EXAMEN DE MATEMÁTICAS 2º BAC CC SS BLOQUE 3 : CÁLCULO

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 Sea f(x) = $\begin{cases} -4x-3 & si\ x \leq -1 \\ 2x^2-1 & si\ -1 < x \leq 1 \\ \frac{k+2}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) **Halla k para que f(x) sea continua en x = 1 . ¿Es f globalmente continua y derivable?**

b) **Calcula** $\int_0^3 f(x)dx$ **para el valor de k calculado en a)** *(1,25 cada apartado)*

EJERCICIO 2 Representa gráficamente la función f(x) = $\frac{x^2+4}{2x}$ *(3,5 puntos)*

EJERCICIO 3 Halla dos números cuya suma sea 24 y tal que el cubo de uno por el doble del otro sea máximo. *(2 puntos)*

EJERCICIO 4 Haz una representación y halla el área limitada por las funciones f(x) = 2 – x, g(x) = $\sqrt{x}$ **y el eje Y.** *(2 puntos)*

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 Determina un polinomio p(x) de segundo grado sabiendo que P (0) = P(-1) = 1 y que $\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}$ **.** *(2 puntos)*

EJERCICIO 2 El beneficio de una empresa B(x) en miles de euros viene dado por la función

$$B(x) = \begin{cases} -5x^2+40x-60 & si\ 0 \leq x \leq 6 \\ 2.5x-15 & si\ 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

Donde x representa los gastos en publicidad en miles de euros.

a) **Representa la función** *(1 punto)*

b) **Calcula cuánto hay que gastar en publicidad para que el beneficio sea máximo y calcula dicho beneficio.** *(0,75 puntos)*

c) **Calcula cuánto hay que gastar en publicidad para que no haya pérdidas** *(0,75 puntos*

EJERCICIO 3 Halla a y b para que la función f(x) = ax^3+3bx^2-5x+1 **pase por (1, -3) y tenga un punto de inflexión en x = -1** *(2 puntos)*

EJERCICIO 4 Halla en qué punto la tangente a la gráfica de f(x)= x + lnx es paralela a la recta $y = 3x-3$ **. Halla dicha tangente.** *(1,5 puntos)*

EJERCICIO 5 Se f(x) = $\begin{cases} ax^2 & si\ x \leq 2 \\ x^2+bx+5 & si\ x > 2 \end{cases}$ **. Halla a y b para que f(x) sea continua y derivable en x = 2** *(2 puntos)*

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) **Para que f(x) sea continua en 1 , $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) =$ f(1)**

$\lim_{x\to 1}(2x^2-1) = \lim_{x\to 1}(k+2)/x = k+2$ → 1 = k + 2 luego k = -1.

Estudiamos la continuidad en x = -1 : $\lim_{x\to -1}(-4x-3) = 1$; $\lim_{x\to -1}(2x^2-1) = 1$ y f(-1)= 1 . La función es continua en x= 1 y en x= -1 y para x distinto de estos dos valores f(x) es continua por ser dos de sus ramas funciones polinómicas y estar la rama y = 1/ x definida para x >1.

Estudiamos la derivabilidad :

$$F'(x) = \begin{cases} -4 & si\ x \le -1 \\ 4x\ \ si & -1 < x \le 1 \\ -\frac{1}{x^2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

En x = -1 : $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1} -4 =$ -4 ; $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1} 4x = -4 = f'(-1)$; f'(x) es continua en x = -1 luego f(x) es derivable en x = -1.

En x = 1 : : $\lim_{x\to 1^-} f'(x) =$: $\lim_{x\to 1} 4x = 4$; : $\lim_{x\to 1^+}(-1)/x^2$ = -1 ; los límites laterales son distintos luego f'(x) no es continua en x = 1 y f(x) no es derivable en x = 1.

Para x distinto de 1 y -1, f'(x) es continua por las mismas razones que lo es f(x) luego f(x) es derivable.

b) $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 (2x^2-1)dx + \int_1^3 1/x\,dx = \left(\frac{2x^3}{3}\right)_0^1 - (x)_0^1 + (ln x)_1^3 =$
$\left(\frac{2}{3} - 0\right)$ **- (1 – 0) + (ln3 – ln1) = -1/3 + ln3**

EJERCICIO 2

Comenzamos calculando las derivadas :

$$y' = \frac{(x^2+4)'(2x)-(2x)'(x^2+4)}{(2x)^2} = \frac{2x.2x-2(x^2+4)}{4x^2} = \frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2} = \frac{2x^2-8}{4x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

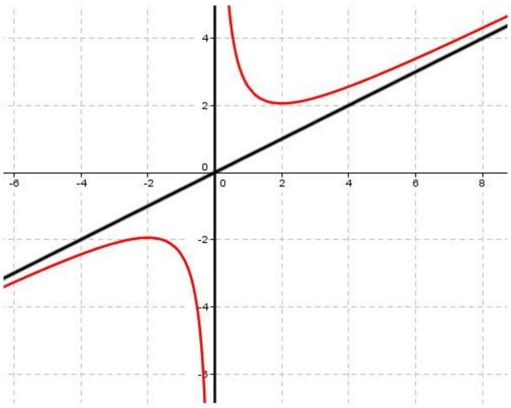
$$y'' = \frac{2x.2x^2-4x(x^2-4)}{4x^4} = \frac{4x^3-4x^3+16x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}$$

DOMINIO : R – {0}

CORTES CON LOS EJES : Eje Y (No hay ya que x no puede ser 0)

Eje X : y = 0 si x^2 + 4 = 0 . No hay solución luego no hay cortes

ASÍNTOTAS : Verticales x = 0



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ **(x = -0.001, y = -2000)**

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ **(x = 0,001, y = 2000)**

Horizontales : No hay

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ **y** $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ **ya que en este caso la función se comporta como y =** $x^2/2x = x/2$ **.**

Oblicuas : y = x/2

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4}{2x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2+4}{2x} - \frac{x}{2}) =$

$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2+4}{2x} - \frac{x^2}{2x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4}{2x}) = 0$

CRECIMIENTO y' = 0 si x = 2 o x = -2 **+ I -2 _ o 0 _ I 2 +**

F(x) ↗ **I** ↘ **o** ↘ **I** ↗

-2 0 2

EXTREMOS RELATIVOS : Máximo (- 2, -2) y mínimo relativo en (2, 2)

CURVATURA : y'' = 0 no tiene solución y'' : - 0 +

Y : ∩ **0** ∪ **No hay p. de inflexión**

EJERCICIO 3

Si x e y son los números pedidos , x + y = 24 . Hay que encontrar el máximo de P = $x^3.2y$ **: Despejando en la ecuación de arriba, y = 24 – x ; sustituyendo en la función P =** $2x^3(24 - x) = 48x^3 - 2x^4$ **. Derivamos : P' =** $144x^2 - 8x^3 = x^2(144 - 8x) = 0$ **si x = 0 o si x = 144/8 = 18 . Estudiamos el signo de P' :**

+ I0 + I18 -

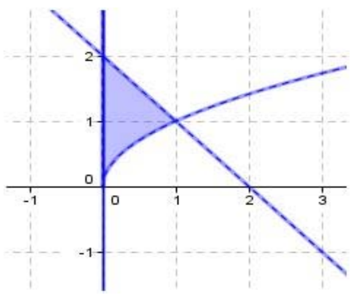
A partir del diagrama de signo : P ↗ **I0** ↗ **I18** ↘

Tenemos máximo en x = 18 luego los números son 18 y 6.

EJERCICIO 4

Área = $\int_0^1 (2 - x - x^{1/2})dx =$

$(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3})_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12}{6} - \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$



OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sea P(x) = $ax^2 + bx + c$

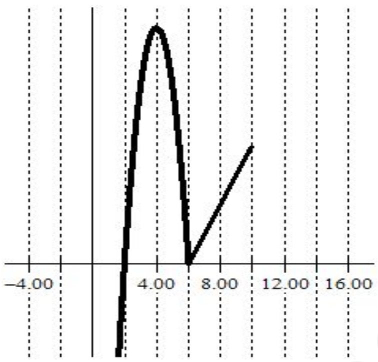
Si x = 0 , P = 1 → 1 = c

Si x = -1 , P = 1 → 1 = a -b + 1 → a-b = 0 → a=b

$$\int_0^2 (ax^2+bx+1)dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2} + x\ \Big]_0^2 = \frac{8a}{3}+\frac{4b}{2} + 3 = \frac{8a}{3} + 2a + 3 = \frac{1}{3}$$

$\frac{8a}{3}+\frac{6a}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3}$ **→ 14a + 9 = 1 ; como a = b , 14a = -8 a = b =** $-\frac{8}{14}$

EJERCICIO 2

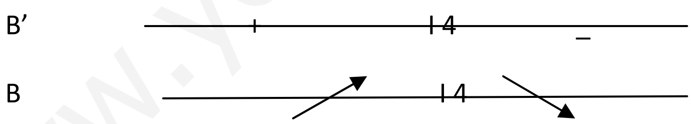


Comenzamos por hacer una representación gráfica de la función. La rama izquierda es una parábola que corta a los ejes en :

Eje Y : x = 0 y = -60

Eje X : $-5x^2$ +40x-60= 0 ; x = $\frac{-40\pm\sqrt{1600-1200}}{-10}$ = 2 , 6

Para encontrar el vértice de la parábola, como éste es un extremo, derivamos : f'(x)= -10x+40 = 0 si x = 4.



Para x = 4000 euros, el beneficio es máximo y éste asciende a 20000 euros.

Para que no haya pérdidas, B ha de ser positiva luego hay que gastar más de 2000 euros.

EJERCICIO 3

y = f(x) = ax^3+3bx^2-5x+1 **f'(x) = $3ax^2$ + 6bx – 5 f''(x)= 6ax+ 6b**

Si x = 1, y = -3 - 3 = a + 3b – 5 + 1 → a + 3b = 1

Si x = -1, y'' = 0 0 = -6a+6b → - a + b = 0 → a = b

a + 3a = 1 a = b = 1/4

EJERCICIO 4

Rectas paralelas han de tener la misma pendiente. En la recta y = 3x – 3 la pendiente es 3 luego hay que buscar para qué valor de x, f'(x) = 3

F'(x) = 1 + 1/ x = 3 → 1/x = 2 → x = 1/2

Para x = 1/2, y = 0,5 + ln0,5 = 2 - 0,69 = 1,31

La ecuación sería y – 1,31 = 3 (x – 0,5)

EJERCICIO 5

f'(x) = $\begin{cases} 2ax & si\ x \leq 2 \\ 2x + b & si\ x > 2 \end{cases}$

Para que f(x) sea continua en x = 2

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) \rightarrow \lim_{x\to 2} ax^2 = \lim_{x\to 2}(x^2 + bx + 5) \rightarrow 4a = 2b + 9$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2+} f'(x) = f'(2) \rightarrow \lim_{x\to 2} 2ax = \lim_{x\to 2}(2x + b) \rightarrow 4a = 4 + b$

Resolvemos el sistema : 2b + 9 = b + 4 → b = - 5

4a = 4 – 5 = -1 a = -1/4