Examen de Matemáticas 2º Bachillerato C.S.

Materia: Límites, continuidad y derivadas. **Fecha:** 26 - Enero - 11

Alumno...

1. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)\cdot e^{x}, & x<0\\ \frac{3x-1}{x-1}, & 0<x<2\\ x^{2}+1, & x\geq 2\end{cases}$$

(a) Determina su dominio.
(b) Calcula y clasifica los puntos de discontinuidad.
(c) Estudia su derivabilidad.

(**10 puntos**)

2. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^{2}-x+5}-\sqrt{x^{2}+3}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x+3}{2x-2}\right]^{3x^{2}}$

(**4 puntos**)

3. Calcula, efectuando operaciones, la función derivada de las siguientes funciones:

(a) $y=\frac{-5}{\sqrt[3]{x^{2}+5}}$ **(b)** $y=\ln\left[\frac{(3x+5)^{4}}{1-x}\right]$ **(c)** $y=e^{3x}\cdot(3x+2)$

(6 puntos)

4. **(a)** Aplicando la definición de derivada, determina la derivada de $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ en el punto de abscisa x = 2.

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\frac{2}{x^{2}}$ en el punto de abscisa x = -1.

(**5 puntos**)

Soluciones

1. **(a)** Dominio de f = $R-\{0,1\}$

(b) Tenemos que estudiar la función en x = 0, x = 1 y x = 2. En el resto de los puntos del dominio la función es continua.

$$\left.\begin{cases} f(0) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1)e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x-1}{x-1} = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ x = 0 es un punto de discontinuidad evitable.

$$\left.\begin{cases} f(1) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x-1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x-1}{x-1} = +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ x = 1 es un punto de discontinuidad inevitable de 1ª especie.

$$\left.\begin{cases} f(2) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x-1}{x-1} = 5 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ f es continua en x = 2.

(c) f no es derivable en x = 0 y en x = 1 por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2)\cdot e^x, \ x<0 \\ \frac{-2}{(x-1)^2}, \ 0<x<2 \\ 2x, \ x>2 \end{cases} \quad , \quad \left.\begin{cases} f'_-(2) = -2 \\ f'_+(2) = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ f no es derivable en x = 2.

f es derivable en $R - \{0, 1, 2\}$

2. **(a)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+5} - \sqrt{x^2+3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+5} - \sqrt{x^2+3}\right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+x+5-x^2-3}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2+3}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+5}+\sqrt{x^2+3}}\right] = \frac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x+3}{2x-2}\right]^{3x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{15x^2}{2x-2}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

3.

(a) $y' = \frac{-10x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+5)^4}}$

(b) $y' = \frac{12}{3x-5} + \frac{1}{1-x}$

(c) $y' = e^{3x}\cdot(9x+9)$

4.

(a) $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{\sqrt{x+2}}{x}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2-x^2}{x(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} =$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(-x-1)}{x(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} = \frac{-3}{8}$$

(b) $f'(x) = \frac{-4}{x^3} \Rightarrow m_{tg} = f'(-1) = 4,\ P(-1, f(-1) = 2) \Rightarrow$ la recta tangente a f(x) en P tiene por ecuación: $y - 2 = 4 \cdot (x+1)$