IES Fernando de Herrera **Curso 2014 / 15**
Segundo trimestre – Primer Examen – 2º Bach CCSS

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $y=\dfrac{3x^2+1}{(2x^3-3)^2}$ b) $y=2^{7x-3}\ln(x^4+1)$

2) Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+9 & \text{si } -3\le x<-1 \\ -x^2+4x+7 & \text{si } -1\le x<1 \\ -x^2+11 & \text{si } 1\le x\le 3 \end{cases}$

a) Calcular sus derivadas primera y segunda. *(1,5 puntos)*
b) Estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*
c) Estudiar su curvatura y calcular sus puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*
d) Calcular las coordenadas de sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*
e) Calcular la recta tangente en $x=-2$. *(1,5 puntos)*

3) Calcular las asíntotas de $y=\dfrac{2x^3-3}{x^2-4}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $y = \dfrac{3x^2+1}{(2x^3-3)^2}$ b) $y = 2^{7x-3}\ln(x^4+1)$

a) $y' = \dfrac{6x(2x^3-3)^2-(3x^2+1)2(2x^3-3)6x^2}{(2x^3-3)^4} =$

$$= \frac{(2x^3-3)[6x(2x^3-3)-(3x^2+1)12x^2]}{(2x^3-3)^4} = \frac{12x^4-18x-36x^4-12x^2}{(2x^3-3)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{-24x^4-12x^2-18x}{(2x^3-3)^3}}$$

b) $y' = 7\cdot 2^{7x-3}\ln 2\ln(x^4+1) + 2^{7x-3}\dfrac{4x^3}{x^4+1} = \boxed{2^{7x-3}\left(7\ln 2\ln(x^4+1)+\dfrac{4x^3}{x^4+1}\right)}$

2) Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2+8x+9 & \text{si} \quad -3 \le x < -1 \\ -x^2+4x+7 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -x^2+11 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$

a) Calcular sus derivadas primera y segunda. *(1,5 puntos)*

Antes de proceder a derivar una función definida a trozos, hay que estudiar su continuidad, porque si detectamos algún punto donde no sea continua, especialmente los puntos de conexión, en dicho punto *no puede ser derivable*.

Continuidad

- $[-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$: f es continua, porque está definida por funciones polinómicas, que siempre son continuas.
- $x = -1$: Los puntos de conexión de zonas de definición de una función definida a trozos siempre deben estudiarse por separado.

  1) $\exists f(-1) = -(-1)^2 + 4(-1) + 7 = 2$

  2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+8x+9) = 2$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(-x^2+4x+7) = 2$

  f es continua en $x = -1$ por coincidir estos resultados.
- $x = 1$:

  1) $\exists f(1) = -1^2 + 11 = 10$

  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+4x+7) = 10$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2+11) = 10$

  f es continua en $x = 1$ por coincidir estos resultados.

En definitiva, $\boxed{f \text{ es continua en } [-3, 3]}$. Recordar que una función continua en un intervalo cerrado significa que lo es en todos los puntos del *abierto* y *lateralmente* en los extremos del cerrado desde dentro, es decir, continua por la derecha en el extremo inferior del intervalo y por la izquierda en el superior.

<u>Derivada primera</u>

La función no tiene, en principio, ningún punto de su dominio a descartar porque no sea continua en él. Aplicamos las fórmulas de la tabla de derivadas, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, obteniendo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad -3 < x < -1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -2x & \text{si} \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

Y nos falta estudiar si la derivada existe en los puntos de conexión. Para ello, hemos de estudiar las derivadas laterales, porque la definición de f no coincide a cada lado de los mismos. Dichas derivadas laterales las obtendremos aplicando el límite lateral correspondiente a la definición de derivada, pero las fórmulas de las tablas de derivadas nos dan los resultados de dichos límites, por lo que:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1^-) = 2(-1)+8 = 6 \\ f'(-1^+) = -2(-1)+4 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(-1) = 6, \text{ por coincidir las laterales.}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(1^-) = -2\cdot 1+4 = 2 \\ f'(1^+) = -2\cdot 1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(1) \text{ por no coincidir las laterales.}$$

De modo que hemos de cambiar el resultado que habíamos obtenido para f', para recoger estos resultados:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad -3 < x < -1 \\ -2x+4 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -2x & \text{si} \quad 1 < x < 3 \end{cases}}$$

Hemos puesto el igual en el mismo sitio que estaba en la función f, por coherencia con la misma. Pero la misma información la tendríamos escribiéndolo en el lado contrario.

<u>Derivada segunda</u>

De forma similar, dado que f' presenta discontinuidad en $x = 1$, puesto que no tiene imagen, en dicho punto no es derivable. Así:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3 < x < -1 \\ -2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f''(-1^-) = 2 \\ f''(-1^+) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f''(-1) \text{ por no coincidir las laterales.}$$

En $x = 1$ no existe, porque la función que estamos derivando: f', no es continua. Nótese que sin esta información obtendríamos <u>falsamente</u> que existiría $f''(1)$:

$$\left.\begin{array}{r} f''(1^-) = -2 \\ f''(1^+) = -2\cdot \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f''(1) = -2, \text{ por coincidir las laterales (falso).}$$

De modo que, finalmente:

$$\boxed{f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3 < x < -1 \\ -2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \end{cases}}$$

b) Estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f ó f': $x = 1$ es discontinuidad de f', como hemos visto antes.
- $f'(x) = 0$: Vemos si alguna de las tres fórmulas que componen f' se anula:
  - $2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$, que no nos vale, porque no está en la zona en la que f' coincide con $y = 2x + 8$, que es $(-3, -1)$.
  - $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$, por lo que tampoco sirve.
  - $-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (1, 3)$, por lo que lo descartamos igualmente.

De esta forma:

	$(-3, 1)$	1	$(1, 3)$
f'	+	$\nexists$	–
f	↗	Mx	↘

Las coordenadas del máximo relativo son (1, 10), pues $f(1) = 10$. Así:

f es *creciente* en $(-3, 1)$, *decreciente* en $(1, 3)$ con un *máximo relativo* en $(1, 10)$

c) Estudiar su curvatura y calcular sus puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f, f' ó f'': $x = -1$ de f'' y $x = 1$, de f' y f''.
- $f''(x) = 0$: Nunca (las ecuaciones $2 = 0$ ó $-2 = 0$ no tienen solución).

	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$
f''	+	$\nexists$	–	$\nexists$	–
f	$\cup$ **convexa**	P.I.	$\cap$ **cóncava**	nada	$\cap$ **cóncava**

Tenemos dos puntos de inflexión, porque, aunque f'' no exista, sí que lo hace f y cambia la curvatura al pasar por ellos. Sus coordenadas las obtenemos de f. De manera que, concluyendo:

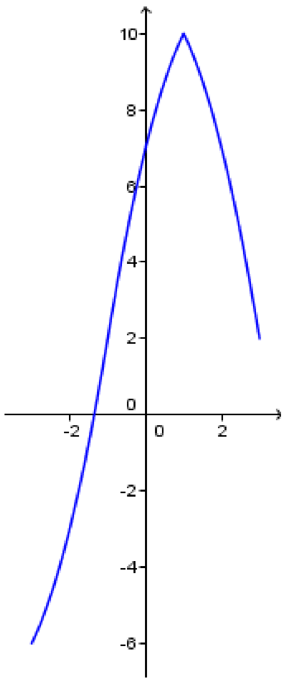
f es convexa en $(-3, -1)$ y cóncava en $(-1, 1)$ y $(1, 3)$. P. de I.: $(-1, 2)$

d) Calcular las coordenadas de sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

- Extremos del intervalo:
  $x = -3$: $f(-3) = -6$
  $x = 2$: $f(3) = 2$
- Extremos relativos:
  $x = 1$: $f(1) = 10$

Así:

El máximo absoluto vale 10 y se alcanza en $x = 1$.
El mínimo absoluto vale –6 y se alcanza en $x = -3$.



e) Calcular la recta tangente en $x = -2$. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $f(-2) = -3$: $(-2, -3)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-2) = 4$.
- Recta tangente: $y + 3 = 4(x + 2) \Rightarrow y = 4x + 8 - 3 \Rightarrow$ Es: $y = 4x + 5$

Incluimos la gráfica de la función, obtenida mediante el programa gratuito *Geogebra* (www.geogebra.org) escribiendo:
f(x) = Si(-3 <= x < -1, x² + 8x + 9, Si(-1 <= x < 1, -x² + 4x + 7, Si(1 <= x <= 3, -x² + 11)))

3) Calcular las asíntotas de $y = \dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 4}$ *(1,5 puntos)*

- <u>Verticales</u>: Las discontinuidades de esta función las encontramos cuando el denominador se anula: $x = -2$ ó $x = 2$. Si hay asíntotas verticales, será en ellas:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^3 - 3}{x^2 - 4} = \frac{-16 - 3}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x = -2 \text{ es una A.V.}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 3}{x^2 - 4} = \frac{16 - 3}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ es una A.V.}}$$

- <u>Horizontales</u>: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 4} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty \Rightarrow \boxed{\text{No tiene A.H}}$.

- <u>Oblicuas</u>: $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x^3 - 3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3}{x^3 - 4x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3 - 3}{x^2 - 4} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3 - 2x^3 + 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x - 3}{x^2 - 4}$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} = \left(\frac{8}{\infty}\right) = 0$$

De modo que $\boxed{y = 2x \text{ es asíntota oblicua}}$.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $y = \dfrac{5x^2+1}{(2x^3-3)^2}$ b) $y = 3^{7x-3}\ln(x^4+1)$

2) Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2-8x-9 & \text{si} \quad -3 \le x < -1 \\ x^2-4x-7 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2-11 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$

a) Calcular sus derivadas primera y segunda. *(1,5 puntos)*
b) Estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*
c) Estudiar su curvatura y calcular sus puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*
d) Calcular las coordenadas de sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*
e) Calcular la recta tangente en $x = -2$. *(1,5 puntos)*

3) Calcular $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3-\sqrt{x+12}}{6x^3+19x^2+x-6}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $y = \dfrac{5x^2+1}{(2x^3-3)^2}$ b) $y = 3^{7x-3}\ln(x^4+1)$

a) $y' = \dfrac{10x(2x^3-3)^2-(5x^2+1)2(2x^3-3)6x^2}{(2x^3-3)^4} =$

$= \dfrac{(2x^3-3)[10x(2x^3-3)-(5x^2+1)12x^2]}{(2x^3-3)^4} = \dfrac{20x^4-30x-60x^4-12x^2}{(2x^3-3)^3} =$

$= \boxed{\dfrac{-40x^4-12x^2-30x}{(2x^3-3)^3}}$

b) $y' = 7\cdot 3^{7x-3}\ln 3\ln(x^4+1) + 3^{7x-3}\dfrac{4x^3}{x^4+1} = \boxed{3^{7x-3}\left(7\ln 3\ln(x^4+1)+\dfrac{4x^3}{x^4+1}\right)}$

2) Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2-8x-9 & \text{si} \quad -3 \le x < -1 \\ x^2-4x-7 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2-11 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$

a) Calcular sus derivadas primera y segunda. *(1,5 puntos)*

Antes de proceder a derivar una función definida a trozos, hay que estudiar su continuidad, porque si detectamos algún punto donde no sea continua, especialmente los puntos de conexión, en dicho punto *no puede ser derivable*.

Continuidad

- $[-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$: f es continua, porque está definida por funciones polinómicas, que siempre son continuas.
- $x = -1$: Los puntos de conexión de zonas de definición de una función definida a trozos siempre deben estudiarse por separado.
  1) $\exists f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) - 7 = -2$
  2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(-x^2-8x-9) = -2$
  $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-4x-7) = -2$
  f es continua en $x = -1$ por coincidir estos resultados.
- $x = 1$:
  1) $\exists f(1) = 1^2 - 11 = -10$
  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-4x-7) = -10$
  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-11) = -10$
  f es continua en $x = 1$ por coincidir estos resultados.

En definitiva, $\boxed{f \text{ es continua en } [-3, 3]}$. Recordar que una función continua en un intervalo cerrado significa que lo es en todos los puntos del *abierto* y *lateralmente* en los extremos del cerrado desde dentro, es decir, continua por la derecha en el extremo inferior del intervalo y por la izquierda en el superior.

<u>Derivada primera</u>

La función no tiene, en principio, ningún punto de su dominio a descartar porque no sea continua en él. Aplicamos las fórmulas de la tabla de derivadas, lo que puede hacerse en intervalos abiertos, obteniendo:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-8 & \text{si } \ -3<x<-1 \\ 2x-4 & \text{si } \ -1<x<1 \\ 2x & \text{si } \ 1<x<3 \end{cases}$$

Y nos falta estudiar si la derivada existe en los puntos de conexión. Para ello, hemos de estudiar las derivadas laterales, porque la definición de f no coincide a cada lado de los mismos. Dichas derivadas laterales las obtendremos aplicando el límite lateral correspondiente a la definición de derivada, pero las fórmulas de las tablas de derivadas nos dan los resultados de dichos límites, por lo que:

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1^-) = -2(-1)-8 = -6 \\ f'(-1^+) = 2(-1)-4 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(-1) = -6 \text{, por coincidir las laterales.}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(1^-) = 2\cdot 1-4 = -2 \\ f'(1^+) = 2\cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(1) \text{ por no coincidir las laterales.}$$

De modo que hemos de cambiar el resultado que habíamos obtenido para f', para recoger estos resultados:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2x-8 & \text{si } \ -3<x<-1 \\ 2x-4 & \text{si } \ -1\le x<1 \\ 2x & \text{si } \ 1<x<3 \end{cases}}$$

Hemos puesto el igual en el mismo sitio que estaba en la función f, por coherencia con la misma. Pero la misma información la tendríamos escribiéndolo en el lado contrario.

<u>Derivada segunda</u>

De forma similar, dado que f' presenta discontinuidad en $x = 1$, puesto que no tiene imagen, en dicho punto no es derivable. Así:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } \ -3<x<-1 \\ 2 & \text{si } \ -1<x<1 \\ 2 & \text{si } \ 1<x<3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f''(-1^-) = -2 \\ f''(-1^+) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f''(-1) \text{ por no coincidir las laterales.}$$

En $x = 1$ no existe, porque la función que estamos derivando: f', no es continua. Nótese que sin esta información obtendríamos <u>falsamente</u> que existiría $f''(1)$:

$$\left.\begin{array}{r} f''(1^-) = 2 \\ f''(1^+) = 2\cdot \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f''(1) = 2 \text{, por coincidir las laterales (falso).}$$

De modo que, finalmente:

$$\boxed{f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } \ -3<x<-1 \\ 2 & \text{si } \ -1<x<1 \\ 2 & \text{si } \ 1<x<3 \end{cases}}$$

b) Estudiar su monotonía y calcular sus extremos relativos. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f ó f': $x = 1$ es discontinuidad de f', como hemos visto antes.
- $f'(x) = 0$: Vemos si alguna de las tres fórmulas que componen f' se anula:
  - $-2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4$, que no nos vale, porque no está en la zona en la que f' coincide con $y = -2x - 8$, que es $(-3, -1)$.
  - $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$, por lo que tampoco sirve.
  - $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (1, 3)$, por lo que lo descartamos igualmente.

De esta forma:

	$(-3, 1)$	1	$(1, 3)$
f'	$-$	$\nexists$	$+$
f	↘	min	↗

Las coordenadas del máximo relativo son $(1, -10)$, pues $f(1) = -10$. Así:

f es *decreciente* en $(-3, 1)$, *creciente* en $(1, 3)$ con un *mínimo relativo* en $(1, -10)$

c) Estudiar su curvatura y calcular sus puntos de inflexión. *(1,5 puntos)*

- Discontinuidades de f, f' ó f'': $x = -1$ de f'' y $x = 1$, de f' y f''.
- $f''(x) = 0$: Nunca (las ecuaciones $2 = 0$ ó $-2 = 0$ no tienen solución).

	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$
f	∩ **cóncava**	P.I.	∪ **convexa**	nada	∪ **convexa**

Tenemos dos puntos de inflexión, porque, aunque f'' no exista, sí que lo hace f y cambia la curvatura al pasar por ellos. Sus coordenadas las obtenemos de f. De manera que, concluyendo:

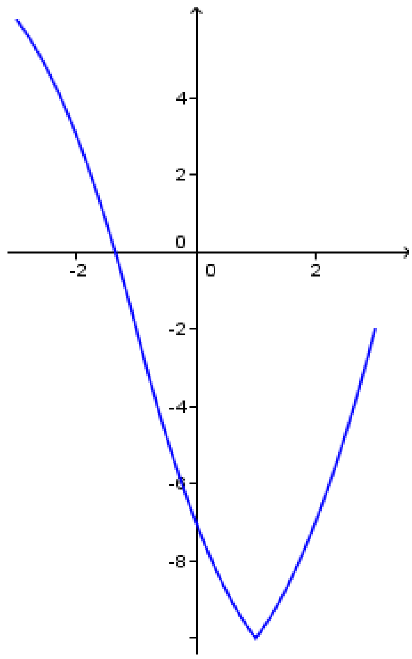
f es cóncava en $(-3, -1)$ y convexa en $(-1, 1)$ y $(1, 3)$. P. de I.: $(-1, -2)$

d) Calcular las coordenadas de sus extremos absolutos. *(1,5 puntos)*

- Extremos del intervalo:
  $x = -3$: $f(-3) = 6$
  $x = 3$: $f(3) = -2$
- Extremos relativos:
  $x = 1$: $f(1) = -10$

Así:

El mínimo absoluto vale -10 y se alcanza en $x = 1$.
El máximo absoluto vale 6 y se alcanza en $x = -3$.



e) Calcular la recta tangente en $x = -2$. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $f(-2) = 3$: $(-2, 3)$.
- Pendiente de la tangente: $m = f'(-2) = -4$.
- Recta tangente: $y - 3 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8 + 3$
  $\Rightarrow$ Es: $\boxed{y = -4x - 5}$

Incluimos la gráfica de la función, obtenida mediante el programa gratuito *Geogebra* (www.geogebra.org) escribiendo:
f(x) = Si(-3 <= x < -1, -x² - 8x - 9, Si(-1 <= x < 1, x² - 4x - 7, Si(1 <= x <= 3, x² - 11)))

3) Calcular $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3-\sqrt{x+12}}{6x^3+19x^2+x-6}$ *(1,5 puntos)*

Para eliminar una indeterminación 0/0, que es la que se obtiene, cuando tenemos una raíz cuadrada en una resta, multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de dicha resta:

$$\lim_{x\to -3} \frac{3-\sqrt{x+12}}{6x^3+19x^2+x-6} = \lim_{x\to -3} \frac{3-\sqrt{x+12}}{6x^3+19x^2+x-6}\,\frac{3+\sqrt{x+12}}{3+\sqrt{x+12}} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{3^2-\left(\sqrt{x+12}\right)^2}{(6x^3+19x^2+x-6)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{9-(x+12)}{(6x^3+19x^2+x-6)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{9-x-12}{(6x^3+19x^2+x-6)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{-x-3}{(6x^3+19x^2+x-6)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} =$$

Descomponemos factorialmente los polinomios que aparecen en el numerador y en el denominador, para eliminar la indeterminación, que persiste:

	6	19	1	–6
–3		–18	–3	6
	6	1	– 2	0

$$= \lim_{x\to -3} \frac{-(x+3)}{(x+3)(6x^2+x-2)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{-1}{(6x^2+x-2)\left(3+\sqrt{x+12}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{(54-3-2)(3+3)} = \boxed{-\frac{1}{294}}$$

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

Instrucciones: 1) Todas las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte **superior**. 2) Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

 a) $f(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^3-1)^2}$ b) $g(x) = 4x^3 \ln(3x+1)$

2) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x^2 \ln x$ en el punto de abscisa 1. *(1,5 ptos)*

3) Los beneficios esperados de una empresa en los próximos 5 años, en millones de euros, vienen dados por la función $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (t indica el tiempo, en años, $0 \le t \le 5$). ¿Cuáles serán el beneficio esperado máximo y el mínimo en el período, y cuándo se obtienen? *(1,5 puntos)*

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si} \quad x \le 2 \\ a(x-3)^2 + \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Halle a y b para que la función sea derivable en todo R, si es posible, y calcule dicha derivada. *(2 puntos)*

5) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$. Halle a y b para que la función se anule en $x = 1$ y tenga un punto de inflexión en $x = -1/2$. *(2 puntos)*

6) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Hallar a y b para que $x = 1$ e $y = 2$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{ax-1}{2x-b}$ *(2 puntos)*

<u>Alumnos con la 1ª evaluación suspendida</u>
Sustituir los problemas 5 y 6 por:

5) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, sin recurrir a ecuaciones. *(1,5 puntos)*

6) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de caco, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1€ la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3€ la unidad. En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $f(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^3-1)^2}$ b) $g(x) = 4x^3\ln(3x+1)$

a) $f(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^3-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{5\cdot 2^{5x}(\ln 2)(x^3-1)^2 - 2^{5x}2(x^3-1)3x^2}{(x^3-1)^4} =$

$$= \frac{(x^3-1)2^{5x}[5(\ln 2)(x^3-1)-6x^2]}{(x^3-1)^4} = \boxed{\frac{2^{5x}[(5x^3-5)\ln 2-6x^2]}{(x^3-1)^3}}$$

b) $g(x) = 4x^3\ln(3x+1) \Rightarrow g'(x) = 12x^2\ln(3x+1) + \dfrac{4x^3 3}{3x+1} =$

$$= \boxed{12x^2\ln(3x+1) + \frac{12x^3}{3x+1}}$$

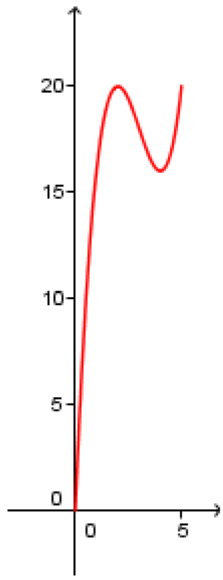
2) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x^2 \ln x$ en el punto de abscisa 1. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $g(1) = 1^2\cdot\ln 1 = 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow (1, 0)$.
- Pendiente de la tangente: $g'(x) = 2x\ln x + x^2\dfrac{1}{x} = x + 2x\ln x \Rightarrow m = g'(1) =$

  $= 1 + 0 = 1$.
- Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.

3) Los beneficios esperados de una empresa en los próximos 5 años, en millones de euros, vienen dados por la función $B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (t indica el tiempo, en años, $0 \le t \le 5$). ¿Cuáles serán el beneficio esperado máximo y el mínimo en el período, y cuándo se obtienen? *(1,5 puntos)*

Como estamos ante una función derivable en todo R, puesto que es polinómica, y, por tanto, en su dominio, que es [0, 5], los extremos relativos los buscaremos comparando el comportamiento de $B(t)$ en los extremos del dominio (0 y 5) y en los extremos relativos, que pasamos a calcular.



Dado que B es derivable, como hemos señalado, los posibles extremos relativos estarán donde se anule su derivada:

$B'(t) = 3t^2 - 18t + 24 \Rightarrow B'(t) = 0$ equivale a $3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ = \dfrac{8}{2} = 4 \end{array}\right.$$

- $B(0) = 0$
- $B(5) = 125 - 9\cdot 25 + 24\cdot 5 = 20$
- $B(2) = 8 - 9\cdot 4 + 24\cdot 2 = 20$
- $B(4) = 64 - 9\cdot 16 + 24\cdot 4 = 16$

De este modo, el máximo beneficio será de 20 millones de euros, alcanzados en los años 2 y 5, y el mínimo, de 0, al comienzo, es decir, en el año 0.

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si} \quad x \le 2 \\ a(x-3)^2 + \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. Halle a y b para que la función sea derivable en todo R, si es posible, y calcule dicha derivada. *(2 puntos)*

Para ser derivable en R, tiene que ser continua en R. Exijamos la continuidad:

- En $(-\infty, 2)$ es continua, por estar definida mediante una función polinómica.
- En $(2, +\infty)$ la función $y = a(x-3)^2 + \dfrac{3}{x}$ tiene una única discontinuidad en $x = 0$ (anula el denominador). Pero como $0 \notin (2, +\infty)$, no es discontinuidad de f. Luego f es continua.
- En $x = 2$: $f(2) = -1 + b$; $\lim_{x\to 2^-}[-(x-1)^2 + b] = -1 + b$; $\lim_{x\to 2^+}\left(a(x-3)^2 + \dfrac{3}{x}\right) =$ $= a + 3/2$. Para ser continua en este punto y, según lo ya visto, en todo R, se requiere:

$$-1 + b = a + 3/2 \Rightarrow -2 + 2b = 2a + 3 \Rightarrow 2a - 2b = -5 \quad (1)$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si} \quad x < 2 \\ 2a(x-3) - \dfrac{3}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

No es problema el denominador cuando $x > 2$, porque se anula para $x = 0$ que no está en la zona donde f' vale eso. Lo único que se necesita es que sea derivable en 2:

$f'(2^-) = -2$; $f'(2^+) = -2a - 3/4$. Luego: $-2 = -2a - 3/4 \Rightarrow -8 = -8a - 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8a = 5 \Rightarrow \boxed{a = 5/8}$

Sustituyendo en (1): $\dfrac{5}{4} - 2b = -5 \Rightarrow 2b = \dfrac{5}{4} + 5 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow \boxed{b = 25/8}$

La derivada es:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{5(x-3)}{4} - \dfrac{3}{x^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}}$$

5) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Sea la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$. Halle a y b para que la función se anule en $x = 1$ y tenga un punto de inflexión en $x = -1/2$. *(2 puntos)*

- Se anula en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow \boxed{2 + a - 12 + b = 0}$ (1)
- Tiene un punto de inflexión en $x = -1/2 \Rightarrow$ como la función es dos veces derivable en R (es polinómica), lo es en $-1/2$, por lo que: $f''(-1/2) = 0$.
  $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$; $f''(x) = 12x + 2a \Rightarrow f''(-1/2) = 0$ se traduce en que: $-6 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}$.
  Dado que $f'''(x) = 12 \Rightarrow f'''(-1/2) = 12 \ne 0$, lo que garantiza que haya, en efecto, un *punto de inflexión* en $x = -1/2$.

Sustituyendo en (1): $2 + 3 - 12 + b = 0 \Rightarrow -7 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 7}$.

6) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Hallar a y b para que $x = 1$ e $y = 2$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{ax-1}{2x-b}$ *(2 puntos)*

- $x = 1$ es recta vertical, luego tiene que ser asíntota vertical, lo que ocurre si: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-1}{2x-b} = \infty$, para lo que es preciso que el denominador se anule en este valor: $2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Así:

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax-1}{2x-2} = \left(\frac{a-1}{0}\right) = \infty$$

Evidentemente, se requiere que $\boxed{a \neq 1}$ pues, de lo contrario, este resultado no se daría, al obtener la indeterminación 0/0.

- $y = 2$ es recta horizontal, luego tiene que ser asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-1}{2x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$$

Como deber dar 2: $\dfrac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$. Como $a \neq 1$, es válido el estudio que hemos realizado para la asíntota vertical.

<u>Alumnos con la 1ª evaluación suspendida</u>
Sustituir los problemas 5 y 6 por:

5) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique: $A\cdot B\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, sin recurrir a ecuaciones. *(1,5 puntos)*

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Llamamos D a esta matriz. Calculemos su inversa.

$$|D| = -12 + 9 = -3.$$

Como es no nulo, tiene inversa.

$$D^t = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|}Adj(D^t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Y como:

$$A\cdot B\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D\cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1}\cdot D\cdot X = D^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = D^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

6) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de caco, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1€ la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3€ la uni-

dad. En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos. *(2,5 puntos)*

Lo que nos piden es el número de trufas a elaborar de cada tipo. Pues ésas serán, entonces, las incógnitas. Llevamos los datos a una tabla (trabajamos en gramos):

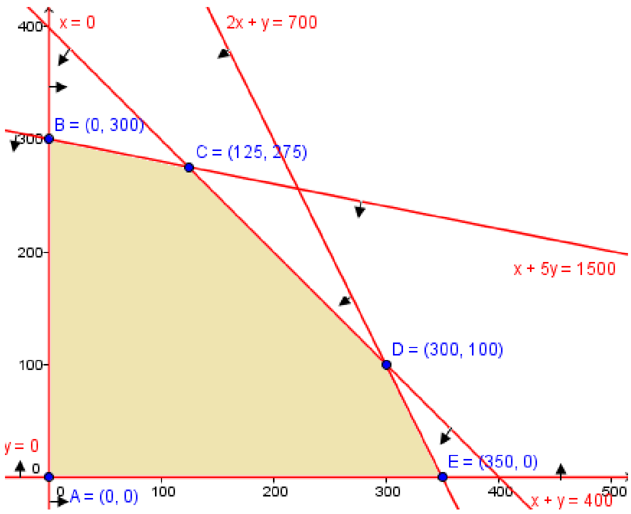
Tipos de trufas	Nº de trufas a elaborar	Cacao (g)	Nata (g)	Azúcar (g)	PVP
Dulces	x	$20x$	$20x$	$30x$	x
Amargas	y	$100y$	$20y$	$15y$	$1.3y$
Restricciones:	$x \geq 0;\ y \geq 0$	$20x + 100y \leq 30000$	$20x + 20y \leq 8000$	$30x + 15y \leq 10500$	$x + 1.3y$

Función objetivo (maximizar): $F(x, y) = x + 1.3y$. Restricciones (simplificadas):

$$x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + 5y \leq 1500;\ x + y \leq 400;\ 2x + y \leq 700$$

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que dibujamos mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x + 5y = 1500$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1500 \\ \hline y & 300 & 0 \end{array}$ $x + 5y \leq 1500 \Rightarrow y \leq 300 - x/5$ Semiplano inferior
- $x + y = 400$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 400 \\ \hline y & 400 & 0 \end{array}$ $x + y \leq 400 \Rightarrow y \leq 400 - x$ Semiplano inferior
- $2x + y = 700$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 350 \\ \hline y & 700 & 0 \end{array}$ $2x + y \leq 700 \Rightarrow y \leq 700 - 2x$ Semiplano inferior



Los puntos que se obtienen en las tablas de valores nos dan una pista de las dimensiones que debemos tomar para los ejes de coordenadas.

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).

- $\boxed{A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 300)\ \text{y}\ E(350,\ 0)}$ las hemos obtenido de las tablas usadas para trazar las rectas.
- C: $\left.\begin{array}{r} x + 5y = 1500 \\ x + y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 275 = 400 \Rightarrow x = 125$

$$4y = 1100 \Rightarrow y = 275$$

Por tanto: $\boxed{C(125,\ 275)}$.

- D: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=700 \\ x+y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=700 \\ \underline{x+y=400} \\ x \qquad =300 \end{array}\right\} \Rightarrow 300+y=400 \Rightarrow\ y=100$

Por tanto: $\boxed{D(300,\ 100)}$.

Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:
$F(A) = F(0, 0) = 0$
$F(B) = F(0, 300) = 0 + 1.3\cdot300 = 390$
$F(C) = F(125, 275) = 125 + 1.3\cdot275 = 612.5$
$F(D) = F(300, 100) = 300 + 1.3\cdot100 = 430$
$F(E) = F(350, 0) = 350 + 1.3\cdot0 = 350$

Concluimos, pues, que el mayor ingreso posible es de 612,5€, que se obtienen fabricando 125 trufas *dulces* y 275 *amargas*.

NOMBRE: ____

1ª EVALUACIÓN: □ APROBADA □ SUSPENDIDA (Marcar lo correcto)

Instrucciones: 1) Todas las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte **superior**. 2) Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $f(x) = \ln \dfrac{x}{2x^3+1}$ b) $g(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^4-1)^2}$

2) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x \ln x$ en el punto de abscisa 1. *(1,5 puntos)*

3) El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \le x \le 20$. Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas, y la hora correspondiente. *(1,5 ptos)*

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x-3 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2-1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$. Estudie si hay algún valor de k para el que la función sea continua en R, y calcule la derivada para $k = -1$. *(2 puntos)*

5) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Sea la función $f(x) = \dfrac{a}{x} + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 3). *(2 puntos)*

6) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Hallar a y b para que $x = 1$ e $y = 3$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4ax-1}{3x-2b}$ *(2 ptos)*

<u>Alumnos con la 1ª evaluación suspendida</u>

Sustituir los problemas 5 y 6 por:

5) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, sin recurrir a ecuaciones. *(1,5 puntos)*

6) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de caco, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1€ la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3€ la unidad. En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos. *(2,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $f(x) = \ln \dfrac{x}{2x^3+1}$ b) $g(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^4-1)^2}$

a) Simplificamos antes de derivar: $f(x) = \ln \dfrac{x}{2x^3+1} = \ln x - \ln(2x^3+1)$. Ahora derivamos: $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{6x^2}{2x^3+1} = \dfrac{2x^3+1-6x^3}{2x^4+x} = \boxed{\dfrac{-4x^3+1}{2x^4+x}}$

b) $g(x) = \dfrac{2^{5x}}{(x^4-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{5{\cdot}2^{5x}(\ln 2)(x^4-1)^2 - 2^{5x}2(x^4-1)4x^3}{(x^4-1)^4} =$

$$= \frac{2^{5x}(x^4-1)[5(\ln 2)(x^4-1) - 2{\cdot}4x^3]}{(x^4-1)^4} = \boxed{\frac{2^{5x}[(5x^4-5)\ln 2 - 8x^3]}{(x^4-1)^3}}$$

2) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = x \ln x$ en el punto de abscisa 1. *(1,5 puntos)*

- Punto de tangencia: $g(1) = 1{\cdot}\ln 1 = 1{\cdot}0 = 0 \Rightarrow (1, 0)$.
- Pendiente de la tangente: $g'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x \Rightarrow m = g'(1) = 1 + 0 = 1$.
- Ecuación de la recta tangente: $y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.

3) El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por $f(x) = x^3 - 42x^2 + 576x - 2296$, en función de la hora x, siendo $11 \le x \le 20$. Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas, y la hora correspondiente. *(1,5 ptos)*

Como estamos ante una función derivable en todo R, puesto que es polinómica, y, por tanto, en su dominio, que es [11, 20], los extremos relativos los buscaremos comparando el comportamiento de $f(x)$ en los extremos del dominio (11 y 20) y en los extremos relativos, que pasamos a calcular.

Dado que f es derivable, como hemos señalado, los posibles extremos relativos estarán donde se anule su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 84x + 576 \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ significa: } 3x^2 - 84x + 576 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 28x + 192 = 0 \Rightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{784-768}}{2} = \frac{28 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{24}{2} = 12 \\ = \dfrac{32}{2} = 16 \end{array} \right.$$

Y como:

- $f(11) = 11^3 - 4{\cdot}11^2 + 576{\cdot}11 - 2296 = 289$
- $f(20) = 20^3 - 4{\cdot}20^2 + 576{\cdot}20 - 2296 = 424$
- $f(12) = 12^3 - 4{\cdot}12^2 + 576{\cdot}12 - 2296 = 296$
- $f(16) = 16^3 - 4{\cdot}16^2 + 576{\cdot}16 - 2296 = 264$

$\boxed{\text{Número máximo de clientes: 424, a las 20h. Número mínimo: 264 a las 16h}}$.

4) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4x-3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$. Estudie si hay algún valor de k para el que la función sea continua en R, y calcule la derivada para $k = -1$. *(2 puntos)*

Estudiamos la continuidad

- En $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 1)$, f es continua por estar definida mediante funciones polinómicas, que son continuas en todos los números reales.
- En $(1, +\infty)$ $y = (k + 3)/x$ tiene una discontinuidad en $x = 0$ (anula el denominador). Pero $0 \notin (1, +\infty)$, por lo que es continua en todo el intervalo.
- $x = -1$: 1) $f(-1) = 1$; 2) $\lim\limits_{x \to -1^-} (-4x-3) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} (2x^2 - 1) = 1$. Es continua.
- $x = 1$; 1) $f(1) = k + 2$; 2) $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 - 1) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{k+2}{x} = k + 2$. Para que sea continua, debe ser $k + 2 = 1 \Rightarrow k = -1$.

En definitiva, si $k = -1$ será continua en R. Para otros valores de k, tendrá otra discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

Derivamos para $k = -1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -1 \\ 4x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- $x = -1$: $f'(-1^-) = -4$; $f'(-1^+) = 4(-1) = -4 \Rightarrow \exists f'(-1) = -4$
- $x = 1$: $f'(1^-) = 4 \cdot 1 = 4$; $f'(1^+) = -1 \Rightarrow$ No existe $f'(1)$.

Así, la expresión final de la derivada es:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

5) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Sea la función $f(x) = \dfrac{a}{x} + bx^2$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1, 3)$. *(2 puntos)*

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \qquad f''(x) = \frac{2a}{x^3} + 2b$$

- f tiene un extremo relativo en $x = 1$. Como f es *derivable* en dicho punto (porque *existe* $f'(1)$), para que ello sea así, basta exigir que $f'(1) = 0$. Además, debe cumplirse que $f''(1) \ne 0$, para que no sea *punto de inflexión* en lugar de *extremo relativo*, pero hasta no tener los valores de a y b no podemos verificar esto último. De modo que, de momento, sólo exigimos que:
$$-a + 2b = 0 \quad (1)$$
- Por otro lado, el extremo relativo tiene de coordenadas $(1, 3)$. Es decir, que f pasa por dicho punto, por lo que $f(1) = 3$:
$$a + b = 3 \quad (2)$$

Las dos condiciones (1) y (2) forman un sistema de ecuaciones que nos llevará a la solución. Despejamos en (2): $b = 3 - a$ y sustituimos en (1):

$$-a + 2(3 - a) = 0 \Rightarrow -a + 6 - 2a = 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

Sustituyendo en (2): $b = 3 - a = 3 - 2 = 1$

De modo que, finalmente: $\boxed{a = 2 \text{ y } b = 1}$.

Para dichos valores: $f''(1) = 4 + 2 = 6 \neq 0$, por lo que son solución (como dijimos antes, si fuese $f''(1) = 0$ estaríamos ante un punto de inflexión si, además, fuese $f'''(1) \neq 0$).

6) *(Sólo para alumnos con la 1ª evaluación aprobada)* Hallar a y b para que $x = 1$ e $y = 3$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4ax - 1}{3x - 2b}$ *(2 ptos)*

- $x = 1$ es recta vertical, luego tiene que ser asíntota vertical. Lo que ocurrirá si $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4ax - 1}{3x - 2b} = \infty$. Para ello, el denominador debe anularse al sustituir x por 1: $3 - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 3/2}$. Así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{4ax - 1}{3x - 3} = \left(\frac{4a - 1}{0}\right) = \infty$$

Es claro que existe una limitación, por cuanto si el numerador se anulase, también, para $x = 1$, el límite no valdría ∞ porque aparecería la indeterminación 0/0. Por tanto, esto es válido si, y sólo si:

$4a \cdot 1 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4a \neq 1 \Leftrightarrow \boxed{a \neq 1/4}$.

- $y = 3$ es recta horizontal, luego tiene que ser asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4ax - 1}{3x - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4ax}{3x} = \frac{4a}{3}$$

Como deber dar 3: $\dfrac{4a}{3} = 3 \Rightarrow 4a = 9 \Rightarrow \boxed{a = 9/4}$. Dado que este valor es distinto de 1/4, es válido el resultado obtenido en el estudio anterior de la asíntota vertical.

Alumnos con la 1ª evaluación suspendida

Sustituir los problemas 5 y 6 por:

5) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz X que verifique: $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, sin recurrir a ecuaciones. *(1,5 puntos)*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Llamamos D a esta matriz. Calculemos su inversa.

$$|D| = -12 + 9 = -3.$$

Como es no nulo, tiene inversa.

$$D^t = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|} Adj(D^t) = \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Y como:

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow D\cdot X=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}\cdot D\cdot X=D^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=D^{-1}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2/3\\0\end{pmatrix}}$$

6) Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de caco, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1€ la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3€ la unidad. En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10.5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos. *(2,5 puntos)*

Lo que nos piden es el número de trufas a elaborar de cada tipo. Pues ésas serán, entonces, las incógnitas. Llevamos los datos a una tabla (trabajamos en gramos):

Tipos de trufas	Nº de trufas a elaborar	Cacao (g)	Nata (g)	Azúcar (g)	PVP
Dulces	x	$20x$	$20x$	$30x$	x
Amargas	y	$100y$	$20y$	$15y$	$1.3y$
Restricciones:	$x\geq 0;\ y\geq 0$	$20x+100y\leq 30000$	$20x+20y\leq 8000$	$30x+15y\leq 10500$	$x+1.3y$

Función objetivo (maximizar): $F(x, y) = x + 1.3y$. Restricciones (simplificadas):

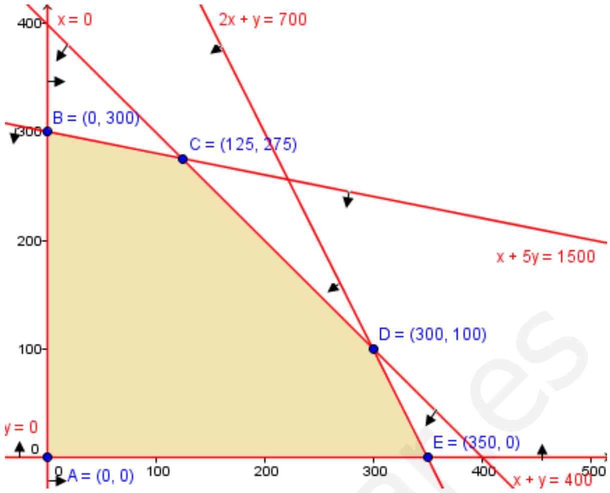
$$x\geq 0;\ y\geq 0;\ x+5y\leq 1500;\ x+y\leq 400;\ 2x+y\leq 700$$

Pasemos a dibujar la región factible. Cambiando en cada una de las inecuaciones de las restricciones el signo de desigualdad por un igual, se obtiene la ecuación de una recta, que dibujamos mediante una tabla de valores. Despejando y en la inecuación correspondiente, tendremos que $y \leq$ (ecuación de la recta) o que $y \geq$ (ec. de la recta), con lo que los puntos que resuelven la inecuación serán los que quedan debajo o encima (respectivamente) de la recta. Dibujaremos la recta y señalaremos con flechitas el semiplano que nos interesa. La excepción es $x \geq 0$, que es la zona que queda a la derecha del eje OY, ya que $x = 0$ es la ecuación de la recta vertical que, precisamente, coincide con OY. Así:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX.
- $x + 5y = 1500$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1500\\ \hline y & 300 & 0\end{array}$ $x+5y\leq 1500 \Rightarrow y\leq 300 - x/5$ Semiplano inferior
- $x + y = 400$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 400\\ \hline y & 400 & 0\end{array}$ $x+y\leq 400 \Rightarrow y\leq 400 - x$ Semiplano inferior
- $2x + y = 700$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 350\\ \hline y & 700 & 0\end{array}$ $2x+y\leq 700 \Rightarrow y\leq 700 - 2x$ Semiplano inferior

Los puntos que se obtienen en las tablas de valores nos dan una pista de las dimensiones que debemos tomar para los ejes de coordenadas.

Resulta así el recinto del gráfico. Hemos de calcular los vértices del mismo (ya figuran sus coordenadas en el gráfico, pero han sido calculadas antes de llevarlas al mismo).



- $\boxed{A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 300) \text{ y } E(350,\ 0)}$ las hemos obtenido de las tablas usadas para trazar las rectas.
- *C:* $\left.\begin{array}{r} x+5y=1500 \\ \underline{x+y=400} \end{array}\right\}$

  $4y=1100 \Rightarrow y=275$

  $\Rightarrow x + 275 = 400 \Rightarrow\ x = 125$

  Por tanto: $\boxed{C(125,\ 275)}$.
- *D:* $\left.\begin{array}{r} 2x+y=700 \\ x+y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow$

  $\left.\begin{array}{r} 2x+y=700 \\ \underline{x+y=400} \end{array}\right\} \Rightarrow 300 + y = 400 \Rightarrow\ y = 100$

  $x \qquad = 300$

  Por tanto: $\boxed{D(300,\ 100)}$.

Finalmente, evaluamos la función objetivo en cada vértice:
$F(A) = F(0, 0) = 0$
$F(B) = F(0, 300) = 0 + 1.3\cdot 300 = 390$
$F(C) = F(125, 275) = 125 + 1.3\cdot 275 = 612.5$
$F(D) = F(300, 100) = 300 + 1.3\cdot 100 = 430$
$F(E) = F(350, 0) = 350 + 1.3\cdot 0 = 350$

Concluimos, pues, que el mayor ingreso posible es de 612,5€, que se obtienen fabricando 125 trufas *dulces* y 275 *amargas*.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todas las **hojas** deben tener el **nombre** y estar **numerados** en la parte **superior**. 2) Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $f(x) = \dfrac{3^{2x+1}}{(2x-1)^2}$ b) $g(x) = (4x^3 - 6x)^2 \ln x$

2) Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz de los coeficientes? *(0,5 puntos)*
b) Clasifique y resuelva el sistema. *(1 punto)*
c) Determine, si es posible, una solución en la que $z = 3$. *(0,5 puntos)*

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \ \ -1)$.

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X \cdot A + 2B = (1 \ \ 0)$? *(0,5 puntos)*
b) Resolver dicha ecuación. *(1 punto)*

4) a) Calcular el máximo, y dónde se alcanza, para la función $F(x, y) = x + 2y - 10$ con las condiciones de que: $2x - y \le 6$, $5x + 2y \ge 15$, $x + 2y \le 8$. *(1 punto)*
b) ¿Se alcanza en (3, 2.5) dicho máximo? *(0,5 puntos)*

5) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = 1 + \ln(2x - 1)$ en el punto cuya abscisa es 1. *(1 punto)*

6) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 5 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{a - ax}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) Calcular a y b para que f sea derivable en su dominio, si es posible. *(1 punto)*
b) Para $a = 8$ y $b = 6$, estudiar su monotonía, extremos relativos y extremos absolutos. *(0,8+0,7 puntos)*
c) Para los mismos valores de a y b, halle sus asíntotas. *(0,5 puntos)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

a) $f(x) = \dfrac{3^{2x+1}}{(2x-1)^2}$ b) $g(x) = (4x^3 - 6x)^2 \ln x$

a) $f'(x) = \dfrac{2\cdot 3^{2x+1}(\ln 3)(2x-1)^2 - 3^{2x+1}2(2x-1)2}{(2x-1)^4} = \dfrac{3^{2x+1}(2x-1)[2\cdot(\ln 3)(2x-1)-4]}{(2x-1)^4} =$

$$= \boxed{\dfrac{3^{2x+1}[(4x-2)\ln 3 - 4]}{(2x-1)^3}}$$

b) $g'(x) = 2(4x^3-6x)(12x^2-6)\ln x + (4x^3-6x)^2\dfrac{1}{x} =$

$$= (4x^3-6x)\left(2(12x^2-6)\ln x + \frac{4x^3-6x}{x}\right) = \boxed{(4x^3-6x)\left((24x^2-12)\ln x + 4x^2 - 6\right)}$$

2) Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz de los coeficientes? *(0,5 puntos)*
La tendrá si, y sólo si, su determinante no es nulo. Como:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -60 + 105 + 12 - 70 - 27 + 40 = 157 - 157 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{No tiene inversa}}$.

b) Clasifique y resuelva el sistema. *(1 punto)*
Reconstruimos el sistema. Para ello, realizamos las operaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} 4x+3y+2z \\ -3x+5y+5z \\ 7x-2y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=4 \\ -3x+5y+5z=2 \\ 7x-2y-3z=2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_3-7F_1]{4F_2+3F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 29 & 26 & 20 \\ 0 & -29 & -26 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 29 & 26 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$, en el que puede eliminarse la fila 3. Reconstruimos el sistema y resolvemos. Para ello, llamamos $z = t$ (podríamos también haber elegido $y = t$, pero nos conviene dejar las soluciones en función de z porque nos piden una con un valor determinado de z):

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=4-2t \\ 29y=20-26t \end{array}\right\}$$

$\underline{2^a\ \text{ec}}$: $y = \dfrac{20-26t}{29}$

$\underline{1^a\ \text{ec}}$: $4x + 3\dfrac{20-26t}{29} = 4 - 2t \Rightarrow 4x = 4-2t-\dfrac{60-78t}{29} =$

$= \dfrac{116-58t-60+78t}{29} = \dfrac{56+20t}{29} \Rightarrow x = \dfrac{14+5t}{29}$

Solución general: $\boxed{\left(\dfrac{14+5t}{29}, \dfrac{20-26t}{29}, t\right)}$

Otras posibilidades son: $\left(t, \dfrac{16-26t}{5}, \dfrac{29t-14}{5}\right)$ ó $\left(\dfrac{16-5t}{26}, t, \dfrac{20-29t}{26}\right)$

c) Determine, si es posible, una solución en la que $z = 3$. *(0,5 puntos)*
Si $t = 3$: $\boxed{(1, -2, 3)}$

3) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = (1\ \ -1)$.

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X\cdot A + 2B = (1\ \ 0)$? *(0,5 puntos)*
$2B$ es 1×2. Para que pueda ser sumada con $X\cdot A$, ésta también tiene que ser 1×2.
Como A es 2×2, para ello se requiere que $\boxed{\dim(X) = 1 \times 2}$.

b) Resolver dicha ecuación. *(1 punto)*

$X\cdot A + 2B = (1\ \ 0) \Rightarrow X\cdot A + 2B - 2B = (1\ \ 0) - 2B \Rightarrow X\cdot A = (1\ \ 0) - 2B \Rightarrow$
$\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1} = [(1\ \ 0) - 2B]\cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = [(1\ \ 0) - 2B]\cdot A^{-1}}$

Podrá resolverse si existe la inversa de A. Calculémosla, si es posible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 10 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ \ 0) - 2B = (1\ \ 0) - 2\,(1\ \ -1) = (1\ \ 0) - (2\ \ -2) = (-1\ \ 2)$$

Por tanto:

$$X = (-1\ \ 2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{(7\ \ 3)}$$

4) a) Calcular el máximo, y dónde se alcanza, para la función $F(x, y) = x + 2y - 10$ con las condiciones de que: $2x - y \le 6$, $5x + 2y \ge 15$, $x + 2y \le 8$. *(1 punto)*
Dibujamos las rectas que resultan de cambiar los signos de desigualdad por iguales en cada inecuación. Elegimos el semiplano resultante de la misma, que será el superior si, al despejar, queda $y \ge (\textit{recta})$, y al revés:

- $2x - y = 6$:

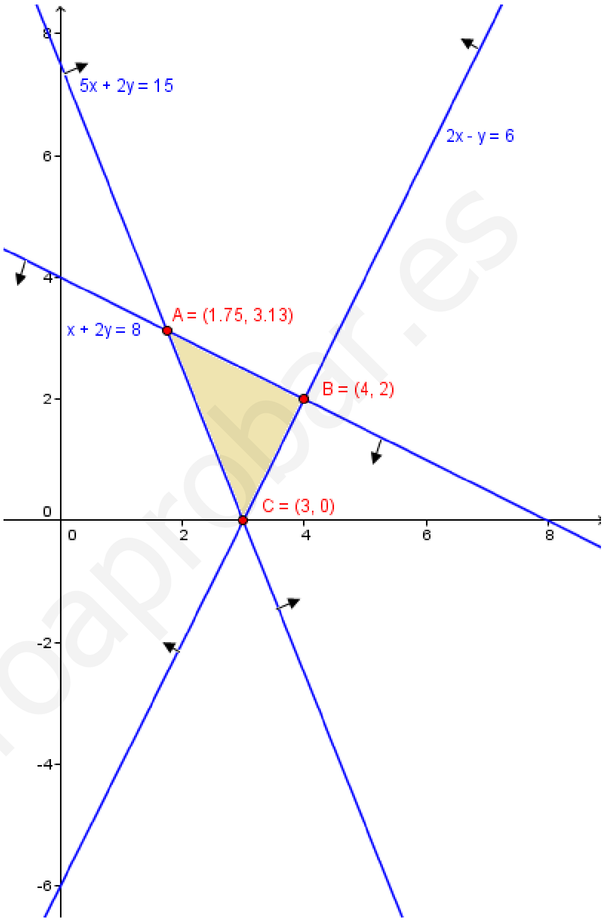
x	0	3
y	–6	0

$2x - y \le 6 \Rightarrow y \ge 2x - 6$ Semiplano superior

- $5x + 2y = 15$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 7.5 & 0 \end{array}$ $5x + 2y \geq 15 \;\Rightarrow\; y \geq (15 - 5x)/2$ Semiplano superior

- $x + 2y = 8$: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 8 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$ $x + 2y \leq 8 \;\Rightarrow\; y \leq (8 - x)/2$ Semiplano inferior

Llevamos los resultados al gráfico, resultando el recinto que en él se recoge. Hemos de calcular los vértices de la *región factible*, si bien, ya aparecen indicados en el gráfico:



- *A*:
$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ 5x + 2y = 15 \end{array}\right\}$$
$$4x \qquad = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4} = 1.75$$
$$\Rightarrow \frac{7}{4} + 2y = 8 \Rightarrow 2y = \frac{25}{4} \Rightarrow$$
$\Rightarrow y = 25/8 = 3.125$
Por tanto: $\boxed{A(7/4, 25/8)}$.

- *B*:
$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 6 \end{array}\right\}$$
$$-5y = -10 \Rightarrow y = 2$$
$x + 4 = 8 \;\Rightarrow\; x = 4$
Por tanto: $\boxed{B(4, 2)}$.

- $\boxed{C(3, 0)}$, según las tablas de valores usadas para crear el gráfico.

Evaluamos la función objetivo en los vértices:
$F(A) = F(7/4, 25/8) = 7/4 + 2·25/8 - 10 = -2$
$F(B) = F(4, 2) = 4 + 2·2 - 10 = -2$
$F(C) = F(3, 0) = 3 + 2·0 - 10 = -7$

Luego el máximo vale –2 y se alcanza en todos los puntos del segmento que une *A*(7/4, 25/8) con *B*(4, 2).

b) ¿Se alcanza en (3, 2.5) dicho máximo? *(0,5 puntos)*
Lo hará si es uno de los puntos de dicho segmento. Tenemos la ecuación de la recta que une *A* con *B*, que es: $x + 2y = 8$ (ver gráfico). La solución son los puntos de dicha recta comprendidos desde $x = 1.75$ (valor correspondiente a *A*, donde comienza el segmento) hasta $x = 4$ (valor de x en *B*, donde finaliza el segmento).
Nuestro punto contiene $x = 3$, que está entre los valores solución. Y, además, verifica la ecuación de la recta: $3 + 2·2.5 = 8$. Por tanto, $\boxed{\text{es solución}}$.

Otra forma sería comprobando que dicho punto está en la región factible y proporciona el valor mínimo (–2) de la función objetivo. Y, en efecto:
$F(3, 2.5 = 3 + 2·2.5 - 10 = -2$

siendo:

- $2x - y \le 6$: $2\cdot3 - 2.5 = -4 \le 6$, por lo que la verifica.
- $5x + 2y \ge 15$: $5\cdot3 + 2\cdot2.5 = 20 \ge 15$, luego también la verifica.
- $x + 2y \le 8$: $3 + 2\cdot2.5 = 8 \le 8$, también.

Así que, al alcanzar el mínimo en la función objetivo y estar dentro de la región factible, $\boxed{\text{es solución}}$.

5) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = 1 + \ln(2x - 1)$ en el punto cuya abscisa es 1. *(1 punto)*

- Punto de tangencia: $g(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$: $\boxed{(1, 1)}$.
- Pendiente de la tangente: $g'(x) = 0 + \dfrac{2}{2x-1} \Rightarrow m = g'(1) = 2$
- Recta tangente: $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$.

6) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 5 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{a - ax}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Calcular a y b para que f sea derivable en su dominio, si es posible. *(1 punto)*

Para ser derivable tiene, primeramente, que ser <u>continua</u>. Veamos si es así:

- <u>En [0, 1)</u>: f es <u>continua</u>, al estar definida por una función polinómica.
- <u>En $(1, +\infty)$</u>: f tendría una discontinuidad en $x = -1$, donde se anula el denominador. Pero dicho punto no está en el intervalo estudiado, de modo que f es <u>continua</u> en él.
- <u>En $x = 1$</u>: 1) $f(1) = 1 - b + 5 = 6 - b$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x^2 - bx + 5) = 6 - b$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{a - ax}{x+1} = 0$.

  Para ser continua, estos tres resultados deben ser idénticos, por lo que $6 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6}$.

Derivamos la función, donde ya sustituimos $b = 6$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-ax - a - a + ax}{(x+1)^2} = \dfrac{-2a}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

pues sólo podemos derivar en intervalos abiertos. Veamos qué sucede en $x = 1$:

$f'(1^-) = 2 - 6 = -4$

$f'(1^+) = -2a / 4$

Para que sea derivable, estos valores deben coincidir: $-a/2 = -4 \Rightarrow \boxed{a = 8}$.

Luego f será derivable en su dominio si $\boxed{a = 8 \text{ y } b = 6}$.

b) Para $a = 8$ y $b = 6$, estudiar su monotonía, extremos relativos y extremos absolutos. *(0,8+0,7 puntos)*

Según el estudio anterior, para estos valores tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{8 - 8x}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{-16}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Observar que hemos añadido que $f'(1) = -4$.

- Discontinuidades de f ó f': No hay, según lo estudiado antes.
- $f'(x) = 0$: Podría serlo para cada una de las dos fórmulas. Veamos si es así:

- $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, pero no nos sirve, porque esta fórmula sólo actúa cuando $0 < x \le 1$.
- $\dfrac{-16}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow -16 = 0$, que no es posible.

Por tanto, ningún punto anula la derivada.

Entonces, la monotonía es así:

	$(0, +\infty)$
f'	$-$
f	↘

Es decir, siempre es decreciente y no tiene extremos relativos.

Lo que ocurre con los extremos absolutos lo deduciremos del comportamiento en los extremos del dominio: 0 y $+\infty$.

- $f(0) = 5$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8-8x}{x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8x}{x} = -8$

Así, el *máximo absoluto* vale 5 y se alcanza en $x = 0$. No tiene mínimo absoluto, sino *ínfimo*, que vale -8 cuando $x \to +\infty$.

c) Para los mismos valores de a y b, halle sus asíntotas. *(0,5 puntos)*

- Asíntotas verticales: No tiene, porque es continua.
- Asíntotas horizontales: Sólo puede estudiarse lo que sucede cuando $x \to +\infty$, ya que el dominio es $[0, +\infty)$:

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8-8x}{x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8x}{x} = -8$

  Por tanto $y = -8$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
- Asíntotas oblicuas: En $-\infty$ no existe la función, y en $+\infty$ ya tiene asíntota horizontal. Luego no tiene oblicuas.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras. 5) En el problema 1 hay que obtener un mínimo de 0,6 puntos; de lo contrario, la nota máxima en el examen es de 4,4.

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4x^3-2}\right) \qquad g(x) = \frac{3^{2x}}{2x^3-3}$$

2) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) Obtenga la matriz A^{2014}. *(1 punto)*

b) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$. *(1.5 puntos)*

3) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5, \quad 2x + y \ge -4, \quad 4x \le 10 - y, \quad y \ge 0$$

a) Represente el recinto que limitan y calcule sus vértices. *(1 punto)*

b) Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan. *(1 punto)*

c) ¿Se alcanza el mínimo en el punto (–2.5, 1)? *(0.5 puntos)*

4) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-1}{2x-2} & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^3 - 12x^2 + 45x - 50 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades *(0.5 puntos)*

b) Calcular las asíntotas *(0.5 puntos)*

c) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos *(1 punto)*

d) Estudiar la curvatura y calcular los puntos de inflexión *(1 punto)*

5) La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \ge 0$. Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Derivar y simplificar: *(1 punto)*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4x^3-2}\right) \qquad g(x) = \frac{3^{2x}}{2x^3-3}$$

Simplificamos la primera función antes de derivarla:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{4x^3-2}\right) = \ln x - \ln(4x^3-2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{12x^2}{4x^3-2} = \frac{4x^3-2-12x^3}{4x^4-2x} =$$

$$= \frac{-8x^3-2}{4x^4-2x} = \frac{2(-4x^3-1)}{2(2x^4-x)} = \boxed{\frac{-4x^3-1}{2x^4-x}}$$

$$g(x) = \frac{3^{2x}}{2x^3-3} \Rightarrow g'(x) = \frac{2\cdot 3^{2x}(\ln 3)(2x^3-3) - 3^{2x}6x^2}{(2x^3-3)^2} = \boxed{\frac{3^{2x}[(4x^3-6)\ln 3 - 6x^2]}{(2x^3-3)^2}}$$

2) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) Obtenga la matriz A^{2014}. *(1 punto)*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+2a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, parece que la fórmula general va a ser:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Particularizando para $n = 2014$: $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2014a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3\cdot X - 4B = O$. *(1.5 puntos)*

Despejamos X en la ecuación matricial, supuesto que existe $(A^3)^{-1}$:

$$A^3 \cdot X - 4B = O \Rightarrow A^3 \cdot X - 4B + 4B = O + 4B \Rightarrow A^3 \cdot X + O = 4B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^3 \cdot X = 4B \Rightarrow (A^3)^{-1}\cdot A^3 \cdot X = (A^3)^{-1}\cdot 4B \Rightarrow I\cdot X = 4(A^3)^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 4(A^3)^{-1}B}$$

Sabemos que $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde hemos sustituido $a = 2$. De aquí:

$$\det(A^3) = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A^3)^{-1}$$

$$(A^3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}[(A^3)^t] = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^3)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego: } X = 4\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

3) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5, \quad 2x + y \ge -4, \quad 4x \le 10 - y, \quad y \ge 0$$

a) Represente el recinto que limitan y calcule sus vértices. *(1 punto)*

Representamos cada una de las rectas que resultan de cambiar el signo de desigualdad por un igual en cada una de las cuatro inecuaciones que definen el recinto.

- $y = x + 5$

x	0	–5
y	5	0

Como la inecuación es $y \le x + 5$, es decir, los puntos cuyo y sea menor o igual que el correspondiente al punto que está en la recta, el semiplano que nos interesa, de los dos en que ésta divide al plano, es el inferior a la recta.

- $2x + y = -4$

x	0	–2
y	–4	0

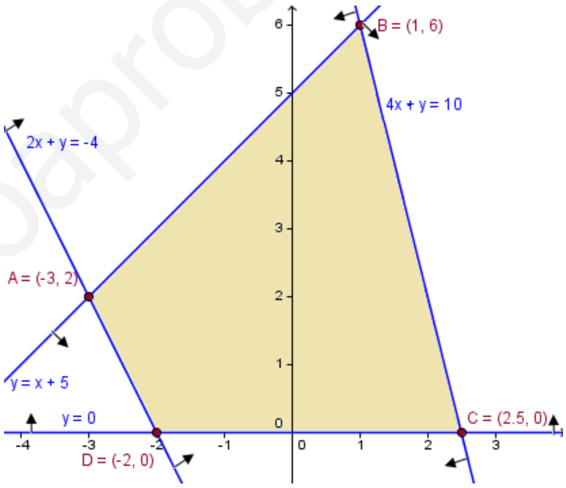
La inecuación es $y \ge -2x - 4 \Rightarrow$ Semiplano superior.

- $4x = 10 - y$

x	0	5/2
y	10	0

Inecuación: $y \le -4x + 10$: inferior

- $y \ge 0$: Semiplano superior al eje OX.



Con ello el gráfico del recinto es el adjunto.

Hay dos vértices que tenemos procedentes de las tablas de valores anteriores:

$\boxed{C(5/2, 0)}$ y $\boxed{D(-2, 0)}$.

El resto, hemos de calcularlos teniendo en cuenta que son intersecciones de rectas (el dibujo nos sirve para identificarlas):

$$A: \left.\begin{array}{r} 2x + y = -4 \\ x - y = -5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Sust. en la } 2^a: \\ y = x + 5 = -3 + 5 = 2 \Rightarrow \boxed{A(-3, 2)}. \end{array}$$
$$3x \quad = -9 \Rightarrow x = -3$$

$$B: \left.\begin{array}{r} -4x - y = -10 \\ -x + y = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Sust. en la } 2^a: \\ y = x + 5 = 1 + 5 = 6 \Rightarrow \boxed{B(1, 6)}. \end{array}$$
$$-5x \quad = -5 \Rightarrow x = 1$$

b) Obtenga el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanzan. *(1 punto)*

Sustituimos f en cada vértice:

$$f(-3, 2) = -3 + \frac{1}{2}2 = -2$$

$$f(1, 6) = 1 + \frac{1}{2}6 = 4$$

$f(5/2, 0) = 5/2 + 0 = 5/2$
$f(-2, 0) = -2 + 0 = -2$

Así, el máximo valor de f es 4 y se alcanza en (1, 6). El mínimo es –2 y se alcanza en (–3, 2), (–2, 0) y los infinitos puntos del segmento que los une.

c) ¿Se alcanza el mínimo en el punto (–2.5, 1)? *(0.5 puntos)*

La ecuación de la recta que une (–3, 2) con (–2, 0) es (en forma continua):

$$\frac{x+2}{-3+2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = -2(x+2) \Rightarrow y = -2x - 4$$

Desde $x = -3$ hasta $x = -2$, en todos los puntos de esta recta se alcanza el mínimo. Dado que si $x = -2.5$, se tiene: $y = -2\cdot(-2.5) - 4 = 5 - 4 = 1$, el punto dado está en la recta y entre –3 y –2. Por tanto, sí que es un punto donde se alcanza el mínimo.

Otra forma de verlo es ver si el punto (–2.5, 1) verifica todas las restricciones, en cuyo caso estará en la región factible, y que, además, la función objetivo toma en él el valor mínimo:

- $y \le x + 5$: $1 \le -2.5 + 5 \Leftrightarrow 1 \le 2.5$: la verifica.
- $2x + y \ge -4$: $2(-2.5) + 1 \ge -4 \Leftrightarrow -5 + 1 \ge -4 \Leftrightarrow -4 \ge -4$: la verifica.
- $4x \le 10 - y$: $4(-2.5) \le 10 - 1 \Leftrightarrow -10 \le 9$: la verifica.
- $y \ge 0$: $1 \ge 0$: la verifica.

Además: $f(-2.5, 1) = -2.5 + \frac{1}{2}1 = -2$: alcanza el valor mínimo.

Por tanto, sí que es un punto donde se alcanza el mínimo.

4) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-1}{2x-2} & \text{si } x \le 2 \\ x^3 - 12x^2 + 45x - 50 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad, clasificando las discontinuidades *(0.5 puntos)*

- $(-\infty, 2)$: f coincide con $y = \dfrac{4x-1}{2x-2}$, que es una función elemental y, por tanto, continua en su dominio. Luego su única discontinuidad es $x = 1$, que anula el denominador. Y como:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x-1}{2x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{4x-1}{2x-2} = +\infty$$

en $x = 1$ hay una discontinuidad asintótica de salto infinito. Es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.
- $(2, +\infty)$: f tiene una expresión polinómica $\Rightarrow$ es continua en $(2, +\infty)$.
- $x = 2$: $f(2) = \frac{7}{2}$; $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{4x-1}{2x-2} = \dfrac{7}{2}$; $\lim_{x\to 2^+}(x^3 - 12x^2 + 45x - 50) = 0 \Rightarrow$ Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

Luego es continua en R – {1, 2} con discontinuidad asintótica de salto infinito de $x = 1$ y de salto finito en $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas *(0.5 puntos)*

- Asíntotas verticales: Ya sabemos que: $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{2x-2} = \infty \Rightarrow$ $x = 1$ es A.V.

- Asíntototas horizontales: Los polinomios no tienen asíntotas, por lo que no hay cuando $x \to +\infty$. Por otro lado:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{2x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{2x} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2 \text{ es A.H. si } x \to -\infty}$$

- Asíntotas oblicuas: Si $x \to -\infty$ ya tiene horizontal, por lo que, de intentar calcular la oblicua, saldría la misma. Y si $x \to +\infty$, es un polinomio, por lo que tampoco tendrá. $\boxed{\text{No tiene asíntotas oblicuas}}$.

c) Estudiar la monotonía y calcular los extremos relativos *(1 punto)*

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4(2x-2)-2(4x-1)}{(2x-2)^2} = \dfrac{8x-8-8x+2}{(2x-2)^2} = \dfrac{-6}{(2x-2)^2} & \text{si } x<2 \\ 3x^2-24x+45 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Y $\nexists f'(2)$ porque f no es continua en $x = 2$.

- Discontinuidades de f: $x = 1$, $x = 2$.
- Discontinuidades de f': $x = 1$, $x = 2$.
- $f'(x) = 0$:
  - Si $x < 2$, debería ser $\dfrac{-6}{(2x-2)^2} = 0 \Rightarrow -6 = 0$, que no es posible para ningún valor de x.
  - Si $x > 2$, $3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \dfrac{8\pm 2}{2} = \langle\begin{smallmatrix} =3 \\ =5 \end{smallmatrix}$

	$(-\infty, 1)$	1	(1, 2)	2	(2, 3)	3	(3, 5)	5	$(5, +\infty)$
f'	–	∄	–	∄	+	0	–	0	+
f	↘	∄	↘	Disc de salto	↗	Máx	↘	mín	↗

$\boxed{\text{Tiene un máximo relativo en (3, 4) y un mínimo relativo en (5, 0)}}$.

d) Estudiar la curvatura y calcular los puntos de inflexión *(1 punto)*

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6\cdot 2(2x-2)2}{(2x-2)^4} = \dfrac{24}{(2x-2)^3} & \text{si } x<2 \\ 6x-24 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

Y $\nexists f''(2)$ porque f' no es continua en $x = 2$.

- Discontinuidades de f, f' ó f'': $x = 1$, $x = 2$.
- $f''(x) = 0$:
  - Si $x < 2$, debería ser $\dfrac{24}{(2x-2)^3} = 0 \Rightarrow 24 = 0$, que no es posible para ningún valor de x.
  - Si $x > 2$: $6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

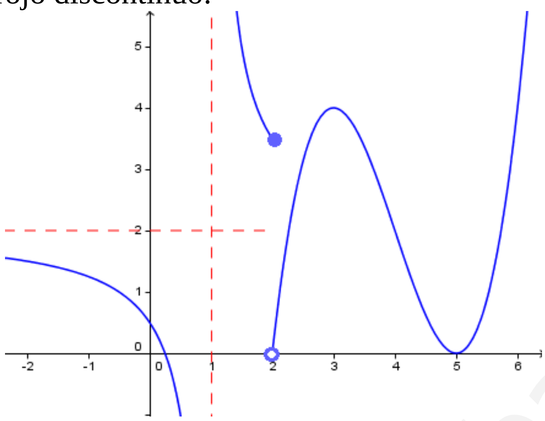
Por tanto:

	$(-\infty, 1)$	1	(1, 2)	2	(2, 4)	4	$(4, +\infty)$
f''	–	∄	+	∄	–	0	+
f	∩	∄	∪	Disc	∩	P.I.	∪

	cóncava		convexa	de salto	cóncava		convexa

$\boxed{\text{Punto de inflexión en } (4, 2)}$.

Aunque no se pide, adjuntamos la gráfica de la función, en la que se han incluido las asíntotas en rojo discontinuo:



5) La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$. Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo. *(1 punto)*

Nos piden, evidentemente el máximo absoluto de la función. Al tratarse de una parábola, dicho valor coincidirá con el máximo relativo, caso de tenerlo. Calculémoslo.

$$f'(x) = -4x + 36 \qquad f''(x) = -4$$

Ya que $f''(x) < 0 \ \ \forall x$, es una parábola cóncava. Como f y f' son continuas, al ser polinómicas, el extremo relativo, que será un máximo, porque la parábola es cóncava, tiene que coincidir con el punto donde se anule la derivada primera:

$$-4x + 36 = 0 \ \Rightarrow \ 36 = 4x \ \Rightarrow \ x = 9$$

que está en el dominio, al ser mayor o igual que 0. Y como $f(9) = -2\cdot 81 + 36\cdot 9 + 138 = 300$, se concluye que:

$\boxed{\text{El máximo beneficio se alcanza para } x = 9 \text{ (9.000€) y asciende a 300.000 €}}$.