

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

PRIMERA EVALUACIÓN

1. (a) Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

(a-1) añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{cases} \xleftrightarrow[E3-E2]{E2-E1} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2y = -2 \\ 0 \cdot z = 3 \end{cases}$$

Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, en consecuencia el sistema es incompatible.

(a-2) añade una ecuación para que el sistema sea compatible y determinado.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases} \xleftrightarrow[E2-E1]{E2-E1} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es, el de la matriz ampliada es 3 y el nº de incógnitas es 3, en consecuencia el sistema es compatible y determinado.

La solución es : $x = 1, y = 1, z = 2$.

(b) Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x + 2y + az = 8 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

(b-1) Discute el sistema según los valores de a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array} \right) \xleftrightarrow[-2E1+E3]{E1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & a-2 & 8 \end{array} \right) \xleftrightarrow[3E2-4E3]{E2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -4a-7 & -23 \end{array} \right)$$

Si $-4a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-7}{4} \Rightarrow \text{rang}A = 2 \neq \text{rang}A^* = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

Si $a \neq \frac{-7}{4} \Rightarrow \text{rang}A = 3 = \text{rang}A^* = n^{\circ} \text{incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible y determinado}$

(b-2) Al sustituir a por 4, el sistema equivalente al dado es:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 8y - 5z = 3 \Rightarrow y = 1 \\ -23z = -23 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula X tal que $A^2 - X = 2A^t + 8I_3$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

$$A^2 - X = 2A' + 8I \Leftrightarrow X = A^2 - 2A' - 8I$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, 2 \cdot A' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calcula la inversa de $\frac{1}{2} \cdot A$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F3 - F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F3 - F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F1 + F3 \\ 2F2 + F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1/2)F1 \\ (1/2)F2 \\ (1/2)F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Es decir: $\left[\frac{1}{2} A \right]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 € y se obtiene un beneficio unitario de 100 €. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 € y se obtiene un beneficio unitario de 50 €.

(a) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtener un beneficio total de al menos 12500 €.

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

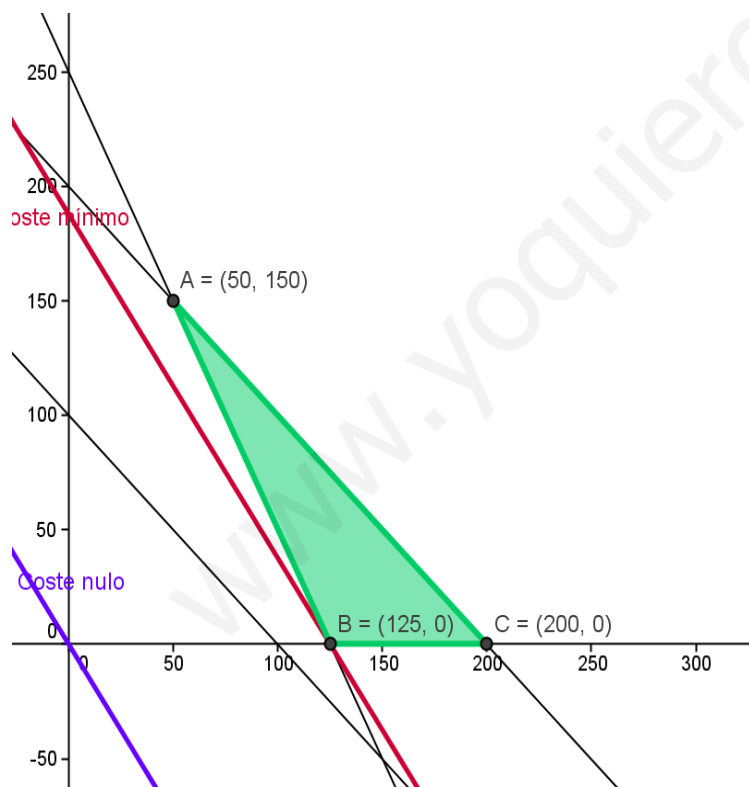
(b) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 €

	Nº unidades	Coste	Beneficio
Bien 1	x	15x	100x
Bien 2	y	10y	50y
Total	X+y	15x+10y	100x+50y

(a) Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 100 \\ x + y \leq 100 \\ 100x + 50y \geq 12500 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Función objetivo: Coste = $C(x,y) = 15x+10y$ € a minimizar.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombreada y la solución óptima se obtiene en el punto $B = (125, 0)$.

El coste mínimo de 1875 € se consigue con $x = 125$ unidades del bien 1 e $y = 0$ unidades del bien 2.

(b) Restricciones:

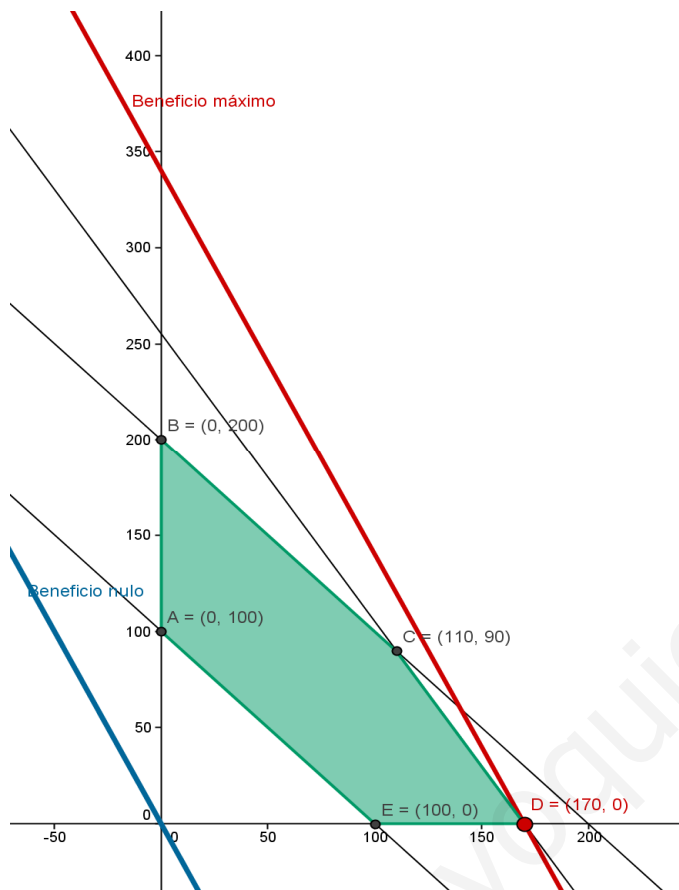
Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 100 \\ x + y \leq 100 \\ 15x + 10y \leq 2550 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\},$$

Función objetivo: Beneficio = $B(x,y) = 100x + 50y$ € a maximizar.

El conjunto de soluciones factibles es la zona sombreada y la solución óptima se obtiene en el punto $B = (125, 0)$.

El coste mínimo de 1875 € se consigue con $x = 125$ unidades del bien 1 e $y = 0$ unidades del bien 2.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombreada y la solución óptima se obtiene en el punto $D = (170, 0)$.

El beneficio máximo de 17000 € se consigue con $x = 170$ unidades del bien 1 e $y = 0$ unidades del bien 2.

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

SEGUNDA EVALUACIÓN

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 2 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad:

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ presenta en } x = 0 \text{ una discontinuidad inevitable de 1ª especie}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ presenta en } x = 2 \text{ una discontinuidad inevitable de 1ª especie}$$

Derivabilidad:

La función NO es derivable en $x = 0$ y en $x = 2$ por no ser continua en dichos puntos.

En el resto de los puntos del dominio es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+1), & x < 0 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

2. (a) Determina las asíntotas verticales y horizontales, si las tiene, de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^2 - 4}$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

$$1^\circ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x+2} = 4 \Rightarrow \text{la recta } x = 2 \text{ No es asíntota vertical.}$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = -\infty \Rightarrow \text{la recta } x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

3º) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3 \Rightarrow$ la recta $y=3$ es asíntota horizontal.

(b) Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

$$m(x) = \log_5 \left(\frac{3x-1}{2x^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5(3x-1) - \frac{1}{3} \log_5 2 - \frac{2}{3} \log_5 x$$

$$m'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-1} \cdot \frac{1}{\ln 5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 5}$$

$$n(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4x-5}} \right)^4 = \left(\frac{3}{4x-5} \right)^{\frac{4}{3}}$$

$$n'(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4x-5} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{-12}{(4x-5)^2} \right)$$

3. (a) Dada $f(x) = ax + b + \frac{3}{x}$, calcula a y b para que la función cumpla:

- (3, 4) se punto de la gráfica
- La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal.

$$(3,4) \in \text{gráfica} \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow 3a + b + 1 = 4$$

$$f'(x) = a - \frac{3}{x^2}$$

$$\text{La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal} \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow f'(3) = a - \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{Resolviendo el sistema: } \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}, \text{ obtenemos } a = 1/3 \text{ y } b = 2$$

(b) Indica los extremos relativos de la función: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$

$$\text{Dom}f = \mathbf{R} - \{-1, +1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x-1)^2(x+2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

Intervalo	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$	$f' > 0$
Monotonía de f	F creciente	F decreciente	F decreciente	F creciente	F creciente

$x = -2$ es máximo relativo, $x = 0$ es mínimo relativo.

TERCERA EVALUACIÓN

1. Calcula:

$$1.1 \int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1+x}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} - 1 \right) dx = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} - \ln x - x \right]_1^3 = \frac{-2}{\sqrt{3}} - \ln 3$$

$$1.2 \int \left(\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x^5} + \frac{1+x^2}{x} \right) dx = \int \left(x^{5/3} - x^{5/2} + \frac{1}{x} + x \right) dx = \frac{3}{8} x^{8/3} - \frac{2}{7} x^{7/2} + \ln|x| + \frac{1}{2} x^2 + C$$

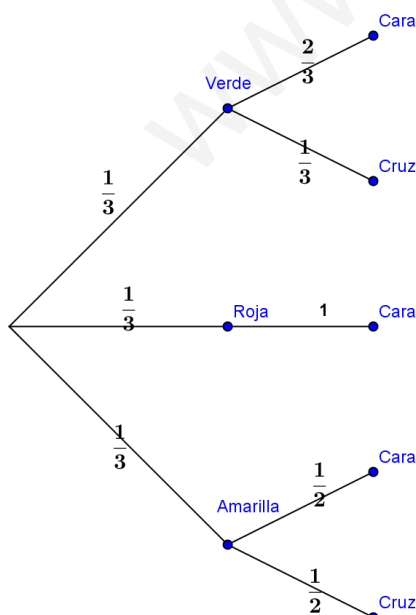
$$1.3 \int_2^3 \frac{3x dx}{x^2-2} = \frac{3}{2} \int_2^3 \frac{2x dx}{x^2-2} = \frac{3}{2} [\ln|x^2-2|]_2^3 = \frac{3}{2} (\ln 7 - \ln 2) = \frac{3}{2} \ln \frac{7}{2}$$

$$1.4 \int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot e^{3\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} e^{3\sqrt{x}} + C$$

1. (a) Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una de ellas hay una moneda. La moneda de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. La moneda de la caja roja tiene dos caras. Y la moneda de la caja amarilla no está trucada. Se toma al azar una caja y se lanza la moneda que está en esa caja.

Calcula razonadamente:

(a-1) El espacio muestral del experimento.



$$E = \{V \cap \text{Cara}, V \cap \text{Cruz}, R \cap \text{Cara}, A \cap \text{Cara}, A \cap \text{Cruz}\}$$

(a-2) La probabilidad de que salga cara.

$$P(\text{Cara}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

(a-3) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

$$P(\text{Roja}|\text{Cara}) = \frac{P(\text{Roja} \cap \text{Cara})}{P(\text{Cara})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}} = \frac{6}{13}$$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

(b) Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que $P(A) = 0'4$, $P(A \cup B) = 0'7$, $P(B) = p$

(b-1) ¿Para qué valor de p son A y sucesos incompatibles?

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0'7 = 0'4 + p \Leftrightarrow p = 0'3$$

(b-2) ¿Para qué valor de p son A y B sucesos independientes?

$$A \text{ y } B \text{ independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Además sabemos que para cualquier par de sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{Por lo tanto: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow 0'7 = 0'4 + p - 0'4 \cdot p \Leftrightarrow 0'3 = (1 - 0'4)p \Leftrightarrow$$

$$p = 0'5$$

3. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra 25 clientes no supere los 9 minutos?

$$X = \text{tiempo espera} = N(\mu = 10, \sigma = 2) \Rightarrow \bar{X} = \text{tiempo medio muestral} = N(\mu_{\bar{x}} = 10, \sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = 0'4)$$

$$P(\bar{X} \leq 9) = P\left(Z \leq \frac{9 - 10}{0'4}\right) = P(Z \leq -2'5) = 1 - P(Z \leq 2'5) = 1 - 0'9938 = 0'0062$$

(b) Indica el intervalo de confianza al 96 % de la media muestral si se toman muestras aleatorias de 64 clientes.

$$X = \text{tiempo espera} = N(\mu = 10, \sigma = 2) \Rightarrow \bar{X} = \text{tiempo medio muestral} = N(\mu_{\bar{x}} = 10, \sigma_{\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0'25)$$

$$\text{Si } 1 - \alpha = 0'96 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'05$$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0'98 \cong 0'9798 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'05$$

Intervalo de confianza para la media muestral:

$$\mu \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

$$(10 - 2'05 \cdot 0'25, 10 + 2'05 \cdot 0'25) = (9'4875, 10'5125)$$

