Integrales

1. Calcular las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}}$ iii) $\displaystyle\int xsenx^2dx$

Solución:

i) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{5/2}+5x^{3/2}-3x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+5\frac{2}{5}x^{5/2}-3\frac{2}{3}x^{3/2}+2\cdot 2x^{1/2}+c = \left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c$$

ii) Ajustando constantes se tiene:

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{6x+1}} = \int \frac{6dx}{2\sqrt{6x+1}} = \sqrt{6x+1}+c$$

iii) Haciendo el cambio de variable $x^2=t \Rightarrow$ 2xdx = dt $\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$, se tendrá:

$$\int xsenx^2dx = \int \frac{1}{2}sentdt = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$$

2. Calcule las siguientes integrales

i) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}dx$ ii) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+x}{\sqrt{e^{2x}+x^2+5}}dx$ iii) $\displaystyle\int \frac{3x^3+8x^2+1}{3x-1}dx$

Solución:

i) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}dx$.

Haciendo el cambio de variable $\sqrt{3x}=t \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{3x}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x}}dx = \frac{2}{3}dt$.

Sustituyendo: $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}dx = \int \frac{2}{3}sentdt = -\frac{2}{3}\cos t + c = -\frac{2}{3}\cos\sqrt{3x}+c$

i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+x}{\sqrt{e^{2x}+x^2+5}}dx = \int \frac{2e^{2x}+2x}{2\sqrt{e^{2x}+x^2+5}}dx = \left(\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx\right) = \sqrt{e^{2x}+x^2+5}+c$

ii) Dividiendo: $\displaystyle\frac{3x^3+8x^2+1}{3x-1} = x^2+3x+1+\frac{2}{3x-1}$

Luego:

$$\int \frac{3x^3+8x^2+1}{3x-1}dx = \int \left(x^2+3x+1+\frac{2}{3x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+\frac{2}{3}\ln(3x-1)+c$$

3. Calcular el valor de $a > 0$ en los siguientes casos:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a$ b) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3$ c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5$.

Solución:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = a \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^3 = \ln 4 = a$

b) $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx = 3 \Rightarrow \int_0^a \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^a = \ln(a+1) = 3 \Rightarrow a+1 = e^3 \Rightarrow a = e^3 - 1$

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = 5 \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+a}dx = [\ln(x+a)]_0^3 = \ln(3+a) - \ln a = 5 \Rightarrow \ln\frac{3+a}{a} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3+a}{a} = e^5 \Rightarrow 3+a = ae^5 \Rightarrow a(e^5-1) = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{e^5-1}$

4. Calcular la integral definida $\int_{-1}^1 (|x| + x + 1)dx$

Solución:

Para valores negativos de x, el valor absoluto de x, $|x| = -x$; para valores positivos de x, $|x| = x$.
Si además aplicamos las propiedades de la integral definida, se tiene:

$$\int_{-1}^1 (|x| + x + 1)dx = \int_{-1}^0 (|x| + x + 1)dx + \int_0^1 (|x| + x + 1)dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x + x + 1)dx \int_0^1 (x + x + 1)dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 (2x+1)dx =$$

$$= x\Big|_{-1}^0 + (x^2 + x)\Big|_0^1 = -(-1) + (1+1) = 3$$

5. Encontrar la función cuya segunda derivada es la constante 2, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto (1, 2).

Solución:

Datos: $f''(x) = 2$; $f'(1) = 0 \rightarrow$ en $x = 1$ se da un mínimo; $f(1) = 2$: la función pasa por (1, 2).

Integrando la segunda derivada se obtiene la primera.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int 2dx \Rightarrow f'(x) = 2x + c$$

Como $f'(1) = 0$ se tendrá que: $f'(1) = 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$. Luego $f'(x) = 2x - 2$

Integrando $f'(x)$ se obtiene $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 1)dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x + k$$

Como $f(1) = 2$ se tendrá que: $f(0) = k = 1 \Rightarrow k = 3$.

Luego, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

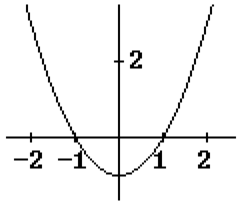
6. La derivada de cierta función *f* es $f'(x) = x^2 - 1$.

(a) Representar gráficamente f' y deducir de esa gráfica los intervalos de crecimiento y concavidad de *f*.

(b) Hallar *f* sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

(a) La función $f'(x) = x^2 - 1$ es una parábola. Su gráfica se obtiene dando valores y es la siguiente.



Se observa que:

si $x < -1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

si $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

si $x > 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Además, $f'(x)$ es decreciente si $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$.
Por tanto,

si $x < 0$, f'' será negativa y *f* cóncava ($\cap$)

si $x > 0$, $f'' > 0$ y *f* convexa ($\cup$)

En $x = 0$ se tendrá un punto de inflexión.

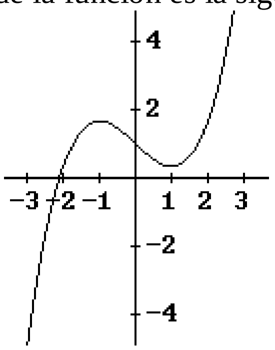
(b) Integrando $f'(x)$ se obtiene $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 1)dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x + k$$

Como $f(0) = 1$ se tendrá que: $f(0) = k = 1$.

Luego, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + 1$

Nota: Aunque no se pide, la gráfica de la función es la siguiente



7. Sea considera la función $f(x) = xe^{x^2}$.
(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa $x = 1$.
(b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ para $x \geq 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

Solución:
(a) La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto (a, $f(a)$) es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Si $f(x) = xe^{x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$; luego $f(1) = e$; $f'(1) = 3e$

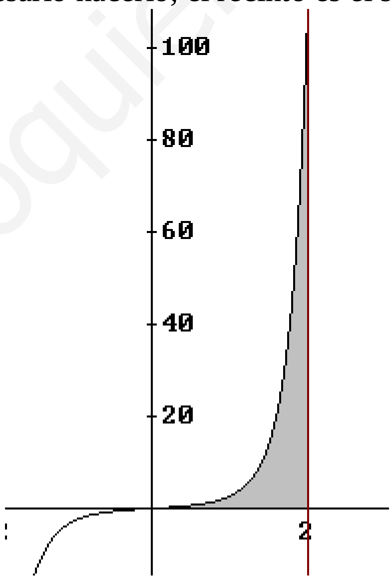
De donde la tangente será:

$$y - e = 3e(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 3ex - 2e$$

(b) Como la función es positiva en el intervalo considerado, el área pedida viene dada por el valor d la integral

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

NOTAS:
1. Esta integral es inmediata, no obstante podría hacerse el cambio $x^2 = t$.
2. Aunque no se pide, ni es necesario hacerlo, el recinto es el sombreado el la siguiente figura:



8. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 9$ .y $g(x) = x^2 - x - 6$.
Calcular:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Los extremos relativos de $g(x)$, si existen.

c) El área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 3$, $x = 6$.

Solución:

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

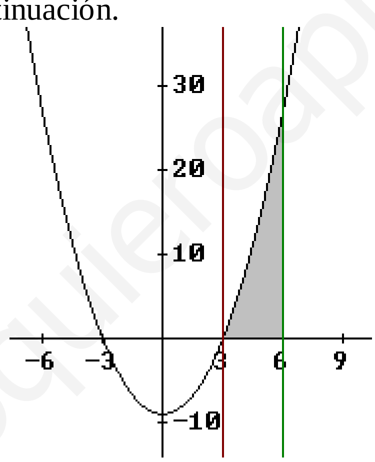
b) La función g(x) es una parábola de eje vertical: tendrá un mínimo, pues el coeficiente de x^2 es positivo.

Por derivadas:

$$g(x) = x^2 - x - 6 \Rightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2.$$

Como $g''(x) = 2 > 0$, en x = 1/2 se tiene un mínimo. Su valor es $g(1/2) = -25/4$

c) El recinto es el dibujado a continuación.



El área vale:

$$A = \int_3^6 (x^2 - 9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_3^6 = 18 - (-18) = 36$$

9. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$

a) Determínense *a*, *b* y *c*, sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (–2, –3) y (1, 0).

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g(x)* en el punto (–2, –3).

c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y g(x).

Solución:

(a) Por $f(-2) = -3 \Rightarrow 4 - 2a + b = -3$

Por $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$

De ambas ecuaciones se deduce que: $a = 2$ y $b = -3$

Por $g(1) = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1$.

Las funciones son: $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = -x^2 + 1$

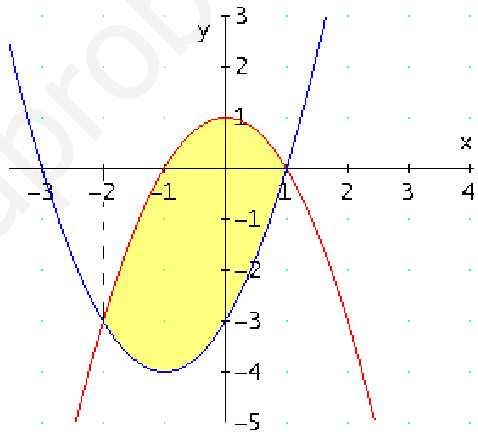
(b) La tangente es: $y - g(-2) = g'(-2)(x+2)$

Como $g'(x) = -2x \rightarrow g'(-2) = 4$

Por tanto, la ecuación de la tangente será:

$$y + 3 = 4(x+2) \Rightarrow y = 4x + 5$$

(c) La situación gráfica es la siguiente.



Las curvas se cortan en x = –2 y x = 1, solución de la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = -x^2 + 1$$

El área es la zona sombreada, que vale:

$$A = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x\right)\Big|_{-2}^{1} = -\frac{2}{3} + 4 - 1 - \left(\frac{16}{3} - 8 - 4\right) = 9$$

10. Sea la función dependiente de los parámetros a y b:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-a & \text{si } x\le 0\\ x-1 & \text{si } 0<x\le 2\\ bx-5 & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) Hállense los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto **R** de números reales.
b) Represéntese gráficamente para los valores $a = 0$ y $b = 3$.
c) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) En $x = 0$:

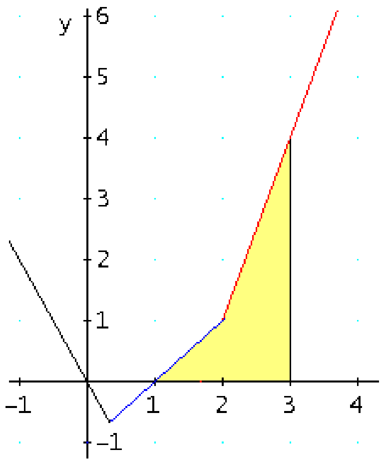
si $x\to 0^-$, $f(x)\ \to\ -a$
si $x\to 0^+$, $f(x)\ \to\ -1\ \Rightarrow\ a = 1$

En $x = 2$:

si $x\to 2^-$, $f(x)\ \to\ 1$
si $x\to 2^+$, $f(x)\ \to\ 2b-5\ \Rightarrow\ b = 3.$

b) Para los valores $a = 0$ y $b = 3$ la función es $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x\le 0\\ x-1 & \text{si } 0<x\le 2\\ 3x-5 & \text{si } x>2\end{cases}$

Su gráfica es la adjunta.



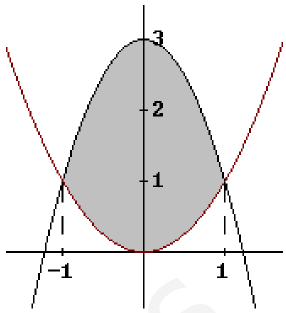
c) El área es la de la región sombreada en la figura.

$$A = \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^3 (3x-5)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 + \left[\frac{3x^2}{2}-5x\right]_2^3 = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

11. Hallar el área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

Solución:
La región es la sombreada en la siguiente figura.



Las curvas se cortan en los puntos (–1, 1) y (1, 1), que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$$

Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2 + 3$ en el intervalo (–1, 1), el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx = \left(-x^3 + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2 - (-2) = 4$$

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & si \quad x \le 0 \\ -1 + 2x & si \quad 0 < x \le 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$.

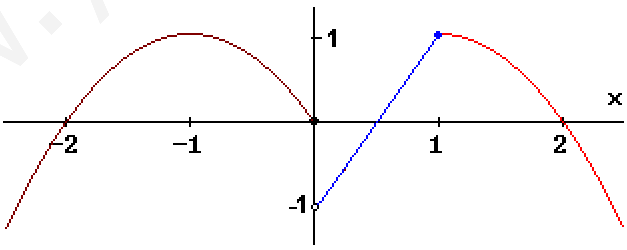
a) Representa gráficamente *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$

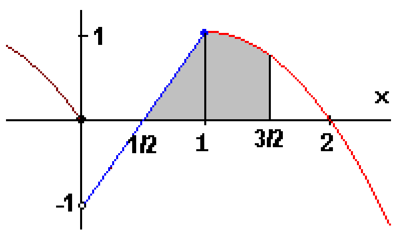
Solución:
a) Es una función definida a trozos, compuesta por dos trozos de parábola y un trozo de recta. Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	–3	–2	–1	0	0,1	0,5	1	1,1	2	3	4
f(x)	–3	0	1	0	–0.8	0	1	0,99	0	–3	–8

Se obtiene la figura:



b) El área pedida es la sombreada en la figura adjunta.
Su valor es:

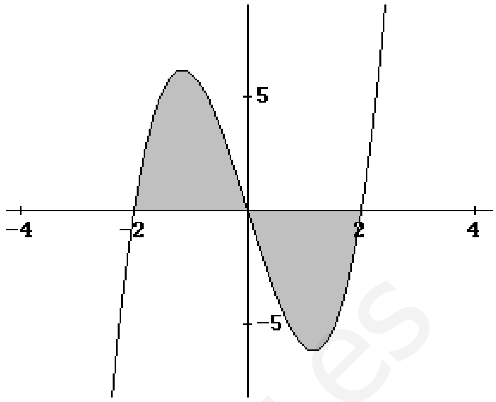


$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2)dx + A(triángulo) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{1}{3} - 4 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) + \frac{9}{2} = \frac{37}{6}$$

13. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 8x$ y el eje de abscisas.

Solución:
El recinto es el sombreado en la siguiente figura.



Para representarla observamos que:
– corta al eje OX en los puntos x = –2, 0 y 2, soluciones de $2x^3 - 8x = 0$
– tiene máximos o mínimos cuando $y' = 6x^2 - 8 = 0$
$\Rightarrow \; x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
– la función es impar.
– dando algunos valores se obtiene la gráfica.

El área viene dada por:

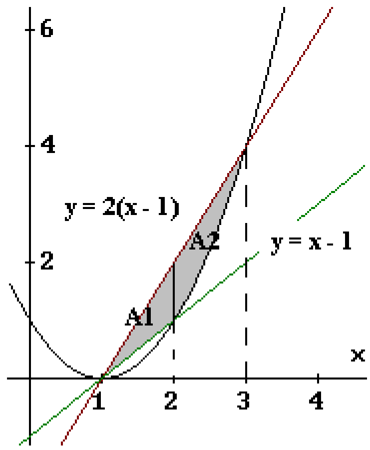
$$A = 2\int_{-2}^{0}(2x^3 - 8x)dx = 2\left(\frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 2(-8+16) = 16$$

14. Dibujar el recinto engendrado por las funciones

$$y = x - 1;\quad y = 2(x-1);\quad y = (x-1)^2$$

Calcular el área de dicho recinto.

Solución:
Se trata de dos rectas y de una parábola. Pueden representarse dando valores.
El área pedida es la del recinto sombreado en la figura.



Los puntos de corte entre las distintas gráficas se obtienen resolviendo los sistemas:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \; x = 1,\, x = 2;$$

$$\begin{cases} y = 2(x-1) \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \; x = 1,\, x = 3$$

El área del recinto viene dada por:

$$A = A1 + A2 = \int_1^2 [2(x-1) - (x-1)]dx + \int_2^3 [2(x-1) - (x-1)^2]dx =$$

$$= \int_1^2 (x-1)dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

15. a) Encuentra la primitiva de la función $f(x) = 27 - x^3 + 3e^{2x-1}$ que en el 1 valga 26,75.

b) Dibuja la función $f(x) = 27 - x^3$, y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 5$.

Solución

a) Es una integral casi inmediata:

$$F(x) = \int \left(x + \frac{4}{x^2} \right) dx = \int x dx + 4\int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} + 4\frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + c$$

Si F(1) = 26,75 $\Rightarrow$ $\frac{4}{2} - \frac{4}{2} + c = 5$ $\Rightarrow$ $c = 5$

b) $f(x) = 27 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f''(x) = -6x$

Como $f'(x) < 0$ para todo x, la función es siempre decreciente.

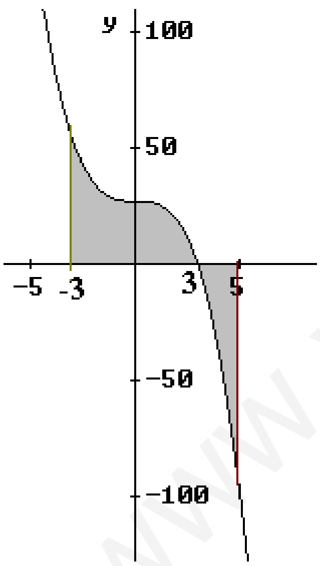
En $x = 0$ tiene un punto de inflexión, siendo convexa ($\cup$) si $x < 0$ y cóncava ($\cap$) cuando $x > 0$.

Cortes con los ejes:

si $x = 0$, $f(0) = 27 \to$ punto (0, 27)

si $y = 0$, $0 = 27 - x^3$, $x = 3 \to$ punto (3, 0)

Dando otros valores: (–2, 35); (1, 26); (2, 19); (4, –37), se obtiene la figura siguiente.



El área pedida es:

$$A = \int_{-3}^{3} (27 - x^3) dx - \int_{3}^{5} (27 - x^3) dx =$$

$$= \left(27x - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{-3}^{3} - \left(27x - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{3}^{5} =$$

$$= 162 + 82 = 244$$

16. Dada la función $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$ (x > 0).

a) Encuentra la primitiva de *f* que en el 2 valga 5.
b) Dibuja la función *f*. Halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 4.

Solución
a) Es una integral casi inmediata:

$$F(x)=\int\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int xdx+4\int x^{-2}dx=\frac{x^2}{2}+4\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}+c$$

Si $F(2)=5 \Rightarrow \dfrac{4}{2}-\dfrac{4}{2}+c=5 \Rightarrow c=5$

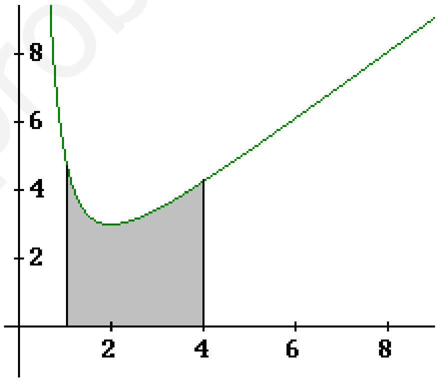
Por tanto, la primitiva buscada es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{4}{x}+5$

b) La curva tiene una asíntota vertical (la recta x = 0) y otra oblicua (la recta y = x). Se ve fácilmente, pues:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)=+\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}\right)\to x$$

Damos algunos valores y representamos los puntos:
(1, 5); (2, 3); (3, 3,44); (4, 4.25); (5, 4,16)

Se obtiene la curva →



El área pedida es:

$$A=\int_1^4\left(x+\frac{4}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}\right]_1^4=7-\frac{1}{2}-(-4)=\frac{21}{2}$$

17. a) Encuentra $f\,'(2)$ donde $f\,'$ es la derivada de la función f dada por

$$f(x)=\frac{4}{x^2}+8x-x^2-12,\ \ (x\neq 0).$$

b) Dibuja la función $f(x)=8x-x^2-12$ y calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución

a) $f(x)=\frac{4}{x^2}+8x-x^2-12 \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{-a}{x^2}+6x-3x^2$

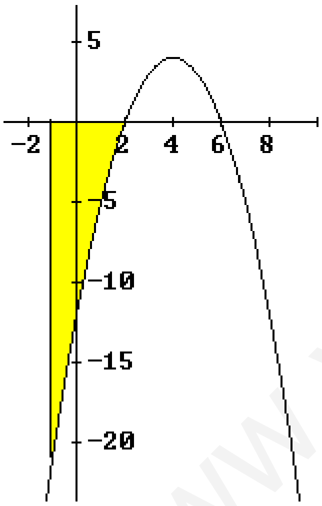
Luego $-10=\frac{-a}{(-1)^2}+6\cdot(-1)-3(-1)^2$

b) $f(x)=8x-x^2-12$ puede trazarse dando valores; también puede verse que tiene un mínimo en x = 4, que es el vértice de la parábola, pues $f''(x)=6-6x=0$ si x = 4.

Algunos valores:

x	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=8x-x^2-12$	–21	–12	–5	0	3	4	–3	0

Su gráfica será la siguiente.



El área limitada por la curva y el eje OX entre –1 y 2 es la sombreada en la figura. Como en ese intervalo la función toma valores negativos, será:

$$A=-\int_{-1}^{2}(-x^2+8x-12)dx=-\left(-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{32}{3}+\frac{49}{3}=27$$

18. Se espera que, en los próximos diez años, las ganancias (en millones de euros) de una empresa, vengan dadas por la función $P(t) = -2t^2 + 20t + 5$

a) Determinar cuando las ganancias serán iguales a 5 millones de euros.
b) Determinar en qué años decrecerán las ganancias. ¿Cuándo son máximas?
c) ¿Cuáles serán las ganancias acumuladas durante los cinco primeros años?

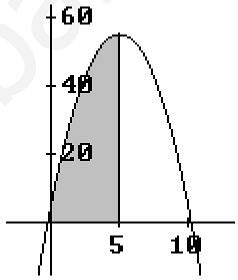
Solución:

a) Se cumple: $P(t) = -2t^2 + 20t + 5 = 5 \Rightarrow t = 0, t = 10$.
La solución $t = 0$ carece de sentido. Por tanto, a los 10 años la empresa gana 5 millones.

b) Derivando: $P'(t) = -4t + 20$.– esta derivada se anula cuando $t = 5$.

Si $t < 5$, $P'(t) > 0 \Rightarrow$ P(t) es creciente.
Si t > 5, $P'(t) < 0 \Rightarrow$ P(t) es decreciente

Si crece para valores de $t < 5$ y decrece para $t > 5$, en t = 5 se da el máximo de $P(t)$.
Dicho máximo es $P(5) = 55$ millones.



c) Las ganancias pedidas vienen dadas por la integral
$\int_0^5 (-2t^2 + 20t + 5)dt \rightarrow$ el área sombreada en la figura adjunta.
Su valor es:
$\int_0^5 (-2t^2 + 20t + 5)dt = \left[\frac{-2}{3}t^3 + 10t^2 + 5t\right]_0^5 = \frac{575}{3}$ millones de euros.

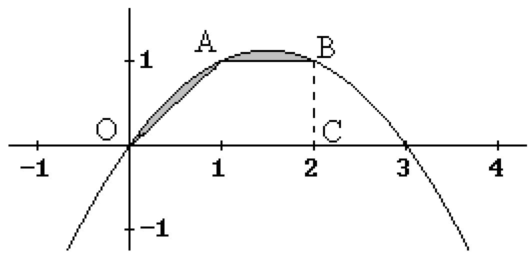
19. Se considera la parábola $p(x) = -0,5x^2 + 1,5x$ y sea $s(x)$ la línea poligonal que se obtiene uniendo los puntos (0, 0), (1, 1), (2, 1) por segmentos de recta. Representa el recinto limitado por la parábola y la poligonal y calcula su área.

Solución:

Damos algunos valores para trazar la parábola:

x	0	1	2	3
$p(x) = -0,5x^2 + 1,5x$	0	1	1	0

El recinto es el sombreado en la siguiente figura.



Su área viene dada por la diferencia de la determinada por debajo del arco parabólico entre 0 y 2 y la del trapecio de vértices OABC. Y vale:

$$S = \int_0^2 (-0,5x^2 + 1,5x)dx - \frac{(2+1)\cdot 1}{2} = \left[-\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{1,5}{2}x^2\right]_0^2 - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} + 3 - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

20. Se considera la función $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$.

a) Calcula el valor de *a* para que la recta tangente a la función en el punto $x = 3$ corte al eje *OX* en el punto $x = 5$.

b) Calcula, además, el área de la región limitada por dicha tangente, el eje *OX* y la función $f(x)$, para el valor de *a* obtenido anteriormente.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente será:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$f(x) = -ax^2 + 5x - 4 \Rightarrow f'(x) = -2ax + 5$

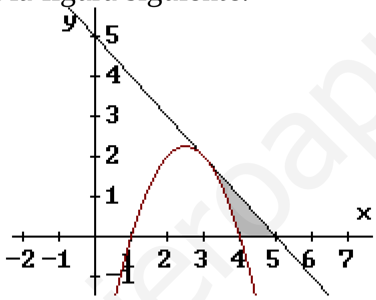
La tangente será:

$$y - (-9a + 11) = (-6a + 5)(x - 3)$$

Como pasa por el punto (5, 0) $\Rightarrow$ $0 - (9a + 11) = (-6a + 5)(5 - 3) \Rightarrow a = 1$.

En consecuencia, la función es $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, y su tangente en x = 3, $y = -x + 5$.

b) La región es la sombreada en la figura siguiente.



Su área viene dada por:

$$\int_3^5 (-x+5)dx - \int_3^4 (-x^2+5x-4)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_3^5 - \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_3^4$$

$$= -\frac{25}{2}+25-\left(-\frac{9}{2}+15\right)-\left[\left(-\frac{64}{3}+40-16\right)-\left(-9+\frac{45}{2}-12\right)\right] = 2-\frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

21. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ |x-2| & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente *f*.
2) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y eje de abscisas.

Solución:

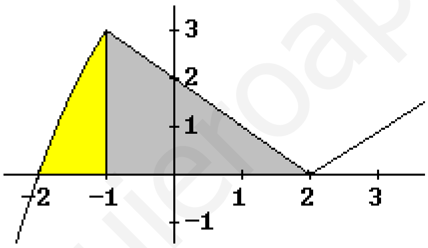
1) Es una función definida a trozos, compuesta por un trozo de parábola y dos trozos de recta, pues atendiendo al valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & x \le -1 \\ -x+2 & -1 < x < 2 \\ x-2 & x \ge 2 \end{cases}$$

Ambas funciones pueden representarse dando valores. Los damos en la siguiente tabla:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(*x*)	–5	0	3	2	1	0	1

Se obtiene la figura:



2) El área pedida es la sombreada en la siguiente figura.
Su valor es:

$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^2+2)dx + A(triángulo) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right) \Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{1}{3} - 4 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \frac{9}{2} = \frac{37}{6}$$

22. a) Dada la función $f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que si $f\,'$es la derivada de f, entonces $f\,'(-1) = -10$.
b) Dibuja la función $f(x) = 3x^2 - x^3$. Encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución

a) $f(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 - x^3 \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \frac{-a}{x^2} + 6x - 3x^2$

Si $f\,'(-1) = -10 \;\Rightarrow\; -10 = \frac{-a}{(-1)^2} + 6\cdot(-1) - 3(-1)^2 \;\Rightarrow\; a = 1$

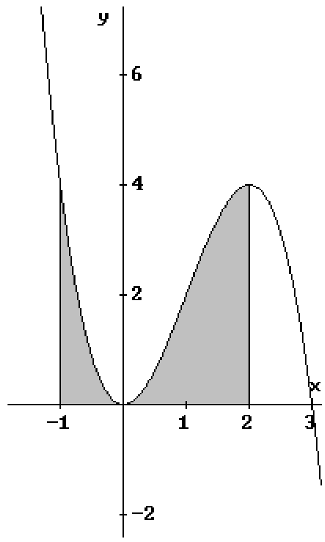
b) $f(x) = 3x^2 - x^3 \;\Rightarrow\; f(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x) \;\Rightarrow\; f\,''(x) = 6 - 6x$

La derivada primera se anula en x = 0 o x = 2. Luego:

- si $x < 0$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece
- si $0 < x < 2$, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece $\Rightarrow$ en $x = 0$ hay un mínimo.
- si $x > 2$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece $\Rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo.

La derivada segunda sea anula en x = 1, luego:

- si $x < 1$, $f\,''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa ($\cup$)
- si $x > 0$, $f\,''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$) $\Rightarrow$ en $x = 1$ hay punto de inflexión



La curva corta a los ejes en los puntos (0, 0) y (3, 3). Dando otros valores,{(−1, 4); (1, 2); (2, 4); (4, −16)}, puede trazarse la gráfica pedida.

El área pedida es la sombreada en la figura. Su valor es:

$$A = \int_{-1}^{2} (3x^2 - x^3)\,dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = 8 - 4 - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4}$$