INTERVALOS DE CONFIANZA Y TAMAÑO MUESTRAL

La mayoría de estos problemas han sido propuestos en exámenes de selectividad de los distintos distritos universitarios españoles.

1. Una muestra aleatoria de 9 tarrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos

88 90 90 86 87 88 91 92 89

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las tarrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

Solución:

El intervalo de confianza para la población es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, siendo $\bar{x}$ la media muestral, σ la desviación típica, *n* el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 − α.

La media muestral es $\bar{x} = \dfrac{88+90+90+86+87+88+91+92+89}{9} = 89$

Por tanto, como σ = 1,8, *n* = 9 y $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, el intervalo de confianza será:

$$\left(89 - 1{,}96\cdot\frac{1{,}8}{\sqrt{9}},\ 89 + 1{,}96\cdot\frac{1{,}8}{\sqrt{9}}\right) = (87{,}824,\ 90{,}176)$$

2. La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en mese):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

Solución:

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral *n* de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

En este caso: $\bar{x} = \dfrac{33+34+26+37+30+39+26+31+36+19}{10} = 31{,}1$; σ = 5; el tamaño muestral es *n* = 10; y $Z_{\alpha/2}$ = 1,96.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(31{,}1 - 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}},\ 31{,}1 + 1{,}96\cdot\frac{5}{\sqrt{10}}\right) = (31{,}1 - 3{,}1,\ \ 31{,}1 + 3{,}1) = (28,\ 34{,}2)$$

3. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

a) Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional..

b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x} = 5$, $\sigma = 2$, n = 10000 y, para el 80 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,28$.

$$\left(5 - 1,28\cdot\frac{2}{\sqrt{10000}},\ 5 + 1,28\cdot\frac{2}{\sqrt{10000}}\right) = (5 - 0,0256,\ 5 + 0,0256) = (4,9744,\ 5,0256)$$

b) El error admitido, *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, y $E < 0,25$ se tendrá:

$$1,96\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,25 \Rightarrow \sqrt{n} > 15,68 \Rightarrow n \geq 15,68^2 = 245,8$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 246 personas.

4. Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 euros. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1248 euros. Calcula:
a) El intervalo de confianza para la recaudación media con un nivel de confianza del 99 %.
b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria media menor de 127 euros.

Solución:
a) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso $\bar{x} = 1248$, $\sigma = 328$, $n = 100$; y $Z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(1248 - 2{,}575\cdot\frac{328}{\sqrt{100}},\ 1248 + 2{,}575\cdot\frac{328}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$= (1248 - 84{,}46,\ \ 1248 + 84{,}46) = (1163{,}54,\ \ 1332{,}46)$$

b) El error admitido, E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso, para una confianza del 95 %, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $\sigma = 328$ y $E < 127$, se tendrá:

$$1{,}96\frac{328}{\sqrt{n}} < 127 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} > \frac{1{,}96\cdot 328}{127} = 5{,}06 \ \Rightarrow\ n > 25{,}6$$

El tamaño muestral debe ser 26 o más comercios.

5. Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a las estancias, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x}$ = 8,1 días; s = 9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$ y desviación típica s es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$, siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Para $\bar{x}$ = 8,1, s = 9, n = 800 y, para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, se tiene:

$$\left(100 - 2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{25}},\ 100 + 2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{25}}\right) = (8{,}1 - 0{,}6,\ \ 8{,}1 + 0{,}6) = (\ 7{,}5,\ 8{,}7)$$

La estancia media está entre 7,5 y 8,7 días.

6. Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia que la variable “inteligencia de todos los estudiantes” es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de 0,99?

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x}$ = 100, s = 10, n = 25 y, para el 99 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 2,58, se tiene:

$$\left(100 - 2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{25}},\ 100 + 2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{25}}\right) = (100 - 5{,}16,\ \ 100 + 5{,}16) = (\ 94{,}84,\ 105{,}16)$$

La inteligencia media estará entre 94,84 y 105,16 puntos.

7. Una muestra aleatoria de tamaño 100, extraída de una población normal de varianza 81, presenta una media muestral igual a 150.
i) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional.
ii) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional y compararlo con el anterior.
iii) Si se quiere tener una confianza del 95 % de que su estimación se encuentra a una distancia máxima de 1,2 de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral *n* de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

i) Para $\bar{x} = 150$, $\sigma^2 = 81 \Rightarrow \sigma = 9$, n = 100 y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,645$, se tendrá:

$$\left(150 - 1,645\cdot\frac{9}{\sqrt{100}},\ 150 + 1,645\cdot\frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (148,52,\ \ 151,48)$$

ii) Para una confianza del 95 %, $Z_{\alpha/2} = 1,96$, luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(150 - 1,96\cdot\frac{9}{\sqrt{100}},\ 150 + 1,96\cdot\frac{9}{\sqrt{100}}\right) = (148,24,\ \ 151,76)$$

El intervalo se hace más amplio, pues si se desea más confianza (más seguridad de acierto sin variar el tamaño muestral), debe precisarse menos.

iii) La distancia máxima, el error máximo admitido, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2} = 1,96$; si desea que la distancia máxima sea menor que 1,2, *E* < 1,2, se tendrá:

$$1,96\frac{9}{\sqrt{n}} < 1,2 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} > 14,7 \ \Rightarrow\ n > 216$$

El valor mínimo de n debe ser de 217; por tanto, deben tomarse 117 elementos más.

8. Un agricultor quiere estimar el peso medio de las naranjas que produce, con un error menor de 10 g, empleando una muestra de 81 naranjas. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 36 g, ¿cuál será el máximo nivel de confianza con que realizará la estimación?

Solución:

El error admitido viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional, n el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor en la tabla normal para una confianza de 1 − α.
En nuestro caso, E < 10, n = 81 y σ = 36, siendo α desconocida.

Se tiene:

$$Z_{\alpha/2}\frac{36}{\sqrt{81}} < 10 \;\Rightarrow\; Z_{\alpha/2} < \frac{10\cdot 9}{36} = 2{,}5$$

Para $Z_{\alpha/2}$ < 2,5, se tiene que 1 − α/2 < 0,9938 ⇒ α < 0,0124 ⇒ 1 − α < 0,9876. Por tanto, la confianza máxima es del 98,76 %.

9. En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
a) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con un 97 % de confianza, para la media d la población.
b) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1.

Solución:

a) Intervalo de confianza: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En este caso: $\bar{x}$ = 50, σ = 2, $Z_{\alpha/2}$ = 2,17 y n = 400. El intervalo será:

$$\left(50 - 2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}},\ 50 + 2{,}17\frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (49{,}783,\ 50{,}217)$$

b) La amplitud del intervalo es $2\cdot Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si se quiere que sea menor que 1:

$$2{,}17\frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} > 4\cdot 2{,}17 = 8{,}68 \;\Rightarrow\; n > 75{,}34.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser 76.

10. Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66, 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explica cada uno de los pasos realizados.

Solución:
El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral *n* de media $\bar{x}$ y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1 − α.

En este caso se sabe que σ = 3 y $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 (95 % de confianza: 1 − α = 0,95).
Por tanto:

$$\left(\bar{x} - 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 1{,}96\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = (6{,}66,\ 8{,}34)$$

Luego $\begin{cases} \bar{x} - 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 6{,}66 \\ \bar{x} + 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 8{,}34 \end{cases} \Rightarrow\ 6{,}66 + 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 8{,}34 - 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0{,}84 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{0{,}84} = 7 \ \Rightarrow\ n = 49$$

Si *n* = 49, como $\bar{x} - 1{,}96\dfrac{3}{\sqrt{49}} = 6{,}66 \ \Rightarrow\ \bar{x} = 7{,}5$

NOTA: La media se podría haber calculado sin conocer n, pues al ser el intervalo de confianza simétrico respecto de la media, esta es la media aritmética de los extremos de ese intervalo: $\bar{x} = \dfrac{6{,}66 + 8{,}34}{2} = 7{,}5$.

11. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros:
a) Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x}$ = 1480, σ = 250, n = 625 y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,645, este intervalo es:

$$\left(56 - 2{,}17\cdot\frac{6}{\sqrt{64}},\ 56 + 2{,}17\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}\right) =$$
$$= (1480 - 16{,}45,\ \ 1480 + 16{,}45) = (1463{,}55,\ 1496{,}45)$$

b) El error viene dado por E = $Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si se desea que sea menor que 10, para el 99 % ($Z_{\alpha/2}$ = 2,575) y σ = 250, se tendrá:

$$2{,}575\cdot\frac{250}{\sqrt{n}} < 10 \Rightarrow n > (2{,}575\cdot 25)^2 = 4144{,}14$$

El tamaño mínimo de *n* = 4145.

12. Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas en Canarias, se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 € con una desviación típica de 6 €. Se pide:
a) Determina el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas en Canarias con un nivel de confianza del 97 %.
b) Halla el tamaño de la muestra que se debe tomar para que el error máximo sea de 2 €, con un nivel de significación del 1 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x} = 56$, $\sigma = 6$, n = 64 y, para el 97 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2,17$.

$$\left(56 - 2,17\cdot\frac{6}{\sqrt{64}},\ 56 + 2,17\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}\right) = (54,3725,\ 57,6275)$$

b) El error admitido *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso, para una significación del 1 % (confianza del 99 %), $Z_{\alpha/2} = 2,575$, $\sigma = 6$ y $E < 2$, se tendrá:

$$2,575\frac{6}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow \sqrt{n} > 7,725 \Rightarrow n > 59,7$$

El tamaño muestral debe ser superior a 59; esto es *n* = 60 o más.

13. Un fabricante de bombillas garantiza que el tiempo de duración de las bombillas sigue una normal con media igual a 500 horas y con desviación típica igual a 40 horas.
a) Calcular la probabilidad de que una bombilla elegida al azar dure más de 450 horas.
b) Para verificar la garantía del fabricante, se hizo una prueba con 49 bombillas obteniéndose una media muestral de 492 horas. ¿Podemos aceptar que la media de duración es de 500 horas, con un nivel de confianza del 90%?

Solución:
La distribución es N(500, 40).

a) $P(X > 450) = P\left(Z > \dfrac{450-500}{40}\right) = P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = 0,8944$

b) Se aceptará que la media es de 500 horas si este valor pertenece al intervalo

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo $\bar{x}$ la media de la muestra, n el tamaño muestral, σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

Como $\bar{x} = 492$, $\sigma = 40$, $n = 49$ y, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 1,645$, se tendrá:

$$\left(492 - 1,645\cdot\frac{40}{\sqrt{49}},\ 492 + 1,645\cdot\frac{40}{\sqrt{49}}\right) = (492 - 9,4,\ 492 + 9,4) = (482,6,\ 501,4)$$

Por tanto, se acepta que la media de duración es 500 horas.

14. Se ha aplicado una prueba, para medir el coeficiente intelectual, a una muestra de 100 universitarios españoles elegida de forma aleatoria. Calculada la media de esta muestra se han obtenido 98 puntos. Sabiendo que las puntuaciones de la prueba siguen una distribución normal de desviación típica de 15.
1) Calcula, con una probabilidad del 98 %, entre qué valores se encontrará la media de la población universitaria española.
2) Interpreta el significado del intervalo obtenido.

Solución:
1) Se trata de calcular el intervalo de confianza de la media poblacional.

Este intervalo es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x} = 98$, $\sigma = 15$, $n = 100$ y, para el 98 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2,33$, se tiene:

$$\left(98 - 2,33\cdot\frac{15}{\sqrt{100}},\ 98 + 2,33\cdot\frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (98 - 3,495,\ 98 + 3,495) =$$

$$= (94,505,\ 101,495) \approx (94,5,\ 101,5)$$

2) Esto significa que el cociente intelectual de los universitarios españoles está entre 94,5 y 101,5, con una probabilidad del 0,98, o del 98 % si quiere decirse así.

15. El tiempo de conexión a Internet de los alumnos de cierta universidad, sigue una distribución normal con desviación típica 15 minutos. Para estimar la media del tiempo de conexión, se quiere calcular un intervalo de confianza que tenga una amplitud menor o igual que 6 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determina cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

El error admitido, *E*, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo σ la desviación típica poblacional.

En este caso, para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, σ = 5 y *E* < 3, pues la amplitud del intervalo $2 \cdot Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

(Recuérdese que el intervalo de confianza es $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$)

Con esto:

$$2{,}575\frac{0{,}05}{\sqrt{n}} < 0{,}01 \Rightarrow \sqrt{n} > 12{,}875 \Rightarrow n > 96{,}04$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 97.

16. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99 %, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

Solución:

El error admitido: $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso, para una confianza del 99%, $Z_{\alpha/2}$ = 2,575, σ = 0,05 y *E* < 0,01, se tendrá:

$$2{,}575\frac{0{,}05}{\sqrt{n}} < 0{,}01 \Rightarrow \sqrt{n} > 12{,}875 \Rightarrow n > 165{,}77$$

El tamaño muestral mínimo debe ser 166.

17. Se sabe que la estatura de los individuos de una población es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm.
a) Obtener un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población.
b) Calcular el mínimo tamaño de muestra que se ha de tomar para estimar la estatura media de los individuos de la población con un error inferior a 1 cm y un nivel de confianza del 95%.

Solución:

a) El intervalo de confianza: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x}$ = 176, σ = 6, n =225 y, para el 99% de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 2,575, se tiene

$$\left(176 - 2{,}575\frac{6}{\sqrt{225}},\ 176 + 2{,}575\frac{6}{\sqrt{225}}\right) = (176 - 1{,}03,\ 176 + 1{,}03) = (174{,}97,\ 177{,}\ 03)$$

b) El error admitido, E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso, si E < 1 y $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 (confianza 95%), se tiene:

$$1{,}96\cdot\frac{6}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 11{,}76 \Rightarrow n > 138{,}3$$

El mínimo tamaño de muestra debe ser n = 139.

18. Un laboratorio farmacéutico afirma que el número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar una determinada enfermedad sigue una variable normal con desviación típica igual a 8. Se toma una muestra de 100 enfermos a los que se les administra el medicamento y se observa que la media de horas que tardan en curarse es igual a 32.
a) Encontrar un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la media del número de horas que tarda en curar el medicamento.
b) Si el nivel de significación es igual a 0,05, ¿cuál es el tamaño de la muestra que habría que considerar para estimar el valor de la media con un error menor de 3 horas?

Solución:

a) El intervalo de confianza es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x}$ = 32, σ = 8, n = 100 y, para el 99 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 2,575.

$$\left(32 - 2{,}575\cdot\frac{8}{\sqrt{100}},\ 32 + 2{,}575\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\right) = (29{,}94,\ 34{,}06)$$

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

En este caso, para una confianza del 95%, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, σ = 8 y E < 3, se tendrá:

$$1{,}96\frac{8}{\sqrt{n}} < 3 \Rightarrow \sqrt{n} > 5{,}2266 \Rightarrow n > 27{,}31$$

El tamaño muestral debe ser superior a 27.

19. Las especificaciones de un fabricante de botes de pintura dicen que el peso de los botes sigue una distribución normal de media 1 kg de pintura y una desviación estándar de 0,1 kg.
a) ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 botes?
b) Se ha comprado un lote del que se ha tomado una muestra de 20 botes y en el que la media de los pesos obtenidos es de 0,98 kg, Construye un intervalo de confianza del 95% para la media.

Solución:
a) La distribución de la media muestral de tamaño *n* obtenidas en una población de media μ y desviación típica σ, N(μ, σ), se distribuye según una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso:

Población: N(1, 0,1). Media muestral: $N\left(1, \frac{0{,}1}{\sqrt{20}}\right) \approx$ N(1, 0,022)

b) El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media $\bar{x}$, es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siendo σ la desviación típica poblacional y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de 1− α.

En este caso: $\bar{x}$ = 0,98, σ = 0,1, n =20 y, para el 95% de confianza, $Z_{\alpha/2}$ =1,96.

El intervalo pedido es:

$$\left(0{,}98 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}1}{\sqrt{20}},\ 0{,}98 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}1}{\sqrt{20}}\right) \approx (0{,}937,\ 1{,}023)$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCIÓN DE LA MUESTRA

20. De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %

Solución:

La proporción de la muestra es $\hat{p} = \frac{630}{2100} = 0,30$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$; n, el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En nuestro caso, para el 99 % de confianza (significación 0,01), $Z_{\alpha/2} = 2,575$; $\hat{p} = 0,30$, $\hat{q} = 0,70$, y $n = 2100$. Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0,30 - 2,575\sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}},\ 0,30 + 2,575\sqrt{\frac{0,30 \cdot 0,70}{2100}}\right) =$$

$$= (0,30 - 0,02575,\ 0,30 + 0,02575) \approx (0,274,\ 0,326)$$

NOTA: Si se desea ser más exigente, los parámetros p y q podrían suponerse iguales, $p = q = 0,50$. Así se obtendría:

$$\left(0,30 - 2,575\sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}},\ 0,30 + 2,575\sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,50}{2100}}\right) \approx (0,272,\ 0,328)$$

21. En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas, se pide:
a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?.
b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?
Justificar las respuestas.

Solución:
El tamaño muestral fue de 1250 · 0,20 = 250 familias.
La proporción de familias con gas natural en la muestra es $\frac{75}{250} = 0{,}30$, el 30 %.

a) Puede afirmarse que el porcentaje de familias con gas natural es del 30 %.

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}$, siendo:

- *p* la proporción de familias con gas natural y q = 1 – p → p = 0,30, q = 0,70
- *n* el tamaño muestral → n = 250
- $Z_{\alpha/2}$ el valor de la variable normal correspondiente a una confianza 1 – α → $Z_{\alpha/2}$ = 1,96

Por tanto, $E = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{250}} = 1{,}96 \cdot 0{,}029 = 0{,}057$
Se puede cometer un error máximo del 5,7 %. Esto es, el porcentaje de familias con gas natural pertenece al intervalo (30 – 5,7, 30 + 5,7): estará entre el 24,3 % y el 35,7 %

Si somos más exigentes y suponemos que al desconocer la proporción de la población hay que tomar p = q = 0,5, el error que se asume es,
$$E = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}50 \cdot 0{,}50}{250}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0316 \approx 0{,}062$$
Cometeríamos un error máximo del 6,2 %.

22. En cierta cadena de centros comerciales trabajan 150 personas en el departamento de personal, 450 en el departamento de ventas, 200 en el departamento de contabilidad y 100 en el departamento de atención al cliente. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores.
a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?
b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?
Justificar las respuestas

Solución:

a) Podría hacerse un muestreo aleatorio estratificado, eligiendo de cada grupo de trabajadores un número proporcional a su tamaño.

b) Hay que repartir proporcionalmente 180 entre 150, 450, 200 y 100, que son el número de trabajadores de los departamentos de personal, ventas, contabilidad y atención al cliente, respectivamente.

El total, el número de trabajadores de la empresa es 900; como el tamaño muestral es 180 habrá que elegir 1 trabajador de cada 5. Por tanto, se elegirán:

30 del departamento de personal
90 del departamento de ventas
40 del departamento de contabilidad y
20 del departamento de atención al cliente.

23. En una piscifactoría, se inició un cultivo con 90 ejemplares, de los cuales 64 llegaron a la edad adulta. De los que llegaron a la edad adulta, el peso medio fue de 3,1 kilos con una desviación típica de medio kilo.
a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 90%.
b) Obtener un intervalo de confianza para el peso medio que alcanzan los ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

a) El intervalo de confianza es: $\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$

En este caso, para el 90 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,645, $\hat{p} = \dfrac{120}{325}$ = 0,7111, $\hat{q}$ y n = 90. Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}37 - 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{325}},\ 0{,}37 + 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{325}}\right) =$$

= (0,7111 –0,0786, 0,7111 + 0,0786) = (0,6325, 0,7897)

b) El intervalo de confianza de la media poblacional es: $\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\bar{x}$ = 3,1, σ = 0,5, n = 64 y, para el 95 % de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 1,96, se tendrá:

$$\left(3{,}1 - 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{64}},\ 3{,}1 + 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{64}}\right) = (2{,}9775,\ 3{,}2225)$$

24. El Ministerio de Educación y Cultura desea conocer el interés de los padres por la introducción de la primera Lengua Extranjera en el Primer Curso de Primaria. Encuestados 1024 padres elegidos al azar, el 80% está favor. ¿Cuál es el intervalo de confianza para el porcentaje de los padres que están a favor de esta medida, con un nivel de confianza del 0,99?

Solución:

El intervalo de confianza para la proporción es: $\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{pq}{n}},\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$

En este caso: para el 99% de confianza, $Z_{\alpha/2}$ = 2,575; p = 0,8; q = 0,20; y n = 1024. Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}15 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{400}},\ 0{,}15 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{400}}\right) =$$

= (0,80 – 0,032, 0,80 + 0,032) = (0,768, 0,832)

NOTA: Si se desea más seguridad, puede suponerse que la proporción de la población es p = 0,5. Así se obtiene el intervalo (0,76, 0,84)

25. Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente:
a) Halla, con un nivel de confianza del 94 %, un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.
b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se realiza la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra?

Solución:
a) El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

siendo $\hat{p}$ la proporción de la muestra, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$; n, el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso, para el 94 % de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2{,}17$, $\hat{p} = \frac{120}{325} = 0{,}37$, $\hat{q} = 0{,}63$, y $n = 325$.

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}37 - 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{325}},\ 0{,}37 + 2{,}17\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{325}}\right) = (0{,}312,\ 0{,}428)$$

b) El error admitido E, viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow n = (Z_{\alpha/2})^2\,\frac{\hat{p}\hat{q}}{E^2}$

Luego: $n = 2{,}17^2\,\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{0{,}01^2} = 10976{,}4$

El tamaño muestral debe ser de n > 10976.

26. Preguntadas 100 personas de cierta ciudad, elegidas al azar, si leen el periódico al menos una vez a la semana, sólo 40 han contestado que sí. Encuentre un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la proporción de personas de esa ciudad que leen el periódico al menos una vez a la semana.

Solución:

Intervalo de confianza: $\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$

En este caso: para el 99% de confianza, $Z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $p = 40/100 = 0{,}4$; $q = 0{,}60$; y $n = 100$.

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}15 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{400}},\ 0{,}15 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{400}}\right) =$$

$$= (0{,}40 - 0{,}126,\ 0{,}40 + 0{,}126) = (0{,}274,\ 0{,}526)$$

27. De una muestra de 400 jóvenes españoles de 25 años, elegidos al azar, sólo 60 no vivían con sus padres. Determine un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95 %, para el porcentaje de los jóvenes españoles que no viven con sus padres a los 25 años.

Solución:
La proporción muestral de jóvenes que no vivían con sus padres era de 60/400 = 0,15

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(p - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$$

siendo p la proporción de la muestra, $q = 1 - p$; n, el tamaño muestral y $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$.

En este caso:

$p = 0,15$; $q = 0,85$; $n = 400$; $Z_{\alpha/2} = 1,96$

Luego, el intervalo de confianza será:

$$\left(0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{400}},\ 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{400}} \right) =$$

$$= (0,15 - 0,035,\ \ 0,15 + 0,035) = (0,115,\ \ 0,185)$$

EL porcentaje de la población de jóvenes de 25 años que no vive con sus padres, está entre el 11,5 % y el 18,5 %.