales, el mínimo valor válido para n es de 25.

4) Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.

a) Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población. *(1,2 puntos)*
La proporción de votantes en la muestra es una variable aleatoria que sigue una distribución Binomial. Como el tamaño de la muestra es $n = 500 \ge 30$, podemos aproximar la Binomial por la Normal. Y siendo:

Proporción muestral: $\hat{p} = \frac{200}{500} = 0.4 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.6$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \Rightarrow$ Siendo $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.985$, de las tablas de la N(0;1) obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.17$. Así, el *intervalo de confianza al 97%* pedido es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.4 - 2.17\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}},\ 0.4 + 2.17\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{500}}\right) =$$
$$= \boxed{(0.3525,\ 0.4475)}$$

b) Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0.2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra. *(1,3 puntos)*

$E < 0.05$, siendo $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, con $\hat{p} = 0.2 \Rightarrow \hat{q} = 0.8$, y $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow$ $\alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \Rightarrow$ Siendo $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.995$, de las tablas de la N(0;1) obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.575$. Por tanto:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{0.05} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}}}{0.05}\right)^2 = \left(\frac{2.575\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}{0.05}\right)^2 = 424.36$$

Como el tamaño de la muestra no puede tener decimales, el mínimo valor válido es $\boxed{n = 425}$.

NOMBRE: ____

1) Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.
   a) Calcule la probabilidad de que sea blanca. *(0,7 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?. *(0,5 puntos)*
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada? *(0,5 puntos)*
   d) ¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"? *(0.8 puntos)*

2) Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también está en paro.
   a) Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro. *(1 punto)*
   b) Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? *(1,5 puntos)*

3) Una característica de una determinada población se distribuye según una variable aleatoria Normal X de media desconocida y desviación típica 0.9. Extraída al azar una muestra de tamaño 9 de esa población y observada X, dio como resultados:

   10.5 10 8.5 10.5 11.5 13.5 9.5 13 12

   a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para la media de la variable X. *(1 punto)*
   b) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior? *(0,5 puntos)*
   c) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra de esa población, para que el error máximo que se cometa en la determinación de un intervalo de confianza para la media de X sea, a lo sumo, 0.3, con un nivel de confianza del 90%. *(1 punto)*

4) De una muestra aleatoria de 120 alumnos presentados a las Pruebas de Acceso, sólo 15 han resultado no aptos.
   a) Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba. *(1,2 puntos)*
   b) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%?. *(1,3 puntos)*

SOLUCIONES

1) Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

a) Calcule la probabilidad de que sea blanca. *(0,7 puntos)*

Podemos clasificar la distribución de bolas de la urna según una tabla de doble entrada ("*tabla de contingencia*"). Así, si B son las bolas blancas que hay en la urna, N las negras, M las marcadas y M^C las no marcadas, el número de bolas que hay son:

	M	M^C	Total
B	75	25	100
N	175	125	300
Total	250	150	400

Como suponemos que todas las bolas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, por *Laplace*:

$$P(\text{"sacar bola blanca"}) = P(B) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?. *(0,5 puntos)*

Limitándonos a las bolas marcadas, nuevamente por *Laplace*:

$$P(\text{"sacar blanca" condicionado a que sabemos que "está marcada"}) =$$

$$= P(B/M) = \frac{75}{250} = \boxed{0.3}$$

Otra forma de hacerlo es aplicando el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*:

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{75/400}{250/400} = \frac{75}{250} = 0.3$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada? *(0,5 puntos)*

Una vez más, aplicamos *Laplace*:

$$P(\text{"sacar negra" y "sacar marcada"}) = P(N \cap M) = \frac{175}{400} = \frac{7}{16} = \boxed{0.4375}$$

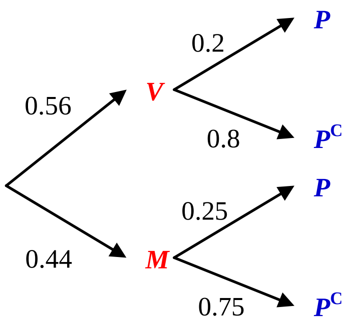
d) ¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"? *(0.8 puntos)*

En los apartados a y b calculamos:

$$P(B) = 0.25 \quad \text{y} \quad P(B/M) = 0.3$$

como no coinciden, $\boxed{\textit{no son independientes}}$.

2) Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también está en paro.



a) Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro. *(1 punto)*

Organizamos las probabilidades en un árbol, siendo V = "ser varón", M = "ser mujer" y P = "estar en paro". Según el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(P) = 0.56 \cdot 0.2 + 0.44 \cdot 0.25 = \boxed{0.222}$$

b) Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? *(1,5 puntos)*

Por el *Axioma de la Probabilidad Condicionada*, o su derivado, la *Fórmula de Bayes*, se tiene:

$$P(V/P^C) = \frac{P(V\cap P^C)}{P(P^C)} = \frac{0.56\cdot 0.8}{1-0.222} = \boxed{0.5758}$$

3) Una característica de una determinada población se distribuye según una variable aleatoria Normal X de media desconocida y desviación típica 0.9. Extraída al azar una muestra de tamaño 9 de esa población y observada X, dio como resultados:

10.5 10 8.5 10.5 11.5 13.5 9.5 13 12

a) Halle un intervalo de confianza, al 99%, para la media de la variable X. *(1 punto)*

Dado que la población original se distribuye *normalmente*, podemos construir el intervalo de confianza, porque entonces $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así:

- $\sigma = 0.9$
- $n = 9$
- $\bar{x} = \dfrac{10.5+10+8.5+10.5+11.5+13.5+9.5+13+12}{9} = 11$
- $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow$ según las tablas de la N(0;1), si $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.995$, se tiene que $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Luego el intervalo de confianza para μ al 99% es:

$$\left(11-2.575\frac{0.9}{\sqrt{9}},\ 11+2.575\frac{0.9}{\sqrt{9}}\right) = \boxed{(10.2275,\ 11.7725)}$$

b) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior? *(0,5 puntos)*

La amplitud del intervalo es: 11.7725 – 10.2275 = 1.545.

El error máximo es la mitad de la amplitud: $E = 1.545/2 = \boxed{0.7725}$

Otra forma hubiera sido: $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575\frac{0.9}{\sqrt{9}} = 0.7725$

c) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra de esa población, para que el error máximo que se cometa en la determinación de un intervalo de confianza para la media de X sea, a lo sumo, 0.3, con un nivel de confianza del 90%. *(1 punto)*

Si $1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow$ según las tablas de la N(0;1), si $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 0.95$, se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.645$.

Como $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queremos que $E \le 0.3 \Rightarrow z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0.3 \Rightarrow$

$$\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3} \le \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3} \Rightarrow n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{0.3}\right)^2 = \left(\frac{1.645\cdot 0.9}{0.3}\right)^2 = 24.35.$$

Pero el tamaño muestral n no puede tener decimales, así que el primer valor válido es $\boxed{n = 25}$.

4) De una muestra aleatoria de 120 alumnos presentados a las Pruebas de Acceso, sólo 15 han resultado no aptos.

a) Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de alumnos que han resultado aptos en dicha prueba. *(1,2 puntos)*

La proporción de aptos en la muestra es una variable aleatoria que sigue una distribución Binomial. Como el tamaño de la muestra es $n = 120 \geq 30$, podemos aproximar la Binomial por la Normal, según el *Teorema de Moivre-Laplace*, caso particular del *Teorema Central del Límite de Lindeberg-Levy*. Y siendo:

Proporción muestral: $\hat{p} = \dfrac{105}{120} = 0.875 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.125$

Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow$ según las tablas de la N(0;1), si $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 0.995$, se tiene que $z_{\alpha/2} = 2.575$. Así, el *intervalo de confianza al 97%* pedido es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$\left(0.875 - 2.575\sqrt{\frac{0.875\cdot 0.125}{120}},\ 0.875 + 2.575\sqrt{\frac{0.875\cdot 0.125}{120}}\right) =$$

$$= \boxed{(0.7973,\ 0.9527)}$$

b) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción de alumnos aptos, cometiendo un error inferior al 5%?. *(1,3 puntos)*

Si cambiamos el tamaño de la muestra, la muestra de trabajo será otra, y los valores de $\hat{p}$ y $\hat{q}$ serán otros. Para poder contestar a esta cuestión con los datos que tenemos, no nos queda más remedio que suponer que dichos valores en la nueva muestra van a coincidir con los que ya tenemos.

Por otra parte, la proporción se mide en tantos por uno, por lo que el error debe convertirse a dicha escala. Así:

$$E < 0.05 \Rightarrow z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\cdot\hat{q}}}{\sqrt{n}} < 0.05 \Rightarrow \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\cdot\hat{q}}}{0.05} < \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\cdot\hat{q}}}{0.05} \Rightarrow n > \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\cdot\hat{q}}}{0.05}\right)^2 = \left(\frac{2.575\cdot\sqrt{0.875\cdot 0.125}}{0.05}\right)^2 = 290.09$$

Pero el tamaño muestral n no puede tener decimales, así que el primer valor válido es $\boxed{n = 291}$.

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcule:
   a) $P(A/B)$ y $P(B/A)$. *(0,5 puntos)*
   b) $P(A \cup B)$. *(0,5 puntos)*
   c) $P(A^C \cap B)$. *(1 punto)*

2) En un colectivo de personas, el 80% tiene más de 35 años. De los mayores de 35 años, el 40% son mujeres. De los que no han superado los 35 años, el 45% son hombres. Se elige una persona, al azar, de ese colectivo.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(1 punto)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya superado los 35 años sabiendo que se ha elegido un hombre? *(1 punto)*

3) Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1.75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0.2 m.
   a) Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional de la talla de los estudiantes. *(1 punto)*
   b) ¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1.73, 1.77) para la media poblacional? *(1 punto)*

4) El director de una televisión afirma que un nuevo programa que va a emitirse será visto, al menos, por un 30% de personas. Una vez emitido se realizó una encuesta a 500 personas, elegidas al azar, y ésta reveló que 130 de ellas habían visto ese programa.
   a) Formule la hipótesis nula y la alternativa del contraste de hipótesis que permite determinar si los datos de la encuesta realizada son compatibles con la afirmación del director. *(0,5 puntos)*
   b) Halle la región crítica de ese contraste para un nivel de significación del 5.5%. *(0,5 puntos)*
   c) Según el dato obtenido en el apartado anterior, ¿qué conclusión se obtiene sobre la afirmación realizada por el director de esa televisión? *(1 punto)*

5) En un distrito universitario, la calificación de los alumnos sigue una distribución Normal de media 6.2 puntos y desviación típica de 1 punto. Se seleccionó, aleatoriamente, una muestra de tamaño 25.
   a) Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25. *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6 y 6.6 puntos? *(1 punto)*
   c) Dada la población {10, 12, 17}, escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN APROBADA

1) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcule:

a) $P(A/B)$ y $P(B/A)$. *(0,5 puntos)*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $P(A \cup B)$. *(0,5 puntos)*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

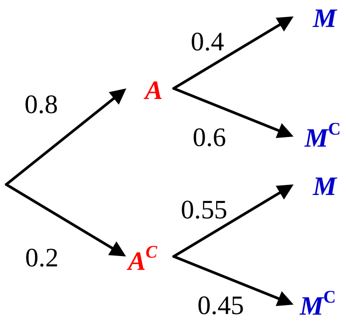
c) $P(A^C \cap B)$. *(1 punto)*

$$P(A^C \cap B) = P(B \cap A^C) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

2) En un colectivo de personas, el 80% tiene más de 35 años. De los mayores de 35 años, el 40% son mujeres. De los que no han superado los 35 años, el 45% son hombres. Se elige una persona, al azar, de ese colectivo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? *(1 punto)*

Llamemos A = Ser mayor de 35 años, y M = Ser mujer. Distribuimos las probabilidades en un diagrama de árbol.



Por el *Teorema de la Probabilidad Total*:

$$P(M) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.55 = \boxed{0.43}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya superado los 35 años sabiendo que se ha elegido un hombre?

Por el Axioma de la Probabilidad condicionada, de donde procede la Fórmula de Bayes:

$$P(A^C/M^C) = \frac{P(A^C \cap M^C)}{P(M^C)} = \frac{0.2 \cdot 0.45}{1 - 0.43} = \boxed{0.1579}$$

(1 punto)

3) Se ha medido la talla de 100 personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de 1.75 m. Se sabe que la desviación típica de la población es 0.2 m.

a) Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional de la talla de los estudiantes. *(1 punto)*

No sabemos cuál es la distribución de la población, pero el *Teorema Central del Límite* nos dice que al aumentar n la media muestral tiende a una distribución: $\bar{x} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Y sabemos que si $n \geq 30$ la aproximación es buena. Basándonos en esto, dado que $n = 100$, podemos construir el *intervalo de confianza*.

Como $1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1$. Buscamos en las tablas de la N(0, 1) $z_{\alpha/2}$ / $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0.95$, obteniendo que $z_{\alpha/2} = 1.645$. Así:

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1.75 - 1.645\frac{0.2}{\sqrt{100}},\ 1.75 - 1.645\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= \boxed{(1.7171,\ 1.7829)}$$

con un nivel de confianza del 90%.

b) ¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo (1.73, 1.77) para la media poblacional? *(1 punto)*

Si nos fijamos, el centro del intervalo es $\frac{1.73 + 1.77}{2} = 1.75 = \bar{x}$. El error es la mitad de la *amplitud*, o sea: $E = \frac{1.77 - 1.73}{2} = 0.02$.

Sabemos que $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Sustituyendo los datos que tenemos (es de suponer, como trabajamos con la misma muestra, que $n = 100$):

$$0.02 = z_{\alpha/2}\frac{0.2}{\sqrt{100}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.02 \cdot 10}{0.2} = 1.$$

Por tanto, $P(Z \le z_{\alpha/2}) = P(Z \le 1) = 0.8413$.

Por otra parte, $P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. De donde:

$$1 - \alpha/2 = 0.8413 \Rightarrow \alpha/2 = 1 - 0.8413 \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.8413) = 0.3174.$$

Luego el nivel de confianza es: $1 - \alpha = \boxed{0.6826}$.

4) El director de una televisión afirma que un nuevo programa que va a emitirse será visto, al menos, por un 30% de personas. Una vez emitido se realizó una encuesta a 500 personas, elegidas al azar, y ésta reveló que 130 de ellas habían visto ese programa.

a) Formule la hipótesis nula y la alternativa del contraste de hipótesis que permite determinar si los datos de la encuesta realizada son compatibles con la afirmación del director. *(0,5 puntos)*

$$\begin{cases} H_0 : p \ge 0.3 \\ H_1 : p < 0.3 \end{cases}$$

b) Halle la región crítica de ese contraste para un nivel de significación del 5.5%. *(0,5 puntos)*

Se trata de un contraste *unilateral* sobre la proporción poblacional. El contraste se realiza en base a la aproximación que proporcional el *Teorema Central del Límite*: $\hat{p} \in N\left(p;\ \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ (siendo $\hat{p}$ la proporción muestral y p la poblacional, con $q = 1 - p$), y dicha aproximación es válida si $n \ge 30$, que es el caso.

Siendo z_α / $P(Z \le z_\alpha) = 1 - \alpha = 1 - 0.055 = 0.945 \Rightarrow z_\alpha = 1.6$. Por tanto, la región de aceptación es:

$$RA_{0.055} = \left(p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}},\ +\infty\right) = \left(0.3 - 1.6\sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{500}},\ +\infty\right) = (0.2672, +\infty)$$

De donde la *región crítica* es: $\boxed{RC_{0.055} = (-\infty,\ 0.2672)}$.

c) Según el dato obtenido en el apartado anterior, ¿qué conclusión se obtiene sobre la afirmación realizada por el director de esa televisión? *(1 punto)*

Como que $\hat{p} = \dfrac{130}{500} = 0.26 \in (-\infty, 0.2672)$, es decir, a la *región crítica*, *rechazamos la hipótesis nula* con un nivel de significación del 5.5%. Esto es, si fuese cierta, en realidad, la *hipótesis nula*, la probabilidad de habernos equivocado (*error de tipo I*) es sólo del 5.5%. Así que, en estas condiciones, $\boxed{\text{rechazamos la afirmación del director}}$.

5) En un distrito universitario, la calificación de los alumnos sigue una distribución Normal de media 6.2 puntos y desviación típica de 1 punto. Se seleccionó, aleatoriamente, una muestra de tamaño 25.

a) Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25. *(0,5 puntos)*

Puesto que X = calificación de un alumno ~ N(6.2, 1), por las propiedades de la Ley Normal sabemos que $\bar{x} \in N\left(\mu; \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(6.2, \dfrac{1}{\sqrt{25}}\right) = \boxed{N\left(6.2, \dfrac{1}{5}\right)}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6 y 6.6 puntos? *(1 punto)*

Según lo anterior, tipificando:

$$P(6 \le \bar{x} \le 6.6) = P\left(\frac{6-6.2}{1/5} \le Z \le \frac{6.6-6.2}{1/5}\right) = P(-1 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z < -1) = \text{(por simetría de la Normal)} = P(Z \le 2) - P(Z > 1) =$$

$$= \text{(suceso contrario)} = P(Z \le 2) - [1 - P(Z \le 1)] = P(Z \le 2) + P(Z \le 1) - 1 =$$

$$= 0.9772 + 0.8413 - 1 = \boxed{0.8185}$$

c) Dada la población {10, 12, 17}, escriba todas las muestras de tamaño 2 mediante muestreo aleatorio simple y calcule la media y la desviación típica de las medias muestrales. *(0,5 puntos)*

Muestras	(10, 10)	(10, 12)	(10, 17)	(12, 10)	(12, 12)	(12, 17)	(17, 10)	(17, 12)	(17, 17)
Medias	10	11	13.5	11	12	14.5	13.5	14.5	17

$$\bar{x} = \frac{10+11+13.5+11+12+14.5+13.5+14.5+17}{9} = \boxed{13}$$

$$s = \sqrt{\frac{10^2+11^2+13.5^2+11^2+12^2+14.5^2+13.5^2+14.5^2+17^2}{9} - 13^2} = \boxed{2.0817}$$

NOMBRE: ____

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) a) **(1.5 puntos)** Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \; x \geq 0.$$

b) **(1 punto)** Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

2) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) **(0.7 puntos)** Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

b) **(1.8 puntos)** Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

3) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) **(1.2 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

c) **(0.3 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.

4) **(2.5 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

SOLUCIONES

ALUMNOS CON LA 1ª Y 2ª EVALUACIÓN SUSPENDIDA

1) a) **(1.5 puntos)** Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 - 2x, \quad x - 100 \leq 3y, \quad x + 2y \leq 600, \ x \geq 0.$$

Dibujamos las rectas que resultan al sustituir las desigualdades por iguales. Para ello, consideramos las tablas de valores siguientes ($x = 0$ es el eje OY):

- $y = 200 - 2x$

x	0	100
y	200	0

- $x - 100 = 3y$

x	0	100
y	–33.3	0

- $x + 2y = 600$

x	0	600
y	300	0

Estas tablas nos ayudan a decidir qué dimensiones consideraremos para los ejes al dibujar el gráfico.

Al despejar y en la primera inecuación, resulta $y \geq 200 - 2x$, es decir, $y \geq$ (recta), dado que la recta es $y = 200 - 2x$. Por tanto, de las dos regiones en las que el plano queda dividido por la recta, el semiplano que nos interesa es el superior. Lo señalamos con unas flechitas.

En la segunda, por idéntica razón, es el semiplano superior, pues quedaría $y \geq \dfrac{x-100}{3}$, o sea, $y \geq$ (recta), porque la recta es $y = \dfrac{x-100}{3}$.

Análogamente, es el inferior en la tercera, y el semiplano que queda a la derecha del eje OY, por ser $x \geq 0$ la cuarta.

Calculemos sus vértices. Hay tres que tenemos de las tablas de valores anteriores:

$$\boxed{A(0, 300)} \quad \boxed{C(100, 0)} \quad \boxed{D(0, 200)}$$

El que falta es la intersección de las rectas que observamos en el gráfico,

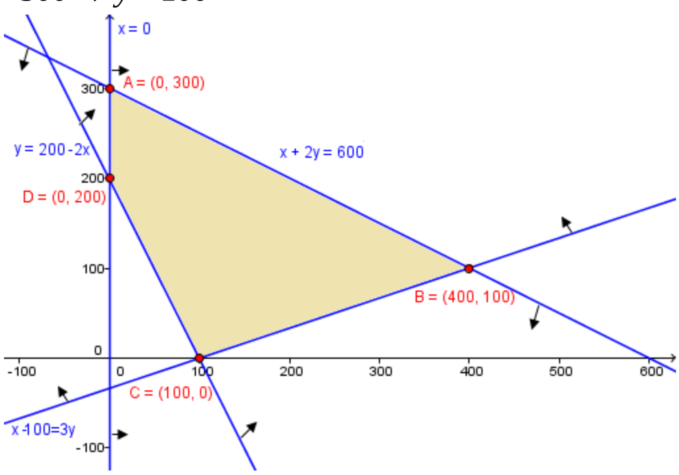
$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 600 \\ x - 100 &= 3y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 600 \\ -x + 3y &= -100 \end{aligned}\right\}$$
$$5y = 500 \Rightarrow y = 100$$

Sustituyendo en la 2ª:

$$x = 3y + 100 = 300 + 100 = 400$$

Luego $\boxed{B(400, 100)}$.

Todo lo hemos reflejado en el gráfico.



b) **(1 punto)** Sabiendo que A(0, 2), B(1, 4), C(3, 4), D(4, 2) y E(2, 1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x, y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

Este apartado no tiene nada que ver con el anterior.

$F(A) = F(0, 2) = 10\cdot 0 + 5\cdot 2 + 21 = 31$
$F(B) = F(1, 4) = 10\cdot 1 + 5\cdot 4 + 21 = 51$
$F(C) = F(3, 4) = 10\cdot 3 + 5\cdot 4 + 21 = 71$
$F(D) = F(4, 2) = 10\cdot 4 + 5\cdot 2 + 21 = 71$
$F(E) = F(2, 1) = 10\cdot 2 + 5\cdot 1 + 21 = 46$

De donde:

El *máximo* vale 71 y se alcanza en los vértices $C(3, 4)$, $D(4, 2)$ y todos y cada uno de los puntos del segmento que los une. El *mínimo* vale 31 y se alcanza en $A(0, 2)$.

2) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & si \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

a) **(0.7 puntos)** Calcule el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

Exijamos que se cumplan las tres condiciones de continuidad para $x = 1$:

1) $\exists f(1) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$, pues cuando $x = 1$, $f(x) = 1 - 2x^2$.

2) Como:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-2x^2) = -1 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 2ax + 3) = 4 - 2a$$

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow -1 = 4 - 2a \Leftrightarrow 2a = 5 \Leftrightarrow a = 5/2.$$

3) Con dicho valor de a se tiene que $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Por tanto, se cumplen las tres y $\boxed{f \text{ es continua en } x = 1, \text{ si } a = 5/2}$.

b) **(1.8 puntos)** Para $a = 2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

Tenemos que $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 3 & si \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & si \quad x > 3 \end{cases}$

- Zona $(-\infty, 1)$: f es continua porque coincide con una función polinómica de grado 2.
- Zona $(1, 3)$: Lo mismo y por la misma razón.
- Zona $(3, +\infty)$: Idéntico.
- $x = 1$: 1) $\exists f(1) = 1 - 2\cdot 1^2 = -1$; 2) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-2x^2) = -1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 - 4x + 3) = 0$. No coinciden los límites laterales, por lo que estamos ante una *discontinuidad de salto finito*.
- $x = 3$: 1) $\exists f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 0$; 2) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x^2 - 4x + 3) = 0$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(-x^2 + 8x - 15) = 0$. Coinciden los límites laterales $\Rightarrow$ Existe el límite completo, cuyo valor es 0. 3) $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Por tanto, f es *continua* en $x = 3$.

En resumen, $\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{1\}, \text{ con disc. de salto finito en } x = 1}$.

Derivabilidad
Las fórmulas de la tabla de derivadas son aplicables en intervalos abiertos, de donde:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1<x<3 \\ -2x+8 & si \quad x>3 \end{cases}$$

Sabemos que $\nexists f'(1)$, porque f no es continua en $x = 1$. Falta ver qué sucede en $x = 3$:

$$f'(3^-) = 2\cdot 3 - 4 = 2 \qquad f'(3^+) = -2\cdot 3 + 8 = 2 \quad \Rightarrow \quad \exists f'(3) = 2$$

Llevando este resultado a lo que teníamos, obtenemos la expresión definitiva de la función derivada:

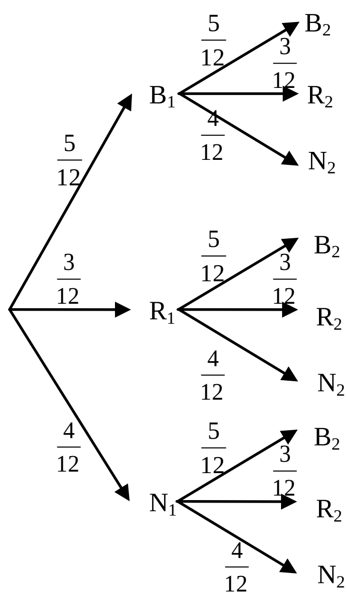
$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -4x & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1<x\le 3 \\ -2x+8 & si \quad x>3 \end{cases}}$$

El = podría haberse añadido, también (en lugar de donde está), en la última fórmula que define f, cuando $x \ge 3$, porque en ambos lugares se obtiene que $f'(3) = 2$.

3) Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

a) **(1.2 puntos)** Calcule la probabilidad de que gane Ana.

Estamos ante dos experimentos cuyos sucesos son independientes, porque la bola extraída en primer lugar se reemplaza, y no cambian las probabilidades de la segunda extracción. Sin embargo, un diagrama de árbol nos va a ayudar a clarificar la situación y a razonar.



Tenemos, entonces:

P(gane Ana) =

$$= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2) =$$

$$= \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} + \frac{3}{12}\cdot\frac{3}{12} + \frac{4}{12}\cdot\frac{4}{12} = \boxed{\frac{25}{72} = 0.3472}$$

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

Análogamente:

P(gane Manolo) =

$$= P(B_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) =$$

$$= \frac{5}{12}\frac{3}{12} + \frac{5}{12}\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\frac{5}{12} + \frac{4}{12}\frac{5}{12} = \boxed{\frac{35}{72} = 0.4861}$$

c) **(0.3 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya empate.

$$P(\text{empate}) = 1 - \left(\frac{25}{72} + \frac{35}{72}\right) = \boxed{\frac{1}{6} = 0.1667}$$

4) **(2.5 puntos)** Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0.01.

El contraste será:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.7 \\ H_1 : p \neq 0.7 \end{cases}$$

Se trata de un contraste *bilateral* sobre la proporción poblacional. El contraste se realiza en base a la aproximación que proporcional el *Teorema Central del Límite*: $\hat{p} \in N\left(p;\ \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ (siendo $\hat{p}$ la proporción muestral y p la poblacional, con $q = 1 - p$), y dicha aproximación es válida si $n \geq 30$, que es el caso.

Siendo $z_{\alpha/2}$ / $P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.01/2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$. Por tanto, la región de aceptación es:

$$RA_{0.01} = \left(p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}},\ p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right) =$$

$$= \left(0.7 - 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}},\ 0.7 + 2.575\sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{500}}\right) = (0.6472,\ 0.7528)$$

Y como tenemos que $\hat{p} = \frac{340}{500} = 0.68 \in (0.6472,\ 0.7528) \Rightarrow$ <u>Aceptamos la *hipótesis nula*, es decir, que el 70% de las familias cena viendo la televisión con un nivel de confianza del 99%</u>.