

1. (a) Sabiendo que $P(A) = 0'45$, $P(\bar{B}) = 0'35$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'85$, calcula $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A | \bar{B})$, $P(A \cup B)$ y $P(B | A)$.

(b) ¿Los sucesos A y B son incompatibles? Razona la respuesta.

(c) ¿Los sucesos A y B son independientes? Razona la respuesta.

2. Ambrosio sale cada mañana a dar un paseo por la alameda (A), por el río (R) o por el monte (M). Se puede encontrar (E) o no (no E) con el pesadísimo de Filiberto. Se sabe que va a la alameda el 20 % de las veces y al río el 30 %, y que se encuentra con Filiberto el 80 % de las veces que va a la alameda y el 10 % de las que va al río. Nunca se lo encuentra en el monte.

(a) Describe el proceso en un diagrama en árbol e incorpora las probabilidades de cada tramo.

(b) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: (R y E), (R y no E), (A y E), (A o E), (M y no E).

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto día se encuentre a Filiberto?

(d) Un día volvió a casa y contó que se había encontrado a Filiberto. Halla la probabilidad de que fuera en el río.

3. Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de bachillerato. Entre las conclusiones está que un 40 % han recibido clases de informática. Además, el 80 % de aquellos que han recibido clases de informática tienen ordenador en casa. También que un 10 % de los estudiantes a los que se les pasó la encuesta tienen ordenador en casa y no han recibido clases de informática. Elegido al azar un estudiante encuestado, calcula la probabilidad de que:

(a) Tenga ordenador en casa.

(b) Tenga ordenador en casa y haya recibido clases de informática.

(c) No tenga ordenador en casa o haya recibido clases de informática.

(d) Haya recibido clases de informática, sabiendo que tiene ordenador en casa.

4. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x} \cdot dx$

(b) $\int \frac{(x+2)}{x^2+4x+4} \cdot dx$

(c) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot dx$

(d) $\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x} \right) \cdot dx$

(e) $\int \frac{4x^3-2x+7}{x^2} \cdot dx$

$$(f) \int \left[\frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right] \cdot dx$$

$$(g) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$(h) \int \frac{5(2x^3-x)}{\sqrt{x^4-x^2+6}} \cdot dx$$

$$(i) \int \frac{6x-9}{x^2-3x+7} \cdot dx$$

5. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

(a) Calcula una primitiva de $f(x)$. De entre todas las primitivas determina la que pasa por el punto $P(2,0)$.

(b) Justifica que $F(x) = x^4 + 2x - 4$ no es primitiva de $f(x)$.

(c) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

6. Un estudio indica que dentro de x horas una central nuclear estará arrojando material contaminante a un **ritmo** de $100 \cdot e^{-0'5 \cdot x}$ **mSv por hora**. ¿Cuánto material contaminante arrojará la central en las próximas 4 horas?

7. Después de x horas en el estudio, un esforzado alumno de 2º de bachillerato puede realizar $(2 + 6\sqrt{x})$ **ejercicios complejísimos por hora**. ¿Cuántos ejercicios realizará entre las 9 A.M. y las 12 A.M. si ha comenzado a estudiar a las 8 A.M.?

8. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$.

Soluciones

1. (a) Sabiendo que $P(A) = 0'45$, $P(\bar{B}) = 0'35$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'85$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0'35 = 0'65$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0'85 = 0'15.$$

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{0'45 - 0'15}{0'35} = \frac{0'30}{0'35} = \frac{6}{7}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'45 + 0'65 - 0'15 = 0'95$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0'15}{0'45} = \frac{1}{3}$$

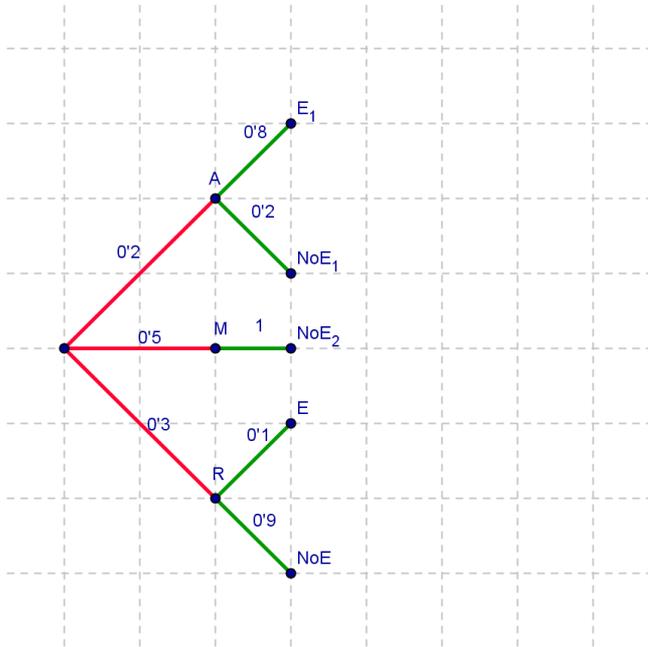
(b) Los sucesos A y B NO son incompatibles ya que

$$P(A \cap B) = 0'15 \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

(c) Los sucesos A y B NO son independientes ya que

$$P(B | A) = \frac{1}{3} \neq P(B) = 0'65.$$

2.



(b) $P(R \cap E) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$

$P(R \cap \text{No}E) = 0.3 \cdot 0.9 = 0.27$

$P(A \cap E) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16$

$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.1 - 0.2 \cdot 0.8 = 0.23$

$P(M \cap \text{No}E) = 0.5 \cdot 1 = 0.5$

(c) $P(E) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.19$

(d) $P(R | E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0.03}{0.19} = \frac{3}{19}$

3.

| | recibe clases Informática | NO recibe clases de Informática | |
|--------------------|---------------------------|---------------------------------|-----|
| Tiene ordenador | 32 | 10 | 42 |
| NO tiene ordenador | 8 | 50 | 58 |
| | 40 | 60 | 100 |

(a) $P(O) = \frac{42}{100} = 0.42$.

(b) $P(O \cap I) = \frac{32}{100} = 0.32$.

(c) $P(\bar{O} \cup I) = \frac{8+50+32}{100} = 0.9$

(d) $P(I | O) = \frac{32}{42}$.

4. Calcula las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{x+\sqrt{x}}{x} \cdot dx = \int \left(1 + x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot dx = x + 2\sqrt{x} + C$$

$$(b) \int \frac{(x+2)}{x^2+4x+4} \cdot dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+4} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 + 4x + 4| + C$$

$$(c) \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot dx = \frac{-1}{3} \int (-3 \cdot e^{3x}) \cdot (1 - e^{3x})^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{1 - e^{3x}} + C$$

(d)

$$\int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x}\right) dx = \int \left(4x^{-2} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{-4}{x} - 4\sqrt{x} + \frac{15}{20}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$(e) \int \frac{4x^3-2x+7}{x^2} \cdot dx = \int \left(4x - \frac{2}{x} + 7x^{-2}\right) dx = 2x^2 - 2\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

$$(f) \int \left[\frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right] \cdot dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{2}{x} + 6\sqrt{x} + C$$

$$(g) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} + C$$

$$(h) \int \frac{5(2x^3-x)}{\sqrt{x^4-x^2+6}} \cdot dx = \frac{5}{2} \int (4x^3 - 2x)(x^4 - x^2 + 6)^{-\frac{1}{2}} dx = 5\sqrt{x^4 - x^2 + 6} + C$$

$$(i) \int \frac{6x-9}{x^2-3x+7} \cdot dx = 3 \int \frac{2x-3}{x^2-3x+7} dx = 3 \ln|x^2 - 3x + 7| + C$$

$$5. (a) \int (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

Una primitiva cualquiera de $f(x)$ se obtiene dando a la constante C un valor real, por ejemplo $C=5$: $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$.

La primitiva que pasa por el punto $P(2,0)$ es $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$, porque:

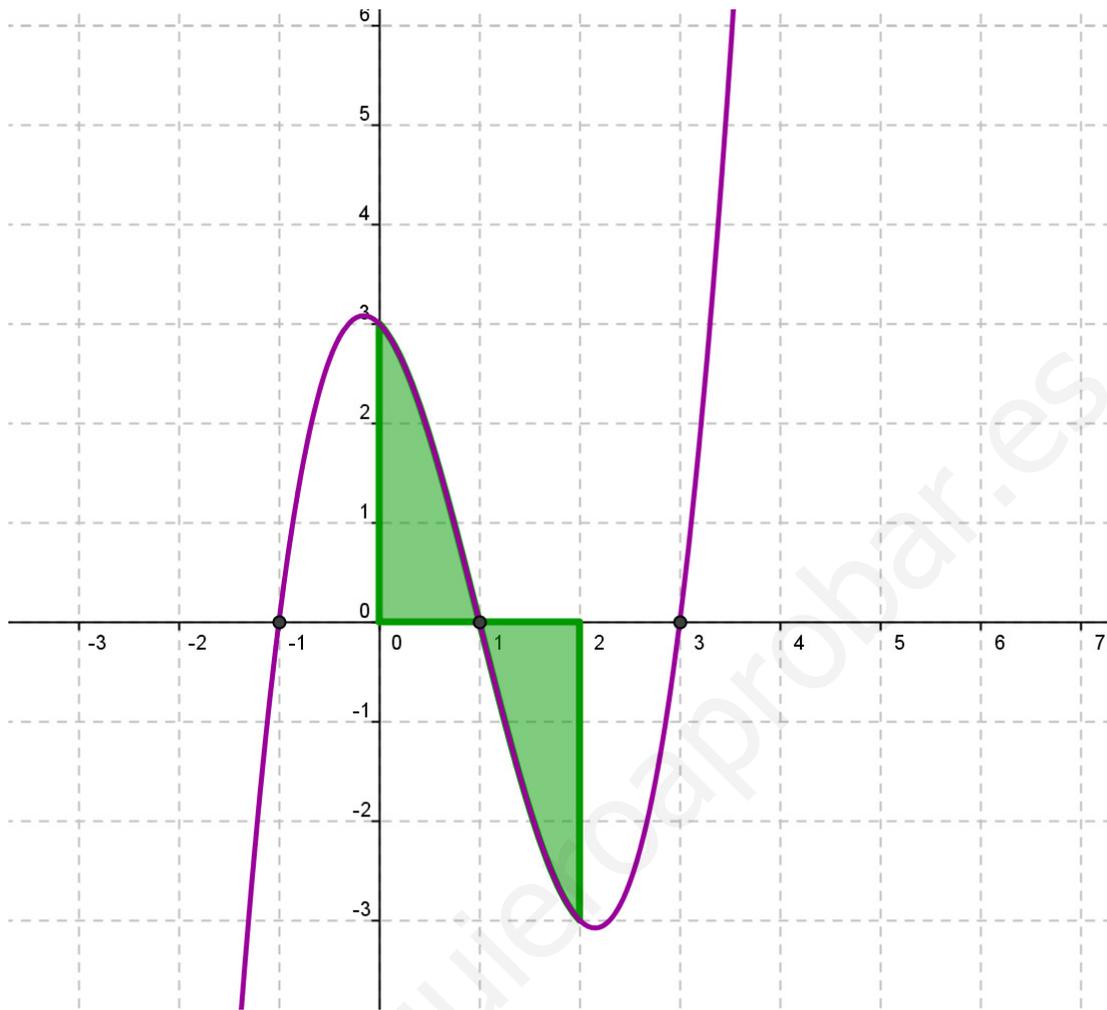
$$F(2) = 0, F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C \Rightarrow 4 - 8 - 2 + 6 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

(b) $F(x) = x^4 + 2x - 4$ no es primitiva de $f(x)$ porque sus primitivas son:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

(c) Podemos comprobar que la función $f(x)$ en el intervalo $(0,1)$ es positiva y en el intervalo $(1,2)$ es negativa. Por lo tanto el área del recinto coloreado en verde es:

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_1^2 = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{7}{2} \text{ u. sup.}$$



6.

$$\int_0^4 100 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx = -200 \int_0^4 \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot dx = -200 \left[e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^4 = -200 \left[\frac{1}{e^2} - 1 \right] =$$

$$\simeq 172'93 \text{ mSv}$$

7. $\int_1^4 (2 + 6\sqrt{x}) dx = \left[2x + 4\sqrt{x^3} \right]_1^4 = (8 + 32) - (2 + 4) = 34 \text{ ejercicios}$

8. Representamos las dos funciones y determinamos sus puntos de corte.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = x^3 \Rightarrow x = x^6 \Rightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0, 0) \\ Q(1, 1) \end{cases}$$

Por lo tanto el área del recinto verde es:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ u. sup.}$$

