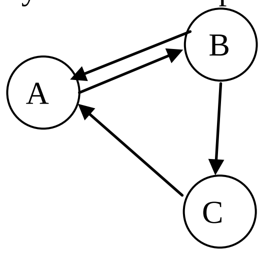
NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) Tres ciudades A, B y C están unidas mediante vuelos regulares según el siguiente grafo. Representar la matriz de adyacencia correspondiente: *(1 punto)*



2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{2015}. *(2 puntos)*

3) a) Calcular la inversa de la matriz: *(1,5 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resolver la ecuación $X \cdot A - 2\, C \cdot D = B^t$, siendo A la matriz anterior y: *(2,5 ptos)*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -5 \\ 1 & -18 & -8 \\ -15 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Dada la siguiente matriz:

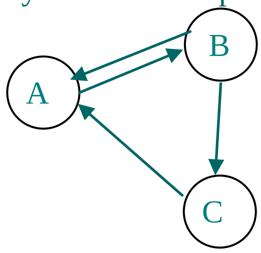
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule su rango por el método de Gauss. *(1,5 puntos)*
b) Calcule su rango orlando menores. *(1,5 puntos)*

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1) Tres ciudades A, B y C están unidas mediante vuelos regulares según el siguiente grafo. Representar la matriz de adyacencia correspondiente: *(1 punto)*



Si hay camino desde el nodo i al j, ponemos $a_{ij} = 1$. Valdrá 0 en caso contrario. De este modo, la matriz de adyacencia es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{2015}. *(2 puntos)*

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix}$

concluimos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$. Probémoslo, por el método de *inducción completa* (esta parte no se exige en Selectividad):

Supuesta cierta la fórmula para $n = k$, es decir: $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix}$, veamos que también lo es para $n = k + 1$, o sea, que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)a & 1 \end{pmatrix}$. En efecto:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ka+a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que queda demostrado. En consecuencia:

$$\boxed{A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2015a & 1 \end{pmatrix}}$$

3) a) Calcular la inversa de la matriz: *(1,5 puntos)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando su determinante, para comprobar que existe su matriz inversa:

$$|A| = -12 + 2 - 4 + 1 = -13 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A^t) = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & -11 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4/13 & -3/13 & -4/13 \\ 1/13 & -4/13 & -1/13 \\ 2/13 & 5/13 & 11/13 \end{pmatrix}}$$

b) Resolver la ecuación $X{\cdot}A - 2\,C{\cdot}D = B^t$, siendo A la matriz anterior y: *(2,5 ptos)*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -5 \\ 1 & -18 & -8 \\ -15 & -2 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X{\cdot}A - 2\,C{\cdot}D = B^t \Rightarrow X{\cdot}A - 2\,C{\cdot}D + 2\,C{\cdot}D = B^t + 2\,C{\cdot}D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X{\cdot}A = B^t + 2\,C{\cdot}D \Rightarrow X{\cdot}A{\cdot}A^{-1} = (B^t + 2\,C{\cdot}D)\,A^{-1}$$

$$\Rightarrow X{\cdot}I = (B^t + 2\,C{\cdot}D)\,A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (B^t + 2\,C{\cdot}D)\,A^{-1}}$$ *(0,5 puntos)*

$$\boxed{B^t + 2\,C{\cdot}D =} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 \\ -9 & -18 & -2 \\ -5 & -8 & -8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -15 \\ -9 & -18 & -2 \\ -5 & -8 & -8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -6 & 7 \\ 11 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -11 & -1 \\ 13 & -26 & 0 \\ 5 & -16 & -2 \end{pmatrix}}$$ *(0,5 puntos)*

$$\boxed{X =} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -1 \\ 13 & -26 & 0 \\ 5 & -16 & -2 \end{pmatrix} \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & -11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} 13 & -49 & 0 \\ -26 & -65 & 26 \\ 0 & -39 & 26 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$ *(1,5 puntos)*

4) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule su rango por el método de Gauss. *(1,5 puntos)*

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_1]{F_3 - F_1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos hecho 0 todas las posiciones de la columna 1, salvo la de la F_2. Después, todas las de la C_3, salvo las de F_1 y F_2. Deberíamos trabajar una columna más, pero ya está triangularizada la matriz, porque en C_2 están anuladas todas las posiciones salvo las de F_1, F_2 y F_3. En realidad, hay más 0, pero eso no importa. Como, una vez triangularizada, las dos últimas filas son nulas, se pueden eliminar, a efectos de cálculo del rango, y resulta que $\boxed{r(A) = 2}$.

b) Calcule su rango orlando menores. *(1,5 puntos)*

Partimos del menor 1 x 1 formado por el elemento $a_{13} = -1$, que es distinto de cero y, por tanto, el rango es, al menos, 1. Lo orlamos con elementos de F_2:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \text{ es, al menos, 2.}$$

Lo orlamos con elementos de F_3, primero con C_2, luego con C_4 y, por último, con C_5:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 6 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

Eliminamos F_3 a efectos de calcular el rango (esta fila es combinación lineal de las que componen el menor principal de orden 2 que hasta ahora tenemos, que es el que estamos orlando, y que son las filas 1 y 2). Procedemos a orlar con F_4 con las mismas columnas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$$

Por tanto, $\boxed{r(A) = 2}$, porque el menor principal es: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

www.yoquieroaprobar.es

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el nombre y estar numerados en la parte superior. 2) Todas las respuestas deben estar justificadas y simplificadas. 3) No se puede usar corrector ni lápiz. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras.

1) a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^4 y A^{80}. *(1,5 puntos)*

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 10 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$, $C = (2 \;\; 1)$ y $D = (1 \;\; -1 \;\; 2)$. Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$A \cdot B^t \quad C^t \cdot D \quad B^t \cdot D \quad D \cdot B^t$ *(1 punto)*

2) Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 10 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$. Calcular X tal que $X \cdot A + B^t = C$. *(2,5 puntos)*

3) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviese más de una solución, decir la forma general de las mismas y tres soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= -1 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \\ 7x - 5y - 8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

4) Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B.
Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos.
El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.
Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo? *(2,5 puntos)*

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1) a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^4 y A^{80}. *(1,5 puntos)*

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^4 =} A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2}$$

Por tanto:

$$\boxed{A^{80} =} (A^4)^{20} = I_2^{\,20} = \boxed{I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 10 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$, $C = (2 \quad 1)$ y $D = (1 \quad -1 \quad 2)$. Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$A \cdot B^t \quad C^t \cdot D \quad B^t \cdot D \quad D \cdot B^t$ *(1 punto)*

- $\dim(A) = 3 \times 3$; $\dim(B^t) = 3 \times 2 \Rightarrow \boxed{\dim(A \cdot B^t) = 3 \times 2}$. Se puede hacer porque el número de columnas de A coincide con el de filas de B^t.
- $\dim(C^t) = 2 \times 1$; $\dim(D) = 1 \times 3 \Rightarrow \boxed{\dim(C^t \cdot D) = 2 \times 3}$.
- $\dim(B^t) = 3 \times 2$; $\dim(D) = 1 \times 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{No se puede calcular } B^t \cdot D}$, porque el número de columnas de la primera debe coincidir con el de filas de la segunda matriz, y no es así.
- $\dim(D) = 1 \times 3$; $\dim(B^t) = 3 \times 2 \Rightarrow \boxed{\dim(D \cdot B^t) = 1 \times 2}$.

2) Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 10 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$. Calcular X tal que $X \cdot A + B^t = C$. *(2,5 puntos)*

Despejamos en la ecuación matricial:

$$X \cdot A + B^t = C \Rightarrow X \cdot A + B^t - B^t = C - B^t \Rightarrow X \cdot A = C - B^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B^t)A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (C - B^t)A^{-1}}$$

La operación podremos hacerla siempre que exista A^{-1}. Procedamos a comprobarlo y a calcularla:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 2 + 4 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \frac{1}{1/2}\text{Adj}(A^t) = 2\,\text{Adj}(A^t) = 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por otro lado:

$$\boxed{C - B^t =} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 10 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 7 & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}}$$

Por lo que:

$$\boxed{X =} (C - B^t)A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 7 & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviese más de una solución, decir la forma general de las mismas y tres soluciones concretas: *(2,5 puntos)*

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= -1 \\ -5x + 3y + 5z &= -1 \\ 7x - 5y - 8z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Vamos a clasificarlo por Rouché-Fröbenius. La matriz ampliada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \\ 7 & -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Y como:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4 \neq 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & 5 \\ 7 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -48 - 70 - 75 + 63 + 80 + 50 = 0$$

se verifica que $r(A) = 2$. Si orlamos el menor principal anterior con la cuarta columna de A' (con la tercera, daría 0, como acabamos de ver):

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 14 - 25 + 21 - 10 = 0$$

por lo que $r(A') = 2 = r(A) <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Es un <u>sistema compatible indeterminado</u>.

Lo resolvemos por Cramer, llamando $z = t$, que es la incógnita que no está en el menor principal de orden 2, y eliminando la 3ª ecuación por idéntica razón, por lo que el sistema queda así:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3t=-1 \\ -5x+3y+5t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y=-1+3t \\ -5x+3y=-1-5t \end{array}\right\}$$

Y entonces:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+3t & -2 \\ -1-5t & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3+9t-2-10t}{-4} = \frac{-t-5}{-4} = \frac{t+5}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1+3t \\ -5 & -1-5t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2-10t-5+15t}{-4} = \frac{5t-7}{-4} = \frac{-5t+7}{4}$$

$z = t$

Por lo que la forma general de las soluciones es:

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{t+5}{4}, \frac{-5t+7}{4}, t\right)}$$

Y tres soluciones concretas son, por ejemplo:

- $t = 0$: $\boxed{(5/4. 7/4, 0)}$
- $t = 1$: $\boxed{(3/2, 1/2, 1)}$
- $t = 3$: $\boxed{(2, -2, 3)}$

4) Un supermercado tiene almacenados 600 kg de manzanas y 400 kg de naranjas. Para incentivar su venta elabora dos tipos de bolsas: A y B.
Las bolsas de tipo A contienen 3 kg de manzanas y 1 kg de naranjas; las bolsas de tipo B incluyen 2 kg de cada uno de los productos.
El precio de venta de la bolsa A es de 4 € y de 3 € el de la bolsa de tipo B.
Suponiendo que vende todas las bolsas preparadas, ¿cuántas bolsas de cada tipo debe haber elaborado para maximizar los ingresos? ¿A cuánto asciende el ingreso máximo?
(2,5 puntos)

Llevamos los datos del problema a una tabla, que nos ayudará a plantearlo:

Tipos de bolsas	Nº de bolsas a preparar	kg de manzanas	kg de naranjas	Precio
A	x	$3x$	x	$4x$
B	y	$2y$	$2y$	$3y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$	$3x + 2y \leq 600$	$x + 2y \leq 400$	$F(x, y) = 4x + 3y$

Las restricciones proceden de que no podemos preparar un número negativo de bolsas, de la cantidad de manzanas disponibles considerando cuánto se gastan preparando x bolsas de tipo A e y del tipo B, y lo mismo para las naranjas. En la última columna hemos puesto la *función objetivo*, que hay que *maximizar*.

Vamos a dibujar la *región factible*, trabajando con cada una de las *restricciones*:

- $x \geq 0$, $y \geq 0$ nos limitan al primer cuadrante.

www.yoquieroaprobar.es

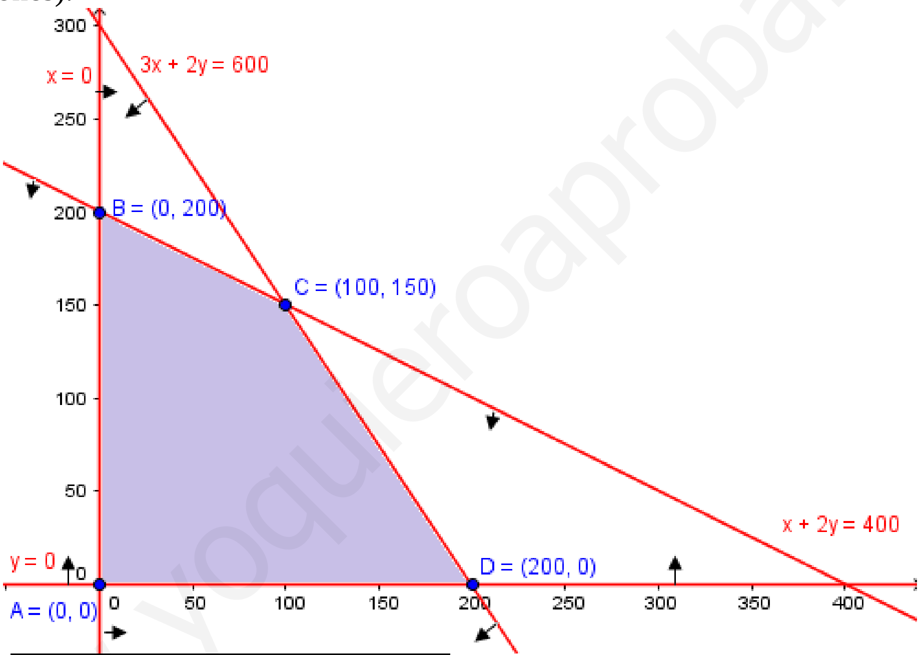
- $3x + 2y \le 600 \Leftrightarrow y \le \dfrac{-3x+600}{2}$, luego la solución es el *semiplano inferior a la recta* $y = \dfrac{-3x+600}{2}$, cuya *tabla de valores* es:

x	0	200
y	300	0

- $x + 2y \le 400 \Leftrightarrow y \le \dfrac{-x+400}{2} \Rightarrow$ *Semiplano inferior* a la recta $y = \dfrac{-x+400}{2}$. *Tabla de valores*:

x	0	400
y	200	0

Por tanto, obtenemos el recinto de la figura, donde para cada recta se ha señalado con flechitas el semiplano que resuelve su correspondiente inecuación. Basándonos en ella, calculamos las coordenadas de los vértices que están señalados (no podemos hacerlo *nunca* gráficamente, sino resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones).



- $\boxed{A(0,\ 0),\ \ B(0,\ 200)\ \ \text{y}\ \ D(200,\ 0)}$ se han obtenido de las tablas de valores usadas para obtener el recinto.
- $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=600 \\ x+2y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 + 2y = 400 \Rightarrow 2y = 300 \Rightarrow y = 150$$
  $\text{Restando}:\ 2x = 200 \Rightarrow x = 100$
  Luego: $\boxed{C(100,\ 150)}$.

Por último, evaluamos la función objetivo en cada vértice:

- $F(A) = F(0, 0) = 4\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$
- $F(B) = F(0, 200) = 4\cdot 0 + 3\cdot 200 = 600$
- $F(C) = F(100, 150) = 4\cdot 100 + 3\cdot 150 = 850$
- $F(D) = F(200, 0) = 4\cdot 200 + 3\cdot 0 = 800$

De donde el ingreso máximo es de 850€, que se consigue con 100 bolsas tipo A y 150 tipo B.

NOMBRE: ____

Instrucciones: 1) Todos los folios deben tener el **nombre** y estar **numerados en la parte superior**. 2) Todas las respuestas deben estar **justificadas y simplificadas**. 3) No se puede usar **corrector ni lápiz**. Se aconseja no usar borrador. 4) Se puede alterar el orden de las respuestas, pero **no se puede intercalar la respuesta a una pregunta con las de otras**. 5) **Desatender las instrucciones puede suponer una penalización de hasta 1 punto**.

1) Considerar las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Despeje la matriz X en la ecuación $X\cdot A+2B=3C^t\cdot D$. *(0,3 puntos)*
b) ¿Qué dimensión tiene X? *(0,3 puntos)*
c) Calcule A^{-1} y X. *(1,9 puntos)*

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 1 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3z=-3 \\ -5x+4y+5z=\ \ 1 \\ 7x-6y-8z=-4 \end{array}\right\}$$

3) a) Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, *S* y *H*, ha anotado en la matriz A los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y, en la matriz B, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de esos productos:

$$\text{Matriz } A:\ \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Matriz } B:\ \begin{array}{c} \\ S \\ H \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.20 & 4 & 1 \\ 0.25 & 3.60 & 1.20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $A\cdot B^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

b) Escriba en forma matricial: $A\cdot X=B$ el sistema de ecuaciones del problema 2. *(0,5 puntos)*

c) Si las matrices C y D unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, represente los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia: *(1 punto)*

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Se dispone de $160\ m$ de tejido de pana y $240\ m$ de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa $1\ m$ de pana y $2\ m$ de lana para cada traje, y $2\ m$ de pana y $2\ m$ de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.

a) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? *(1,5 puntos)*
b) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo? *(1 punto)*

www.yoquieroaprobar.es

SOLUCIONES

1) Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Despeje la matriz X en la ecuación $X\cdot A + 2B = 3C^t\cdot D$. *(0,3 puntos)*

$$X\cdot A + 2B = 3C^t\cdot D \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (Sumando la matriz $-2B$ a ambos miembros) $X\cdot A = 3C^t\cdot D - 2B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (Mult. por A^{-1} a la dcha) $\boxed{X = (3C^t\cdot D - 2B)A^{-1}}$

En este último paso, recordar que el producto de matrices no es conmutativo. Esta expresión será posible siempre y cuando exista la inversa de A, lo que no se ha comprobado aún, y nos piden hacer en el apartado c.

b) ¿Qué dimensión tiene X? *(0,3 puntos)*

- $\dim(C^t) = 2 \times 1$ y $\dim(D) = 1 \times 3 \Rightarrow \dim(C^tD) = 2 \times 3 \Rightarrow \dim(3C^tD) = 2 \times 3$
- $\dim(B) = 2 \times 3 \Rightarrow \Rightarrow \dim(2B) = 2 \times 3$

Por tanto: $\Rightarrow \dim(3C^tD - 2B) = 2 \times 3$. Y como $\dim(A^{-1}) = 3 \times 3$ se tiene, finalmente: $\boxed{\dim(X) = 2 \times 3}$.

c) Calcule A^{-1} y X. *(1,9 puntos)*

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 2 + 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} =} \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A^t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Por otra parte:

$$3C^tD - 2B = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 10 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 10 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 14 & -14 & 38 \\ 7 & 0 & 13 \end{pmatrix}}$$

www.yoquieroaprobar.es

2) Clasificar y resolver el siguiente sistema. Si tuviera más de una solución, decir 3 soluciones concretas: *(Clasif: 0,5 + Resol: 1 + Sols concr: 1)*

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3z=-3\\ -5x+4y+5z=\ \ 1\\ 7x-6y-8z=-4 \end{array}\right\}$$

Por el método de Gauss, triangularizamos la *matriz de los coeficientes*, inmersa en la *matriz ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3\\ -5 & 4 & 5 & 1\\ 7 & -6 & -8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2+2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3\\ -1 & 0 & -1 & -5\\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -3\\ -1 & 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos conseguido triangularizar el sistema. Como ninguna fila es toda de 0 salvo la última columna, el sistema es *compatible*. La última fila es nula, por lo que prescindimos de ella, quedándonos con un sistema triangularizado con menos filas (2) que ecuaciones (3), por lo que se trata de un $\boxed{\textit{sistema compatible indeterminado}}$, con infinitas soluciones.

Reconstruimos el sistema resultante, para resolverlo. A la incógnita que sobra (tenemos una incógnita más que el número de ecuaciones), la llamamos t, siendo éste un valor libremente elegido por nosotros (hay infinitas formas de hacerlo: una por cada número real), y la pasamos al segundo miembro. Debemos elegir, para ello, x ó z, pues si llamásemos t a y, perderíamos la triangularización al pasarla al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-2y-3t=-3\\ -x\qquad\ \ -t=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-2y=-3+3t\\ -x\qquad=-5+t \end{array}\right\} \Rightarrow (2^a\text{ ec.})\ \ x=5-t$$

Sustituimos en la 1ª: $10-2t-2y=-3+3t \Rightarrow 10-2t+3-3t=2y \Rightarrow y=\dfrac{13-5t}{2}$

El esquema general de las infinitas soluciones, en función de t, es:

$$\boxed{\left(5-t,\ \frac{13-5t}{2},\ t\right)}$$

Dando valores a t obtenemos las diferentes soluciones. Nos piden 3. Por ejemplo:

- $t = 0$: (5, 13/2, 0)
- $t = 1$: (4, 4, 1)
- $t = 3$: (2, –1, 3)

3) a) Un fabricante de productos lácteos, que vende 3 tipos de productos, leche, queso y nata, a dos supermercados, S y H, ha anotado en la matriz A los pesos en kg de cada producto que vende a cada supermercado y, en la matriz B, las ganancias que obtiene en cada supermercado por cada kg de esos productos:

$$\text{Matriz } A:\ \begin{array}{c} \\ S\\ H \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array}\\ \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250\\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{Matriz } B:\ \begin{array}{c} \\ S\\ H \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{leche} & \textit{queso} & \textit{nata} \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0.20 & 4 & 1\\ 0.25 & 3.60 & 1.20 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúe el producto $A\cdot B^t$ y explique el significado económico de cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz resultante. *(1 punto)*

$$A\cdot B^t = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 250\\ 460 & 300 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.20 & 0.25\\ 4 & 3.60\\ 1 & 1.20 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1550 & 1505\\ 1492 & 1435 \end{pmatrix}}$$

www.yoquieroaprobar.es

El elemento a_{11} representa la multiplicación de los kg de cada artículo por las ganancias respectivas por kg en el supermercado S. Por tanto, son las ganancias que obtiene por sus transacciones con S. De la misma forma a_{22} representa las ganancias provenientes de H.

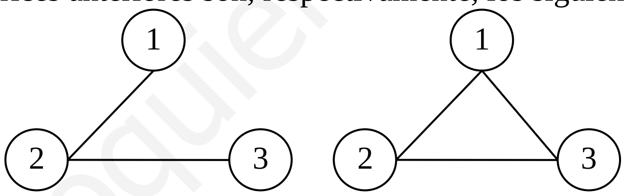
b) Escriba en forma matricial: $A \cdot X = B$ el sistema de ecuaciones del problema 2. *(0,5 puntos)*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -5 & 4 & 5 \\ 7 & -6 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Si las matrices C y D unen los nodos numerados con las etiquetas 1, 2, 3, represente los grafos asociados a dichas matrices de adyacencia: *(1 punto)*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La interpretación de una matriz de adyacencia de un gráfico es que si hay conexión del nodo i al nodo j, hay un 1 en la fila i y columna j. Es decir, $a_{ij} = 1$. Así, que $c_{12} = 1$ es porque en el nodo correspondiente hay una conexión que va del nodo 1 al nodo 2. Como ambas matrices son simétricas, las conexiones entre todos los nodos son bidireccionales, por lo que las vamos a representar por un único segmento que los una. Por tanto, la representación gráfica de los nodos de las dos matrices anteriores son, respectivamente, los siguientes:



4) Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.

a) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? *(1,5 puntos)*

Este problema confunde, como muchos otros, *beneficio* con *precio de venta*. Supondremos que lo que pretenden maximizar es el *precio de venta*. Planteamos el problema con ayuda de una tabla:

Productos	Unidades a confeccionar	Pana (m)	Lana (m)	Precio
Trajes	x	x	$2x$	$250x$
Abrigos	y	$2y$	$2y$	$350y$
Restricciones:	$x \geq 0$; $y \geq 0$	$x + 2y \leq 160$	$2x + 2y \leq 240$	$f(x, y) = 250x + 350y$

Llevamos a un gráfico cada restricción, para determinar la región factible:

- $x \geq 0$: A la derecha del eje OY, cuya ecuación es $x = 0$.
- $y \geq 0$: Por encima del eje OX, de ecuación $y = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

- $x + 2y \le 160 \;\Leftrightarrow\; y \le \dfrac{-x+160}{2} \;\Rightarrow$ *Semiplano inferior* a la recta $y = \dfrac{-x+160}{2}$, cuya tabla de valores es:

x	0	160
y	80	0

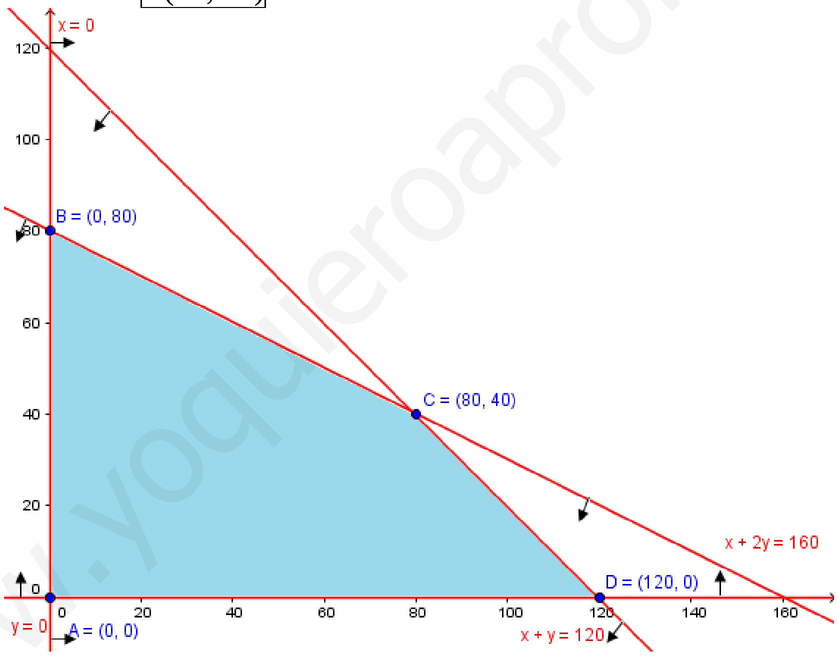
- $2x + 2y \le 240 \;\Leftrightarrow\; x + y \le 120 \;\Leftrightarrow\; y \le -x + 120$: *Semiplano inferior* a la recta $y = -x + 120$, con tabla de valores:

x	0	120
y	120	0

Resulta el recinto de la figura insertada más adelante, donde con flechitas se ha destacado cada semiplano solución y la intersección de todos ellos, que es la *región factible*. Y ya están escritos los vértices. Pero estos nunca pueden calcularse gráficamente. Procedemos a obtenerlos:

- $\boxed{A(0,\,0);\;\; B(0,\,80);\;\; D(120,0)}$ nos han salido de las tablas de valores.
- $\left.\begin{array}{l} x+2y=160 \\ x+y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Restando (1ª – 2ª): $y = 40 \;\Rightarrow\; x + 40 = 120 \;\Rightarrow\; x = 80$

  De donde: $\boxed{C(80,\,40)}$.



Evaluamos la *función objetivo* en cada *vértice*:

- $f(A) = f(0,\,0) = 250\cdot 0 + 350\cdot 0 = 0$
- $f(B) = f(0,\,80) = 250\cdot 0 + 350\cdot 80 = 28000$
- $f(C) = f(80,\,40) = 250\cdot 80 + 350\cdot 40 = 34000$
- $f(D) = f(120,\,0) = 250\cdot 120 + 350\cdot 0 = 30000$

Lo que nos lleva a concluir que:

$\boxed{\text{El máximo ingreso es de 34000, obtenido confeccionando 80 trajes y 40 abrigos.}}$

b) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo? *(1 punto)*

Veamos si 60 trajes y 50 abrigos está en la región factible, lo que haremos comprobando se verifica todas las restricciones (no debería hacerse gráficamente para evitar el error que puede producir una figura no perfecta).

www.yoquieroaprobar.es

$x = 60$ con $y = 50$:

- $x \geq 0$: $60 \geq 0 \Rightarrow$ La verifica.
- $y \geq 0$: $50 \geq 0 \Rightarrow$ También es cierta.
- $x + 2y \leq 160$: $60 + 2 \cdot 50 = 160 \leq 160 \Rightarrow$ Cierta.
- $x + y \leq 120$: $60 + 50 = 110 \leq 120 \Rightarrow$ Correcto.

Por tanto, sí pueden confeccionarse 60 trajes y 50 abrigos.
Pero no nos da el máximo beneficio, que se obtenía con 80 trajes y 40 abrigos. En efecto, dicho beneficio sería:

$$f(60, 50) = 250 \cdot 60 + 350 \cdot 50 = 32500 < 34000$$

www.yoquieroaprobar.es