Máximo o mínimo de una función

Observación: La mayoría de estos ejercicios se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

---

1. Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:
El mínimo de una función se da en los puntos que anulan su derivada y tiene derivada segunda positiva.

La derivada es

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = -2(r_1 + r_2 + r_3 - 3x)$$

que se anula cuando $D'(x) = 0 \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 - 3x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$ (Esto es la media aritmética de r_1, r_2 y r_3.)

Efectivamente es mínimo, pues $D''(x) = 6 > 0$.

---

2. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:
a) La función que define el beneficio anual en euros.
b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.
c) El beneficio máximo.

Solución:
a) El beneficio es el resultado de restar los ingresos y gastos. Esto es,

$$B(x) = I(x) - G(x) = (28x^2 + 36000x) - (44x^2 + 12000x + 700000)$$

Luego: $B(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$

b) El beneficio es máximo cuando $B'(x) = 0$ y $B''(x) < 0$.

$$B'(x) = -32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = 750$$

Como $B''(x) = -32$, cualquiera que sea el valor de x, para x = 750 se da el máximo buscado.

c) El beneficio máximo es: B(750) = 8.300.000 euros.

---

3. La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión:

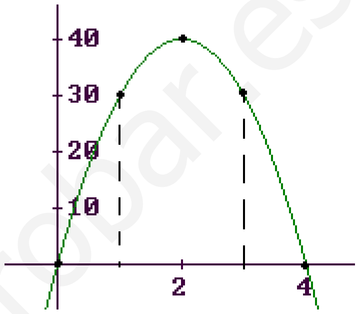
$$T(t) = 40t - 10t^2, \text{ con } 0 \le t \le 4$$

a) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.
b) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

Solución:

a) La función es una parábola con vértice hacía arriba, en el máximo.
El vértice se obtiene en la solución de T´(t) = 0.

$$T´(t) = 40 - 20t = 0 \Rightarrow t = 2.$$



La temperatura máxima será T(2) = 40 · 2 – 10 · 2^2 = 40º C.
Otros puntos de la gráfica de esta función son:
(0, 0); (1, 30); (3, 30) y (4, 0).

Uniendo esos puntos, obtenemos la gráfica adjunta.

b) Para t = 1, como ya hemos dicho, T(1) = 30.
Los instantes en los que la temperatura vale 30 son las soluciones de la ecuación:

$$T(t) = 40t - 10t^2 = 30 \Rightarrow 10t^2 - 40t + 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

En los instantes t = 1 y t = 3 la temperatura será de 30º C.

4. Si un juguete se vende a 130 €, lo compran 1000 personas. Por cada euro que aumenta (o disminuye) ese precio, disminuye (o aumenta), respectivamente, el número de compradores en 50.

a) Haz la gráfica del número de juguetes que se venden en función del precio de venta y da la fórmula que la expresa.
b) El precio de coste de un juguete es de 80 €. Calcula el precio p, que da un beneficio total máximo.
c) Halla el número de juguetes que se venden si el precio es p y calcula el beneficio máximo.

Solución:

a) Ventas en función del precio:

Inicialmente a 130 € $\to$ 1000

Aumento de 1 € (a 131 €): 1000 – 50 $\to$ 1000 – (131 – 130) · 50

Aumento de 2 € (a 132 €): 1000 – 2 · 50 $\to$ 1000 – (132 – 130) · 50

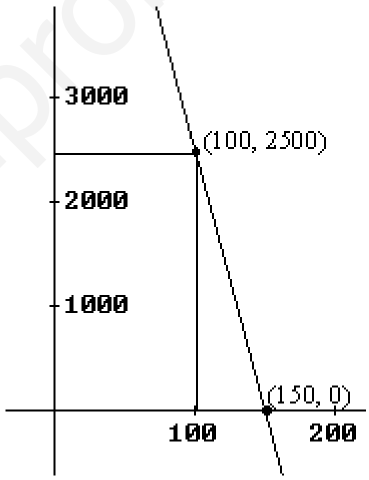
Aumento de x € (a 130 + x €): 1000 – x · 50

Si llamamos p = 130 + x $\Rightarrow$ x = p – 130 $\to$ 1000 – (p – 130) · 50

Las ventas en función del precio viene dadas por la función $V(p) = 1000 - 50(p - 130)$.

Esto es: $V(p) = 7500 - 50p$

La gráfica de esta función es la recta adjunta:



b) Si cuesta 80 y se vende a p, el beneficio por unidad es de p – 80. Como se venden V(p), el beneficio será:

B(p) = V(p) · (p – 80) $\Rightarrow$

$\Rightarrow B(p) = (7500 - 50p)\cdot(p - 80)$

$\Rightarrow B(p) = -50p^2 + 11500p - 600000$

El beneficio máximo se obtiene en la solución de B´(p) = 0 que hace negativa a B´´(p).

$$B'(p) = -100p + 11500 = 0 \Rightarrow p = 115.$$

Como B´´(p) = –100 < 0, para p = 115 se obtiene el máximo beneficio.

c) Si el precio es 115 €:

- Se venden V(115) = 1750 juguetes.
- El beneficio máximo será B(115) = 1750 · (115 – 80) = 61250 €.

5. El número de vehículos que pasaron cierto día por el peaje de una autopista viene representado por la función

$$N(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2+2, & 0\le t\le 9\\ 10-\left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2, & 9<t\le 24\end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t representa el tiempo transcurrido (en horas) desde las 0:00 horas.

a) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaban por el peaje? ¿Entre qué horas disminuyó?

b) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuántos fueron?

Solución:

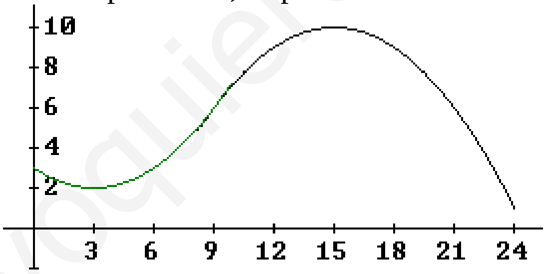
Inicialmente podría verse que la función dada es continua y derivable en el intervalo de definición. (El punto dudoso es t = 9)

Es fácil ver que $N(9^-)=N(9^+)=6\to$ Es continua.

También es derivable, pues:

$$N'(t)=\begin{cases}2\dfrac{t-3}{3}, & 0<t\le 9\\ -2\dfrac{t-15}{3}, & 9<t<24\end{cases}\to \text{Puede verse que } N'(9^-)=N'(9^+)=4$$

Su gráfica, que es la unión de dos parábolas; se puede trazar dando valores.



Como la derivada se anula en t = 3 y t = 15, se tiene:

- Si 0 < t < 3, $N'(t)<0\Rightarrow N(t)$ decrece.
- Si 3 < t < 15, $N'(t)>0\Rightarrow N(t)$ crece $\Rightarrow$ En t = 3 se da un mínimo.
- Si 15 < t < 24, $N'(t)<0\Rightarrow N(t)$ decrece $\Rightarrow$ En t = 15 se da el máximo.

b) A las 15 horas se da el máximo pues antes de las 15 la función es creciente y después es decreciente.

A esa hora, el número de vehículos era $N(15)=10$.

6. En una determinada empresa se fabrican *x* unidades de un producto, y la función de beneficio viene dada por $\mathrm{B}(x) = -x^2 + 12x - 20$.

a) Calcula el número de unidades producidas *x* que deben fabricarse para que no haya ni beneficios ni pérdidas.

b) Calcula el número de unidades *x* que deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿A cuanto asciende ese beneficio máximo?

Solución:

a) Debe cumplirse que B(x) = 0 $\Rightarrow\ -x^2 + 12x - 20 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-80}}{-2} = \frac{-12 \pm 8}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 10 \end{cases}$$

Deben fabricarse 2 unidades; o 10 unidades.

El beneficio es máximo en los valores de B´(x) = 0 que hacen negativa a la derivada segunda, B´´(x).

$$\mathrm{B}(x) = -x^2 + 12x - 20 \ \Rightarrow\ \mathrm{B}'(x) = -2x + 12 \ \Rightarrow\ \mathrm{B}''(x) = -2$$

$$\mathrm{B}'(x) = -2x + 12 = 0 \ \Rightarrow\ x = 6$$

Como B´´(6) = –2 < 0, para ese valor, x = 6, se tiene el máximo buscado.

El beneficio máximo es $B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$.

---

7. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde 1 de enero de 1990 contado en años.

a) ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?

b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que se alcanza en esa ciudad?.

Solución:

a) Una función es creciente cuando su derivada es positiva.

$$C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2 \ \Rightarrow\ C'(x) = 15 - 1{,}2x$$

$$C'(x) = 15 - 1{,}2x = 0 \text{ si } x = \frac{15}{1{,}2} = 12{,}5$$

- Si 0 < x < 12,5, $C'(x) > 0 \Rightarrow$ la concentración de ozono crece.
- Si x > 12,5, $C'(x) < 0 \Rightarrow$ la concentración de ozono decrece.

La concentrado de ozono crece hasta mediados del año 2002.

b) La concentración máxima se alcanza en el instante t = 12,5, pues crece hasta ese valor y decrece a partir de él.

También puede hacerse la derivada segunda y comprobar que C´´(12,5) = –1,2 < 0.

Ese valor máximo es:

$$C(12{,}5) = 90 + 15 \cdot 12{,}5 - 0{,}6(12{,}5)^2 = 183{,}75$$

8. La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión: $H(t) = 20t - 2t^2$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos?
b) ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

Solución:

a) $H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 60 - 18 = 42$.
A los 3 segundos su altura es de 42 m.

b) Si $H(t) = 32 \Rightarrow 20t - 2t^2 = 32 \Rightarrow 2t^2 - 20t + 32 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{20 \pm \sqrt{400-256}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2$ ó $t = 8$.
A los 2 s, subiendo, la pelota alcanza los 32 metros; a los 8 s, bajando, vuelve a pasar por la misma altura.

c) El máximo se alcanza cuando $H'(t) = 0$ y $H''(t) < 0$.
$H'(t) = 20 - 4t = 0 \Rightarrow t = 5$
Como $H''(t) = -4$, para ese valor de $t = 5$ se da la máxima altura.

Esa altura es de $H(5) = 50$ m.

---

9. Los beneficios (en millones de euros por año) estimados para una empresa se ajustan a la siguiente función: $B(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$, $x \geq 0$.
donde B representa los beneficios de la empresa y x los años transcurridos desde el momento de su constitución ($x = 0$).

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de B(x). ¿Qué información nos da sobre la evolución de los beneficios a lo largo del tiempo?
b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Solución:

a) Hacemos la derivada de $B(x)$:

$$B(x) = \frac{5x}{x^2+4} \Rightarrow B'(x) = \frac{5(x^2+4) - 5x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2}$$

Esta derivada se anula cuando $20 - 5x^2 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$.
Por tanto:

- si $x < -2$, $B'(x) < 0 \Rightarrow B(x)$ es decreciente
- si $-2 < x < 2$, $B'(x) > 0 \Rightarrow B(x)$ es creciente
- si $x > 2$, $B'(x) < 0 \Rightarrow B(x)$ es decreciente

Como sólo nos interesa lo que pasa para $x \geq 0$:

- Los beneficios crecen cuando $0 \leq x < 2$; decrecen cuando $x > 2$.
- A partir de $x > 2$, los beneficios decrecen, tendiendo a 0, aunque siempre son positivos, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x}{x^2+4} = 0^+$

b) En el punto x = 2 (a los 2 años) los beneficios alcanzan su valor máximo, ya que crecen antes de x = 2 y decrecen después.

El beneficio máximo será $B(2)=\dfrac{5\cdot 2}{2^2+4}=\dfrac{10}{8}=1{,}25$ millones de euros.

---

10. La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x)=\dfrac{x^3}{100}+8x+20$.

a) Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, ¿cuántas unidades x_0 es necesario producir para que sea mínimo el coste medio por unidad?

b) ¿Qué relación existe entre $Q(x_0)$ y $C'(x_0)$?

Solución:

a) $Q(x)=\dfrac{C(x)}{x} \Rightarrow Q(x)=\dfrac{x^2}{100}+8+\dfrac{20}{x}$

El mínimo de Q(x) se da en las soluciones de Q´(x) = 0 que hacen positiva a Q´´(x).

$$Q'(x)=\frac{2x}{100}-\frac{20}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^3-2000=0 \Rightarrow x=10$$

Como $Q''(x)=\dfrac{2}{100}+\dfrac{40}{x^3}$, para x = 10 se tiene que Q´´(10) > 0. En consecuencia, el coste mínimo unitario se da cuando $x_0 = 10$.

b) $C'(x)=\dfrac{3x^2}{100}+8 \Rightarrow$ C´(10) = 3 + 8 = 11.

El valor de $Q(10)=\dfrac{10^2}{100}+8+\dfrac{20}{10}=11$

- C´(x) da el coste marginal, que es aproximadamente lo que costaría fabricar una unidad mas: C´(x) ≈ C(x + 1) – C(x) (esto es, el coste extra al pasar de fabricar x unidades a fabricar la unidad siguiente, la x + 1.)

En este caso, C´(10) = 11 ≈ C(11) – C(10): fabricar la unidad 11ª supone un coste de 11 unidades monetarias más, aproximadamente. (El coste adicional real es C(11) – C(10) = 121,31 – 110 = 11,31.)

- Q(x) da el coste medio unitario en el punto x. Por tanto, Q(10) = 11 indica que el coste medio por unidad, cuando se fabrican 10 unidades del producto, es de 11 unidades monetarias.

Que ambos costes sean iguales, pues C´(10) = Q(10) = 11, indica que la fabricación de una unidad más, la 11ª, no encarece el producto. (Aunque realmente sí lo hace, pero en una cantidad poco significativa.)

11. El grado de estrés (puntuado de 0 a 10) durante las 8 horas de trabajo de cierto agente de bolsa viene dado a través de la función:

$$f(t) = \frac{-2t(t-10)}{5}, \quad 0 \le t \le 8$$

a) ¿En qué instante de su jornada de trabajo el grado de estrés es máximo?
b) Representar la función anterior.

Solución:

a) El estrés máximo se alcanza en las soluciones de $f'(t) = 0$ que hacen negativa a $f''(t)$

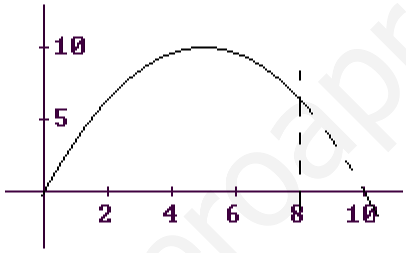
$$f(t) = \frac{-2t(t-10)}{5} \Rightarrow f(t) = \frac{-2t^2}{5} + 4t \Rightarrow f'(t) = \frac{-4t}{5} + 4 = 0 \Rightarrow t = 5$$

Como $f''(t) = \frac{-4}{5} < 0$, para ese valor se da el máximo.

El grado del estrés es máximo a las 5 horas de trabajo.

b) La función anterior es una parábola, con vértice en el máximo, V = (5, 10); creciente en el intervalo (0, 5), y decreciente a partir de 5.

Dando valores se obtiene:



Su dominio es el intervalo [0, 8]; su recorrido, [0, 10].

---

12. En unos almacenes se tienen 2000 kg de alimentos perecederos que se pueden vender a 3 € el kg, pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 0,1 € el kg cada día. Calcular cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos si cada día que pasa se estropean 50 kg de ellos. ¿Cuáles son estos ingresos máximos? ¿Cuántos son los kilos que se venden y a qué precio? Justificar que es máximo.

Solución:

Inicialmente los ingresos son I = 2000 · 3 = 6000.

Si se venden al cabo de x días se tendrá:

$$I(x) = (2000 - 50x) \cdot (3 + 0,1x) \Rightarrow I(x) = 6000 + 50x - 5x^2$$

Esta función será máxima en las soluciones de $I'(x) = 0$ que hagan negativa a $I''(x)$.

Derivando:

$$I'(x) = 50 - 10x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Como $I''(x) = -10$, se cumple que $I''(5) < 0$; por tanto el valor de x debe ser 5 días.

Los ingresos máximos serán I(5) = 1750 · 3,5 = 6125 euros.

Se venden 1750 kg a 3,5 euros el kilo.

13. Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular éste. Justificar que es máximo.
b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Solución:

a) El beneficio máximo se obtiene en las soluciones de $f'(x) = 0$ que hagan positiva a la derivada segunda.

$$f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 \Rightarrow f'(x) = -0{,}2x + 2{,}5 \Rightarrow f''(x) = -0{,}2$$

Como $f'(x) = -0{,}2x + 2{,}5 = 0$ cuando x = 12,5 y la derivada segunda es siempre negativa, cuando se venden 12,5 toneladas del producto se obtiene el máximo beneficio.
Este beneficio será $f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625 \rightarrow$ 5625 euros.

b) Debe darse que $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 \geq 0$.
El valor 0 se obtiene cuando $-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \Rightarrow -x^2 + 25x - 100 = 0 \Rightarrow x = 5$ o $x =$ 20.
Se obtiene beneficios cuando se venden entre 5 y 20 toneladas.

c) El beneficio por tonelada vendida viene dado por la función

$$b(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10}{x} = -0{,}1x + 2{,}5 - \frac{10}{x}$$

Alcanza el máximo cuando b´(x) = 0 y b´´(x) < 0.

$$b'(x) = -0{,}1 + \frac{10}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $b''(x) = \frac{-20}{x^3}$ y b´´(10) < 0, para ese valor de x = 10 se tiene el máximo buscado.

El beneficio máximo por tonelada será de $b(10) = -0{,}1 \cdot 10 + 2{,}5 - \frac{10}{10} = 0{,}5 \rightarrow$ (500 euros por tonelada vendida)

14. La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es $C(x)=\frac{1}{3}x^2+6x+192$. Se define la función de coste medio por unidad como $\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$. ¿A qué nivel de producción será mínimo el coste medio unitario?

Solución:

$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{C}(x)=\frac{1}{3}x+6+\frac{192}{x}$

El coste medio es mínimo en las soluciones de $\overline{C}´(x)=0$ que cumplan que $\overline{C}´´(x)>0$.

$$\overline{C}´(x)=\frac{1}{3}-\frac{192}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=-24;\ x=24$$

$$\overline{C}´´(x)=\frac{384}{x^3} \quad \to \quad \overline{C}´´(-24)<0;\ \overline{C}´´(24)>0$$

Por tanto, el mínimo se da cuando x = 24, siendo dicho coste: $\overline{C}(24)=22$ euros.

---

15. Una empresa ha estimado que al cabo de 10 años de funcionamiento el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos ha sido el siguiente:

Ingresos: $I(t)=-2t^2+48t$, $0\le t\le 10$

Gastos: $G(t)=t^2-12t+130$, $0\le t\le 10$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Los gastos iniciales de la empresa.
b) Los ingresos a los 3 años de funcionamiento.
c) Los beneficios netos en función del número de años transcurridos.
d) ¿En qué años fueron máximos dichos beneficios?
e) ¿Cuál fue el valor de estos beneficios máximos?

Solución:

a) Para t = 0, G(0) = 130 $\to$ 130000 euros.

b) Para t = 3, I(3) = 126 $\to$ 126000 euros.

c) Los beneficios se obtiene restando los gastos a los ingresos.

$$B(t)=I(t)-G(t)=-2t^2+48t-(t^2-12t+130)=-3t^2+60t-130,\quad 0\le t\le 10$$

d) El máximo de B(t) se da en la solución de B´(t) = 0 que hace negativa a B´´(t).

$$B´(t)=-6t+60=0 \quad \Rightarrow \quad t=10.$$

Como B´´(t) = – 6 < 0, para t = 10 se da el máximo beneficio.

Para t = 10 los beneficios son B(10) = 170 $\to$ 170000 euros.

16. La función $B(x)=\dfrac{-x^2+9x-16}{x}$
representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos. Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio máximo.

Solución:
El beneficio máximo se obtiene en las soluciones de B´(x) = 0 que hacen negativa a B´´(x).

$$B(x)=\frac{-x^2+9x-16}{x}=-x+9-\frac{16}{x}\ \Rightarrow\ B'(x)=-1+\frac{16}{x^2}=0\ \Rightarrow\ x=\pm 4$$

(La solución x = –4 hay que descartarla.)

Como $B''(x)=-\dfrac{32}{x^3}$, para x = 4, B´´(4) = –1/2 < 0 (máximo). (Para x = –4, B´´(–4) = ½ > 0 (mínimo).)

El beneficio máximo se obtiene para x = 4, y vale $B(4)=\dfrac{-16+36-16}{4}=1\rightarrow$ 1000 euros.

---

17. El consumo de agua, en metros cúbicos mensuales, de una empresa varía durante el primer semestre del año (de enero a junio) de acuerdo con la función:

$$C(t)=8t^3-84t^2+240t,\qquad 0\le t\le 6$$

Se pide:
a) ¿En qué meses de este primer semestre se producen los consumos máximo y mínimo?
b) Determinar el valor de dichos consumos máximos y mínimo.
c) Determinar los periodos de crecimiento y decrecimiento del consumo de estos seis meses. Justificar las respuestas.

Solución:
a) Los máximos y mínimos se dan en las soluciones de C´(t) = 0 que hacen negativa o positiva, respectivamente, a C´´(t).

$$C(t)=8t^3-84t^2+240t\ \Rightarrow\ C'(t)=24t^2-168t+240\ \Rightarrow\ C''(t)=48t-168$$

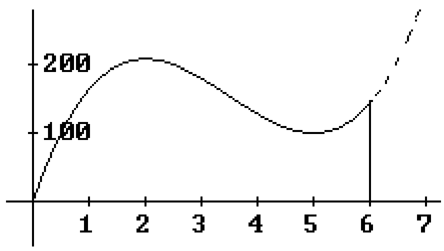
$$C'(t)=24t^2-168t+240=0\ \Rightarrow\ t=2 \text{ o } t=5$$

Como C´´(2) = –72, para t = 2 se da el máximo consumo de agua.
Como C´´(5) = 72, para t = 5 se da el mínimo consumo de agua.

b) El consumo máximo es C(2) = 208 metros cúbicos.
El consumo mínimo es C(5) = 100 metros cúbicos.

c) Para 0 < t < 2, C´(t) > 0 $\Rightarrow$ C(t) crece.
Para 2 < t < 5, C´(t) < 0 $\Rightarrow$ C(t) decrece.
Para 5 < t < 6, C´(t) > 0 $\Rightarrow$ C(t) crece.

Aunque no se pide, la gráfica que indica el consumo de agua es la adjunta.



18. Descomponer el número 81 en dos sumandos positivos de manera que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo. (2,5 puntos)

Solución:
Sean x e y los números.
Se cumple que $x + y = 81$.
Se desea que el producto $P = x \cdot y^2$ sea máximo.
Despejando *y* en la primera expresión, $y = 81 - x$, y sustituyendo en P se tiene:

$$V(x) = (6-2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

Este producto es máximo en las soluciones de $P´(x) = 0$ que cumplan que $P´´(x) < 0$.

$$V´(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Rightarrow x = 81 \text{ o } x = 27$$

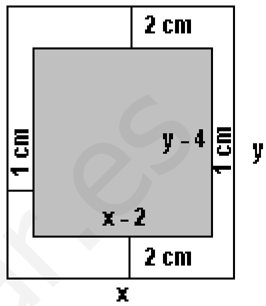
$$V´´(x) = 24x - 48 \rightarrow P´´(81) = 162;\ P´´(27) = -162$$

Por tanto, el máximo se da cuando $x = 27$ e $y = 54$.

Problemas de tipo geométrico

19. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

Solución:
Si llamamos x e y a las dimensiones del cartel, la situación es la que se indica en la figura adjunta, donde la parte impresa es la sombreada.



Debe cumplirse que:

$(x - 2) \cdot (y - 4) = 18$

Se desea que la superficie del cartel, $S = x \cdot y$, sea mínima.

Despejando y en la primera expresión: $y - 4 = \dfrac{18}{x-2} \Rightarrow y = \dfrac{10+4x}{x-2}$

Sustituyendo en la expresión de la superficie se tiene:

$$S(x) = x \cdot \frac{10+4x}{x-2} = \frac{10x+4x^2}{x-2}$$

Esta función será mínima en las soluciones de $S´(x) = 0$ que hagan positiva a $S´´(x)$.
Derivando:

$$S´(x) = \frac{4x^2 - 16x - 20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{576}}{8} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Se tiene que x = 5 (por razones obvias se descarta x = –1).

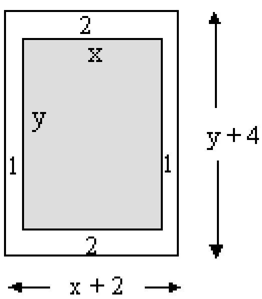
Como $S´´(x) = \dfrac{72}{(x-2)^3}$, se cumple que $S´´(5) > 0$; por tanto el valor de x debe ser 5 cm; siendo y = 10.

Las dimensiones del cartel deben ser 5 por 10.

Es el mismo problema resuelto de otro modo

19. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

Solución:
La hoja de papel debe ser como se indica en la figura.



De cumple que $x \cdot y = 18$. Luego $y = 18/x$

Se desea que $S = (x + 2) \cdot (y + 4)$ sea mínimo.

Sustituyendo $y = 18/x$ en la expresión anterior se tiene:

$$S(x) = (x+2)\left(\frac{18}{x} + 4\right) \Rightarrow S(x) = 4x + \frac{36}{x} + 26$$

Esta función será mínima en las soluciones de $S´= 0$ que hagan positiva a $S´´$.

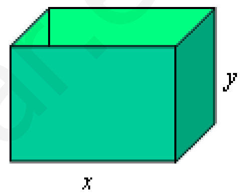
$$S'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = -3 \text{ o } x = 3.$$

Como $S''(x) = \dfrac{72}{x^3}$ y S´´(3) > 0, la anchura del texto impreso son 3 cm; su altura, 6 cm. La hoja de papel tendrá 5 × 10 cm.

---

20. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de volumen 500 cm^2, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Hállense la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la mínima posible.

Solución:
Si x es el lado de la base de la caja e y la altura, se tendrá:



Volumen: $V = x^2 y \;\rightarrow\; 500 = x^2 y \;\rightarrow\; y = \dfrac{500}{x^2}$

Superficie: $S = x^2 + 4xy \;\Rightarrow\; S = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

Para que S sea mínima: S´= 0, S´´ > 0.

$$S' = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = 10$$

$S'' = 2 + \dfrac{4000}{x^3}$, que es mayor que 0 si $x = 10$.

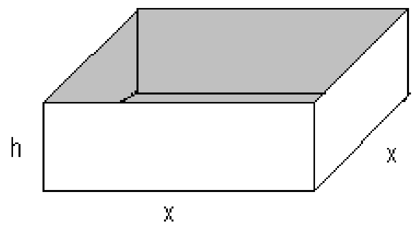
Las dimensiones serán: 10 cm de lado de la base, 5 cm de altura.

---

21. Determinar las condiciones más económicas de una piscina abierta al aire, de volumen 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y del suelo necesite la cantidad mínima de material.

Solución:
Es un problema de optimización. Se trata de minimizar la superficie de las paredes y del suelo de la piscina.

Si sus medidas son x de largo y de ancho, por ser cuadrada, y h de alto, se tiene:
Superficie de paredes y fondo:



$$S = x^2 + 4xh.$$

Como su volumen es $x^2 h = 32 \;\Rightarrow\; h = \dfrac{32}{x^2}$

Sustituyendo en S:

$$S = x^2 + 4x\cdot\frac{32}{x^2} \;\Rightarrow\; S = x^2 + \frac{128}{x}$$

La función S es mínima en las soluciones de S´= 0 que hagan positiva a S´´.

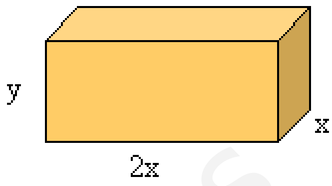
$$S' = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2x^3 - 128 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Como $S' = 2 + \dfrac{256}{x^3}$, y para x = 4 toma valores positivos, para ese valor se da el mínimo de S.

Por tanto, las medidas de la piscina deben ser de 4 m de ancho y largo y 2 m de profundidad.

22. Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha en la que, además, la suma del ancho mas el largo mas el alto sea igual a un metro.
a) ¿Qué medidas debe tener la caja?
b) ¿Qué volumen tendrá?

Solución:
Se trata de un problema de optimización.
La caja es de la forma:
Se desea que el volumen, V = 2x · x · y, sea máximo.
Con la condición de que x + 2x + y = 100 cm.



Despejando *y* (*y* = 100 – 3x) y sustituyendo en V:

$$V = 2x^2 \cdot (100 - 3x) \Rightarrow V(x) = 200x^2 - 6x^3$$

El máximo de V se obtiene en las soluciones de V´= 0 que hacen negativa a V´´.

$$V'(x) = 400x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 200/9$$

$$V''(x) = 400 - 12x$$

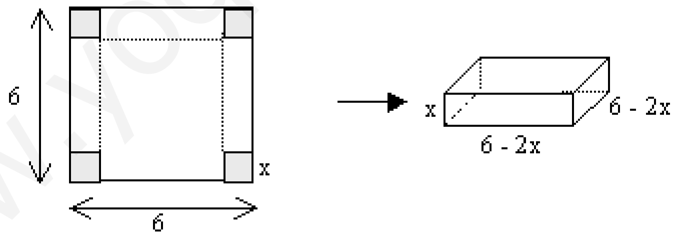
Como V´´(0) = 400 > 0 y V´´(200/9) = –400 < 0, para x = 200/9 se da el volumen máximo.
Por tanto, las dimensiones de la caja son 200/9 por 400/9 por 300/9.

b) El volumen máximo es $V(200/9) = 200\cdot\frac{40000}{81} - 6\cdot\frac{8000000}{729} = \frac{800000}{243}$ cm^3.

---

23. Se quiere construir una caja abierta (sin tapa) cortando un cuadrado igual en cada esquina de un trozo de cartón cuadrado de 6 dm de lado. Calcular la longitud del lado del cuadrado que se ha de cortar para obtener una caja de volumen máximo.

Solución:
Si x es el lado del cuadrado cortado, se tiene:



El volumen de la caja será: $V(x) = (6 - 2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$
Este volumen es máximo en las soluciones de V´(x) = 0 que cumplan que V´´(x) < 0.

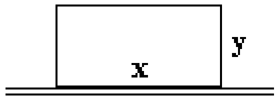
$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = 3$$

$$V''(x) = 24x - 48 \rightarrow V''(1) = -24;\ V''(3) = 24$$

Por tanto, habrá que cortar un cuadrado de 1 dm de lado.

24. Se quiere cercar un campo rectangular que linda con un camino por uno de sus lados. Si la cera del lado del camino cuesta 6 €/m y la de sus otros lados 2 €/m, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede cercarse con 2560 €.

Solución:



Si x es la longitud del lado que linda con el camino e y la longitud del otro lado, el coste de la cerca será:

$$6x + 2y + 2x + 2y = 2560 \Leftrightarrow 8x + 4y = 2560 \Rightarrow y = 640 - 2x$$

La superficie del campo es S = xy = x(640 – 2x) $\Rightarrow$ $S(x) = 640x - 2x^2$

Esta superficie es máxima en las soluciones de S´ = 0 que hacen negativa a S´´.

$$S´(x) = 640 - 4x = 0 \Rightarrow x = 160 \text{ (Luego } y = 320 \text{ m)}$$

Como S´´(x) = –4 < 0, para ese valor hallado se da el máximo de S.

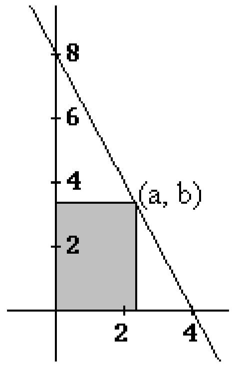
Las dimensiones del campo serán 160 × 320 metros.

---

25. Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta 2x + y = 8, se inscribe un rectángulo de vértices (0, 0), (a, 0), (a, b) y (0, b). Determinar el punto (a, b) al que corresponde un área máxima.

Solución:

La situación es la siguiente.



La superficie del rectángulo sombreado es S = a · b, siendo (a, b) un punto de la recta. Luego, 2a + b = 8.

Por tanto, se desea hacer máxima la función S = a · b, con la condición de que b = 8 – 2a.

Despejando y sustituyendo se tiene:

$$S = a\cdot(8 - 2a) = 8a - 2a^2$$

Esta función se hace máxima en las soluciones de S ´= 0 que hacen negativa a S´´.

(Derivaremos con respeto a <u>a</u>)

$$S´ = 8 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Como S´´ = –4, para ese valor de a = 2 se tendrá el valor máximo buscado.

El punto (a, b) será (2, 4).