EXAMEN DE ÁLGEBRA 2º BACHILLERATO

NOMBRE …………………………………………………………… Calificación……….

EJERCICIO 1 Determina los valores de m para los que la matriz X = $\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **verifica la ecuación** $X^2 - 5X/2 + I = 0$**.** *(2 puntos)*

EJERCICIO 2 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **= 5, halla el valor de** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

(2 puntos)

EJERCICIO 3 a) DiscuteSegún los valores de m, el sistema homogéneo:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - my - 3z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

(2 puntos)

b) Resuélvelo para el caso en que m = - 8 *(1 punto)*

EJERCICIO 4 Halla para qué valores de t la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ **no tiene inversa y calcula, si es posible,** A^{-1} **para t = 2.** *(2 puntos)*

EJERCICIO 5 Plantea el siguiente enunciado mediante una ecuación matricial:

Tres amigos A, B y C quieren hacer un regalo que cuesta 86 €. Como no todos disfrutan de la misma situación económica, deciden hacerlo de la siguiente forma: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 € que paga C, B paga 3 €. ¿Cuánto paga cada uno?

(1 punto)

SOLUCIONES

Ejercicio 1

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.5m & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} m^2 - 2.5m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 - 2.5m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad m^2 - 2.5m + 1 = 0, \left\{m = \frac{1}{2}\right\}, \{m = 2\}$$

Ejercicio 2

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$$

Ejercicio 3

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -m & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = 7m + 56 = 0 \quad si \quad m = -8$$

Para m ≠ -8, ran A = ranA' = 3 ya que A' aporta sólo una columna de ceros. El sistema sería compatible determinado y la única solución sería la trivial x = y = z = 0.

Para m = -8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 19 \quad RanA = RanA' = 2 \quad SCI$$

$$\begin{matrix} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 8y - 3z = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2x - 3y = -z \\ x + 8y = 3z \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 8 \end{vmatrix}}{19} = \frac{z}{19} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix}}{19} = \frac{7z}{19}$$

Ejercicio 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}; \quad |A| = -t^2 - 3 + 4t = 0 \quad SOLUCIÓN \{t = 1\}, \{t = 3\}$$

Para $t = 1,3$ *la matriz no tiene inversa.Para* $t = 2,$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad La\ inversa\ es\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

x= aportación de A y =aportación de B z = aportación de C

El regalo cuesta 86 euros : **x + y + z = 86**

A paga el triple de lo que aportan B y c juntos**:** **x = 3(y + z)** o **x – 3y -3z = 0**

Por cada 2 euros que pone C, B pone 3 : B C

3 ----------- 2 Regla de 3 :

Y ---------- z **y = 3z/2** o **2y-3z =0**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$